Étude d'un oscillateur à relaxation (CCINP TSI 2018)

q1- L'ALI du circuit 1 fonctionne en régime saturé. Ceci se remarque par la rétroaction uniquement positive. v ne peut donc prendre que deux valeurs selon le signe de $\varepsilon = V^+ - V^-$: $+V_{sat}$ si $\varepsilon > 0$, $-V_{sat}$ si $\varepsilon < 0$.

q2- • $\varepsilon = V^+ - V^-$ avec $V^- = 0 \Rightarrow \varepsilon = V^+$

• loi des nœuds en termes de potentiels en V^+ :

$$\frac{u - V^+}{R_1} = \frac{V^+ - v}{R_2} \Rightarrow \boxed{V^+ = \frac{R_2}{R_1+R_2}u + \frac{R_1}{R_1+R_2}v}$$

Ainsi $\varepsilon = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}u + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}v$. On a donc :

• pour $\varepsilon > 0$: $v = +V_{sat}$ et $\dfrac{R_2}{R_1+R_2}u + \dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat} > 0$

$$\Rightarrow \boxed{u > -\frac{R_1}{R_2}V_{sat}}$$

Dès que $u < -\dfrac{R_1}{R_2}V_{sat}$, v commute de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$: on pose

donc $\boxed{u_{seuil,2} = -\dfrac{R_1}{R_2}V_{sat}}$

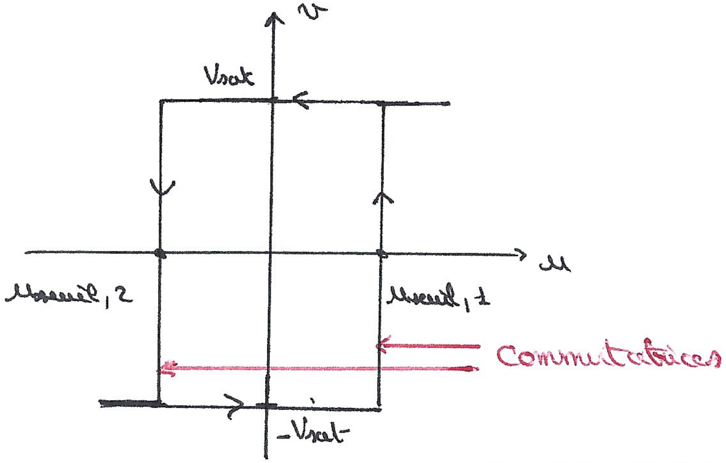
• pour $\varepsilon < 0$: $v = -V_{sat}$ et $\dfrac{R_2}{R_1+R_2}u - \dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat} < 0$

$$\Rightarrow \boxed{u < \frac{R_1}{R_2}V_{sat}}.$$

Dès que $u > \dfrac{R_1}{R_2}V_{sat}$, v commute de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$: on pose

donc $\boxed{u_{seuil,1} = \dfrac{R_1}{R_2}V_{sat}}$.

q3-



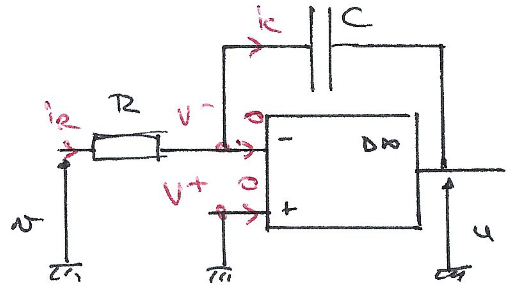
Rq : ce graphique représente un cycle d'hystérésis d'un comparateur à hystérésis positif.

q4- L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V^+ = V^- = 0} \text{ car } V^+ = 0.$$

Selon la loi des nœuds en termes de potentiel, en V^- :



$$i_R = i_C$$

$$\Rightarrow \frac{v - V^-}{R} = C\frac{d}{dt}(V^- - u)$$

Or $V^- = 0$, donc :

$$v = -RC\frac{du}{dt}$$

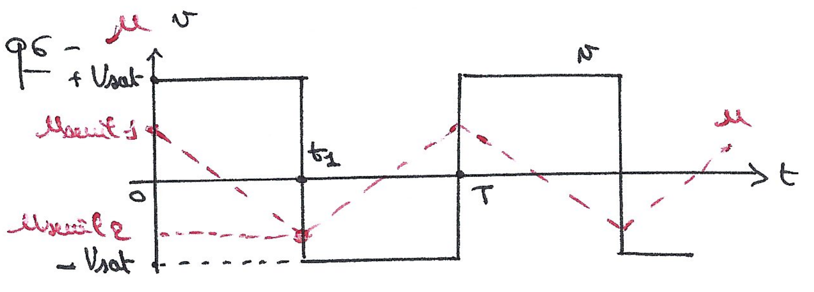
$$\Rightarrow \boxed{\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC}}$$

Le montage est un intégrateur (inverseur).

q5 – Si $v = +V_{sat}$, $\frac{du}{dt} = -\frac{V_{sat}}{RC} \Rightarrow \boxed{u(t) = -\frac{V_{sat}}{RC}t + A}$

avec A une constante réelle. $u(t)$ est une fonction affine de pente négative, donc $u(t)$ est décroissante.

q6 –



q7 – Soit t_1 l'instant de la commutation de v de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$.

Comme $v = V_{sat}$: $u(t) = -\frac{V_{sat}}{RC}t + A$. Or $u(0) = U_{seuil1}$,

donc $A = U_{seuil1}$ et $\boxed{u(t) = -\frac{V_{sat}}{RC}t + U_{seuil1}}$

Pour $t = t_1$, $u(t_1) = U_{seuil2} \Rightarrow t_1 = \frac{RC}{V_{sat}}(U_{seuil1} - U_{seuil2})$

$\Rightarrow t_1 = \frac{RC}{V_{sat}}\left(\frac{R_1}{R_2}V_{sat} + \frac{R_1}{R_2}V_{sat}\right) = \frac{2RCR_1}{R_2}$

- Entre t_1 et T, $v = -V_{sat} \Rightarrow u(t) = \frac{V_{sat}}{RC}t + B$ (B : constante $\mathbb{R}$).

Comme $u(t_1) = U_{seuil2}$, $B = U_{seuil2} - \frac{V_{sat}}{RC}t_1$ et

$\boxed{u(t) = \frac{V_{sat}}{RC}(t - t_1) + U_{seuil2}}$. Comme $u(T) = U_{seuil1}$, on en déduit :

$U_{seuil1} = \frac{V_{sat}}{RC}(T - t_1) + U_{seuil2}$

$\Rightarrow 2\frac{R_1}{R_2}RC = T - t_1$

$\Rightarrow T = 4\frac{R_1}{R_2}RC$ et $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{R_2}{4R_1RC}}$.

q8 – On pose : $U_{seuil1} = V_{max} = 2V \Rightarrow \frac{R_1}{R_2}V_{sat} = V_{max}$

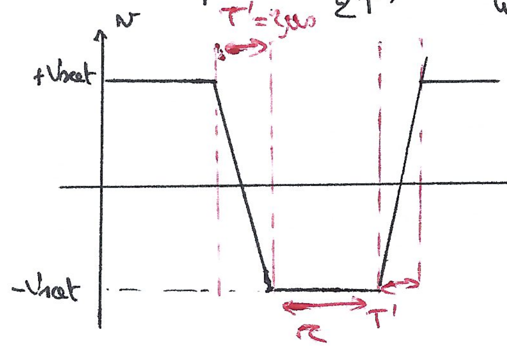
$\Rightarrow \boxed{R_1 = R_2\frac{V_{max}}{V_{sat}}}$

A.N. : $R_1 = 1000 \times \frac{2}{15} \simeq 133\,\Omega$

- $\boxed{C = \frac{R_2}{4R_1Rf}} \underset{R_2 = R}{\Rightarrow} C = \frac{1}{4 \times 133 \times 1000} \simeq 1{,}9\,\mu F$.

q9 – L'ALI doit commuter rapidement de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$ (et vice-versa). Cependant, un ALI réel ne commute pas de manière instantanée : il possède une vitesse de balayage (slew-rate) finie.

Exemple : pour un ALI TL081, le slew-rate vaut environ $15\,V.\mu s^{-1}$. Il faut donc $T' = 2\,\mu s$ pour passer de $+15\,V$ à $-15\,V$, i.e. de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$. La fréquence maximale de l'oscillateur est donc $f_{max} = \frac{1}{2T'} = \frac{1}{4 \times 10^{-6}} = 2{,}5 \times 10^5\,Hz$ soit $250\,kHz$.



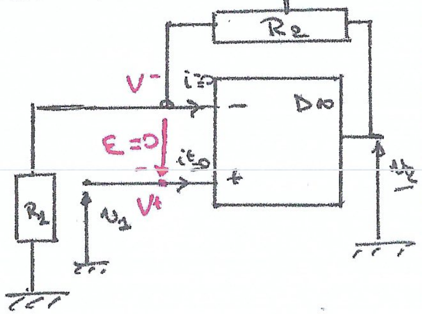
Au plus rapide, $\tau = 0$ donc la période du signal est $2T'$, d'où $f_{max} = \frac{1}{2T'}$.

Conditionnement d'un capteur capacitif (e3a PSI 2013)

$$C_{AB} = C_0\left(1 + k\frac{D_3}{3_0}\right)$$

1 - Conditionnement du capteur

Q1 - Bloc amplification : l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire : $\varepsilon = 0$



$\Rightarrow \underline{V}^+ = \underline{V}^-$

Or : . $\underline{V}^+ = \underline{u}_1$

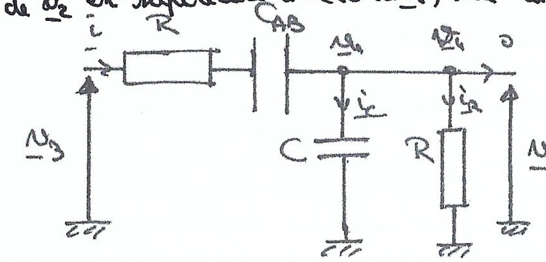
. $\dfrac{-\underline{V}^-}{R_1} = \dfrac{\underline{V}^- - \underline{u}_2}{R_2}$

$\Rightarrow \underline{V}^- = \underline{V}^+ = \underline{u}_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\,\underline{u}_2$

On en déduit : $\boxed{\underline{H}_1 = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \dfrac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}} = A$

$1 + \frac{R_2}{R_1} > 1$: l'amplitude de u_2 est supérieure à celle de u_1, d'où "amplificateur".

Q2 - Bloc filtrage :



Selon la loi des nœuds : $\underline{i} = \underline{i}_C + \underline{i}_R$

$\Rightarrow \dfrac{\underline{u}_3 - \underline{u}_4}{R + \underline{Z}_{C_{AB}}} = \dfrac{\underline{u}_4}{\underline{Z}_C} + \dfrac{\underline{u}_4}{R}$

$\Rightarrow \dfrac{jC_{AB}\omega}{1+jRC_{AB}\omega}\left(\underline{u}_3 - \underline{u}_4\right) = jC\omega\,\underline{u}_4 + \dfrac{\underline{u}_4}{R}$

$\Rightarrow \dfrac{jC_{AB}\omega}{1+jRC_{AB}\omega}\,\underline{u}_3 = jC\omega\,\underline{u}_4 + \dfrac{\underline{u}_4}{R} + \dfrac{jC_{AB}\omega}{1+jRC_{AB}\omega}\,\underline{u}_4$

$\Rightarrow \underline{H}_2 = \dfrac{\underline{V}_4}{\underline{V}_3} = \dfrac{\underline{u}_4}{\underline{u}_3} = \dfrac{\dfrac{jC_{AB}\omega}{1+jRC_{AB}\omega}}{jC\omega + \dfrac{1}{R} + \dfrac{jC_{AB}\omega}{1+jRC_{AB}\omega}}$.

$\Rightarrow \underline{H}_2 = \dfrac{jRC_{AB}\omega}{(1+jRC_{AB}\omega)(1+jRC\omega) + jRC_{AB}\omega}$.

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H}_2 = \dfrac{jRC_{AB}\,\omega}{1 + jR(C+2C_{AB})\omega + (j\omega)^2 R^2 CC_{AB}}}.$$

On remarque que : $\begin{cases} .\ \lim\limits_{\omega\to 0} \underline{H}_2 = 0 \\ .\ \lim\limits_{\omega\to +\infty} \underline{H}_2 = 0 \end{cases}$

Ce filtre est donc un filtre passe-bande (d'ordre 2).

Q3 - Par bouclage, le courant de sortie du bloc est i^+, qui est nul pour un ALI idéal.

Q4 - Par définition : $\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2 = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \times \dfrac{\underline{V}_4}{\underline{V}_3} = \dfrac{\underline{V}_3}{\underline{V}_4} \times \dfrac{\underline{V}_4}{\underline{V}_3} = 1$.

On peut réécrire $\underline{H}$: $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{V}_S}$.

$\Rightarrow \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\left(jRC_{AB}\,\omega\right)\underline{V}_S = \left[1 + jR(C+2C_{AB})\omega + (j\omega)^2 R^2CC_{AB}\right]\underline{V}_S$

Domaine temporel :

$$R^2CC_{AB}\frac{d^2u_S}{dt^2}(t) + \left[R(C+2C_{AB}) - \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)RC_{AB}\right]\frac{du_S}{dt}(t) + u_S(t) =$$

$$\Rightarrow \boxed{R^2CC_{AB}\frac{d^2u_S}{dt^2}(t) + \left[RC + RC_{AB}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\right]\frac{du_S}{dt}(t) + u_S(t) = 0}$$

On retrouve l'expression demandée avec $\tau^2 = R^2CC_{AB}$ et $\tau' = RC + RC_{AB}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)$

q5- Les oscillations peuvent s'établir dès que :

$$RC + RC_{AB}\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{R_2}{R_1} < -\frac{C}{C_{AB}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_2 > R_1\left(1 + \frac{C}{C_{AB}}\right)}$$

À la limite : $R_2 = R_1\left(1 + \frac{C}{C_{AB}}\right)$ et $R^2 C C_{AB} \frac{d^2 v_s}{dt^2} + v_s = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{CC_{AB}}}}$$

q6- On donne $C = C_0 = 7 \times 10^{-12}$ F et $R = R_1 = 100$ kΩ.

Pour $\Delta_3 = 0$, $C_{AB} = C_0 = 7 \times 10^{-12}$ F.

Ainsi, pour des oscillations sinusoïdales (cas limite) :

$$\underline{R_2 = R_1\left(1 + \frac{C_0}{C_0}\right) = 2R_1 = 200 \text{ k}\Omega}.$$

et $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_0^2}} = \frac{1}{RC_0}$ $\Rightarrow$ $\underline{\omega_0 \simeq 1{,}4 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}}$

soit une fréquence propre de $2{,}3 \times 10^5$ Hz environ.

q7- Le signal n'est pas constitué d'une raie à f_0 mais contient quelques harmoniques. *

q8- Cette fois $C = C_0$ mais $C_{AB} = C_0\left(1 + k\frac{\Delta_3}{30}\right)$ avec $\Delta_3 \ll 30$.

On conserve $R_2 = 2R_1$. L'équation différentielle devient :

$$R^2 C_0^2\left(1 + k\frac{\Delta_3}{30}\right)\frac{d^2 v_s}{dt^2}(t) + \left[RC_0 - RC_0\left(1 + k\frac{\Delta_3}{30}\right)\right]\frac{dv_s}{dt}(t) + v_s(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad R^2 C_0^2\left(1 + k\frac{\Delta_3}{30}\right)\frac{d^2 v_s}{dt^2}(t) - RC_0 k\frac{\Delta_3}{30} \cdot \frac{dv_s}{dt}(t) + v_s(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 v_s}{dt^2}(t) - \frac{1}{RC_0} \cdot \frac{k\frac{\Delta_3}{30}}{1 + k\frac{\Delta_3}{30}} \frac{dv_s}{dt}(t) + \frac{1}{R^2C_0^2} \times \frac{1}{1 + k\frac{\Delta_3}{30}} v_s(t) = 0$$

Or $\left(1 + k\frac{\Delta_3}{30}\right)^{-1} \simeq 1 - k\frac{\Delta_3}{30}$ pour $\Delta_3 \ll 30$, donc :

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2}(t) - \frac{1}{RC_0} k\frac{\Delta_3}{30}\left(1 - k\frac{\Delta_3}{30}\right)\frac{dv_s}{dt}(t) + \frac{1}{R^2C_0^2}\left(1 - k\frac{\Delta_3}{30}\right)v_s(t) = 0$$

On néglige les termes d'ordre 2 en $\frac{\Delta_3}{30}$ face aux termes d'ordre 1 :

$$\boxed{\frac{d^2 v_s}{dt^2}(t) - \frac{1}{RC_0} k\frac{\Delta_3}{30} \cdot \frac{dv_s}{dt}(t) + \frac{1}{R^2C_0^2}\left(1 - k\frac{\Delta_3}{30}\right)v_s(t) = 0.}$$

* $\underline{\Delta_3 > 0}$: $-\frac{1}{RC_0} k\frac{\Delta_3}{30} > 0$: on retrouve l'équation d'un oscillateur amorti : l'amplitude de $v_s(t)$ diminue au cours du temps.
$(\underline{\Delta\ k < 0})$

De plus : $\omega_{osc}^2 = \frac{1}{R^2C_0^2}\left(1 - k\frac{\Delta_3}{30}\right) = \omega_0^2\left(1 - k\frac{\Delta_3}{30}\right)$.

Si $\Delta_3 > 0$, $\omega_{osc} > \omega_0$: la fréquence des oscillations augmente.

* $\underline{\Delta_3 < 0}$: $-\frac{1}{RC_0} k\frac{\Delta_3}{30} < 0$: l'amplitude de $v_s(t)$ croît au cours du temps ; elle sera limitée par la saturation de l'ALI. La fréquence des oscillations diminue ($\omega_{osc} < \omega_0$).

q9- On a montré précédemment que, pour $\Delta_3 \ll 30$:

$$\boxed{\omega_{osc} = \omega_0\sqrt{1 - k\frac{\Delta_3}{30}}} \quad \left(\simeq \omega_0\left(1 - 2k\frac{\Delta_3}{30}\right) + o\left(\frac{\Delta_3^2}{30^2}\right)\right)$$

* c'est donc un signal quasi-sinusoïdal (si l'amplitude de la raie en f_0 est

2 - Conditionnement du signal

q6 - L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{e}^+ - \underline{e}^- = 0$$

- Loi des nœuds en $\underline{e}^+$: $\dfrac{\underline{V_2} - \underline{e}^+}{R_3} = jC_3\omega\,\underline{e}^+ \Rightarrow \boxed{\underline{e}^+ = \dfrac{\underline{V_2}}{1+jR_3C_3\omega}}$

- Loi des nœuds en $\underline{e}^-$: $\dfrac{\underline{V_2} - \underline{e}^-}{R_3} = \dfrac{\underline{e}^- - \underline{V_5}}{R_3} \Rightarrow \boxed{\underline{e}^- = \dfrac{\underline{V_2}+\underline{V_5}}{2}}$

- On a : $\underline{e}^+ = \underline{e}^- \Rightarrow \dfrac{\underline{V_2}}{1+jR_3C_3\omega} = \dfrac{\underline{V_2}+\underline{V_5}}{2}$

$$\Rightarrow \underline{V_2}\,(1 - jR_3C_3\omega) = \underline{V_5}\,(1+jR_3C_3\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{T_A}(j\omega) = \frac{\underline{V_5}}{\underline{V_2}} = \frac{1-jR_3C_3\omega}{1+jR_3C_3\omega}}$$

- $|\underline{T_A}(j\omega)| = \dfrac{\sqrt{1+(R_3C_3\omega)^2}}{\sqrt{1+(R_3C_3\omega)^2}} = 1$: les amplitudes V_2 et V_5 sont égales.

- $\varphi = \arg\left(\underline{T_A}(j\omega)\right) = \arg(1-jR_3C_3\omega) - \arg(1+jR_3C_3\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = -2\arctan(R_3C_3\omega)}$$

Ce montage (filtre passe-tout) est un déphaseur.

q7 - On a : $v_6(t) = \dfrac{v_2(t) \times v_5(t)}{E}$.

Or $v_2(t) = V_0 \sin(\omega t)$ et $v_5(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (les amplitudes de v_2 et v_5 sont égales, cf. q6).

Ainsi : $\boxed{v_6(t) = \dfrac{V_0^2 \sin(\omega t)\sin(\omega t+\varphi)}{E}}$.

Or $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$, donc :

$$v_6(t) = \frac{V_0^2}{2E}\left[\cos(\omega t - (\omega t+\varphi)) - \cos(2\omega t+\varphi)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{v_6(t) = \frac{V_0^2}{2E}\cos(\varphi) - \frac{V_0^2}{2E}\cos(2\omega t+\varphi)}.$$

q8 - On applique la relation du pont diviseur de tension :

$$\boxed{\underline{T_C}(j\omega) = \frac{\underline{v_{sc}}}{\underline{v_6}} = \frac{\underline{Z_{C_4}}}{R_4 + \underline{Z_{C_4}}} = \frac{1}{1+jR_4C_4\omega}}.$$

L'étage C est un filtre passe-bas d'ordre 1, de pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{1}{R_4C_4}$. En choisissant $\omega_c \ll 2\omega$, seule la composante continue de $v_6(t)$ est conservée en sortie de filtre (celle de pulsation 2ω est totalement atténuée). Ainsi :

$$v_{sc}(t) = |\underline{T_C}(0)|\frac{V_0^2}{2E}\cos(\varphi + \arg(\underline{T_C}(0)))$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{sc}(t) = \frac{V_0^2}{2E}\cos(\varphi)}.$$

q9 - $v_2(t)$ est une tension sinusoïdale de pulsation $\omega_{osc} = \omega_0\sqrt{1-\frac{k\Delta_3}{3\sigma}}$

Ainsi : $\varphi = -2\arctan(R_3C_3\omega_{osc}) = -2\arctan\left(\dfrac{R_3C_3}{RC}\sqrt{1-\dfrac{k\Delta_3}{3\sigma}}\right)$.

En prenant $R_3C_3 = RC$, on obtient : $\varphi = -2\arctan\left(\sqrt{1-\dfrac{k\Delta_3}{3\sigma}}\right)$.

Or $\cos(\varphi) = \dfrac{1-\tan^2(\varphi/2)}{1+\tan^2(\varphi/2)} = \dfrac{1-\left(\tan\left(-\arctan\left(\sqrt{1-\frac{k\Delta_3}{3\sigma}}\right)\right)\right)^2}{1+\left(\tan\left(-\arctan\left(\sqrt{1-\frac{k\Delta_3}{3\sigma}}\right)\right)\right)^2}$

Or $\tan(-x) = -\tan(x)$ et $\tan(\arctan(y)) = y$. Ainsi :

$$\cos(\varphi) = \frac{1-\left(\sqrt{1-k\frac{\Delta_3}{30}}\right)^2}{1+\left(\sqrt{1-k\frac{\Delta_3}{30}}\right)^2} = \frac{k\Delta_3/30}{2-k\frac{\Delta_3}{30}}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = k\frac{\Delta_3}{30}\left(2-k\frac{\Delta_3}{30}\right)^{-1} \simeq k\frac{\Delta_3}{30}\left(2+k\frac{\Delta_3}{30}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\varphi) = 2k\frac{\Delta_3}{30} + o\left(\left(\frac{\Delta_3}{30}\right)^2\right)}.$$

Ainsi :
$$\boxed{V_{sc} \simeq \frac{V_0^2}{E}k\frac{\Delta_3}{30}}.$$

q10 - La sensibilité S peut être définie comme le rapport $\frac{V_{sc}}{|\Delta_3|}$: elle s'exprime en $V.mm^{-1}$. Cette grandeur donne la variation de l'amplitude V_{sc} en fonction du déplacement Δ_3 : plus S est grande, plus il est simple de lire de petites variation d'amplitude $|\Delta_3|$.

A.N. : $S = \frac{V_0^2}{E}\cdot\frac{|k|}{30} \Rightarrow S = \frac{5{,}0^2}{0{,}5}\times\frac{(+0{,}2)}{2} = \underline{+5\,V.mm^{-1}}$.

q11 - · Avantages : · capteur sans contact : pas de destruction de l'objet métallique sondé ;
· indépendant de l'état de surface ;
· conditionnement simple.

· Inconvénients : · ne fonctionne que sur des objets métalliques
· nécessite des surfaces planes.

Dispositif électronique (Centrale TP 2007)

q1- a) On applique une loi des nœuds en $V^- = v_{C_3}$:

$$\frac{v_{s_1} - v_{C_3}}{R_3} = i^- + i_{C_3}$$

avec $i^- = 0$ car l'ALI est idéal, et $i_{C_3} = C_3 \frac{dv_{C_3}}{dt}$.

Ainsi : $$\boxed{R_3 C_3 \frac{dv_{C_3}}{dt} + v_{C_3} = v_{s_1}} \quad (1)$$

• À l'instant initial, $v_{s_1} = +V_{sat}$ car $\varepsilon > 0$.

Ainsi : $$\tau \frac{dv_{C_3}}{dt} + v_{C_3} = +V_{sat} \qquad (\tau = R_3 C_3)$$

$$\Rightarrow v_{C_3}(t) = A e^{-t/\tau} + V_{sat} \qquad A : \text{constante } \mathbb{R}.$$

Or $v_{C_3}(0) = 0$ (condensateur initialement déchargé).

Donc : $$A + V_{sat} = 0 \Rightarrow A = -V_{sat}.$$

D'où : $$\boxed{v_{C_3}(t) = V_{sat}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

• On applique une loi des nœuds en V^+ :

$$-\frac{V^+}{R_1} = \frac{V^+ - v_{s_1}}{R_2}$$

$$\Rightarrow V^+\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = v_{s_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{s_1} = \alpha v_{s_1}}.$$

À l'instant initial, $V^+(0) = \alpha V_{sat}$.

Ainsi : $$\varepsilon = V^+ - V^- = \alpha v_{s_1} - v_{C_3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \alpha v_{s_1} - V_{sat}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Comme $v_{s_1} = +V_{sat}$ à $t = 0$: $\varepsilon(t) = \alpha V_{sat} - V_{sat}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$v_{s_1}(t) = -V_{sat}$ dès que $\varepsilon < 0$: $\varepsilon(t) = \alpha V_{sat} - V_{sat}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) < 0$

$$\Rightarrow \alpha - 1 + e^{-t/\tau} < 0$$

$$\Rightarrow e^{-t/\tau} < 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{\tau} < \ln(1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{t > -\tau \ln(1 - \alpha)} = t_1.$$

Rq : $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1$ donc $\ln(1 - \alpha) < 0$.

Dès que $t = t_1$, la tension v_{C_3} est suffisamment importante pour que $\varepsilon = V^- - v_{C_3}$ devienne négatif et v_{s_1} bascule à $-V_{sat}$.

b) En reprenant (1) : $$R_3 C_3 \frac{dv_{C_3}}{dt} + v_{C_3} = -V_{sat}$$

$$\Rightarrow v_{C_3}(t) = B e^{-t/\tau} - V_{sat}. \qquad B : \text{cte } \mathbb{R}.$$

Pour $t = t_1$, $v_{C_3}(t_1) = V_{sat}\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) = \alpha V_{sat}$ par continuité de la tension aux bornes de C_3. Ainsi :

$$B e^{-t_1/\tau} - V_{sat} = \alpha V_{sat}$$

$$\Rightarrow B = (1 + \alpha) V_{sat}\, e^{t_1/\tau}$$

D'où : $$v_{C_3}(t) = (1 + \alpha) V_{sat}\, e^{-\frac{(t - t_1)}{\tau}} - V_{sat}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{C_3}(t) = V_{sat}\left((1 + \alpha) e^{-\frac{(t - t_1)}{\tau}} - 1\right)}. \quad \text{pour } t > t_1.$$

Ceci reste valable tant que $\varepsilon < 0$. Or, pour $t > t_1$:

$$\begin{cases} V^+ = \alpha v_{s_1} = -\alpha V_{sat} \quad \text{par } v_{s_1} = -V_{sat} \\ V^- = v_3(t) = V_{sat}\left((1+\alpha)e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} - 1\right). \end{cases}$$

Ainsi :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = -\alpha V_{sat} - (1+\alpha)V_{sat}\, e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} + V_{sat}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = (1-\alpha)V_{sat} - (1+\alpha)V_{sat}\, e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}.$$

On en déduit l'instant t_2 à partir duquel $\varepsilon > 0$ et v_{s_1} bascule de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$:

$$(1-\alpha)V_{sat} - (1+\alpha)V_{sat}\, e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} > 0$$

$$\Rightarrow (1-\alpha) > (1+\alpha)e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} < \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad (1+\alpha > 0).$$

$$\Rightarrow -\frac{(t-t_1)}{\tau} < \ln\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow t - t_1 > \tau \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$$

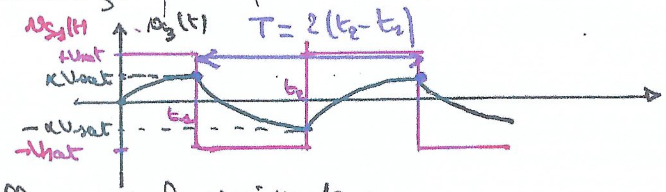
$$\Rightarrow \boxed{t > t_1 + \tau \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)}$$

On pose $t_2 = t_1 + \tau\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$: à partir de cet instant, le condensateur s'est suffisamment déchargé et V^+ devient supérieur à V^-. Donc $v_{s_1} = +V_{sat}$, et l'on redémarre l'analyse précédente : le condensateur se recharge jusqu'à ce que $\varepsilon < 0$ et v_{s_1} bascule, puis le condensateur se décharge jusqu'à ce que $\varepsilon > 0$ et v_{s_1} bascule de nouveau : $v_{s_1}(t)$ et $v_3(t)$ sont bien des signaux périodiques.

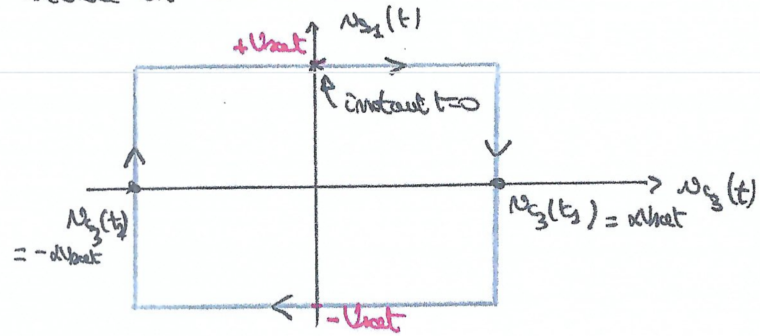
. <u>Période T</u> : elle correspond à $2(t_2 - t_1)$ (cf. q2-b)

$$\boxed{T = 2\tau\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)}$$

c) Commençons par représenter $v_{s_1}(t)$ et $v_3(t)$:



. L'allure est la suivante :



. <u>À $t = 0$</u> : le point (v_3, v_{s_1}) est situé à $(0, +V_{sat})$;

. <u>$t \in [0; t_1]$</u> : $v_3(t)$ augmente, $v_{s_1} = +V_{sat}$;

. <u>$t = t_1$</u> : commutation de v_{s_1} de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$;

. <u>$t \in [t_1; t_2]$</u> : $v_3(t)$ diminue jusqu'à $v_3(t_2) = -\alpha V_{sat}$;

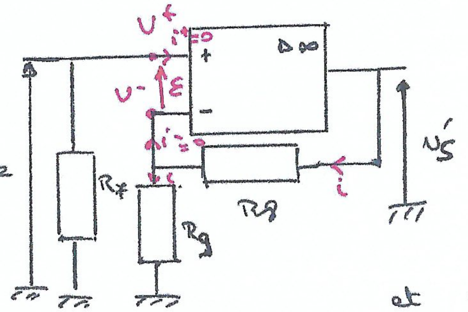
. <u>$t = t_2$</u> : v_{s_1} commute de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$. Le cycle redémarre

q2-a) <u>cf. q1-b)</u> : $\boxed{T = 2\tau\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)}$

b) <u>A.N.</u> : $T = 2\times 100\times 10^3 \times 470\times 10^{-12} \times \ln\left(\frac{1+0{,}328}{1-0{,}328}\right) \simeq \underline{64{,}0\ \mu s}$.

avec $\alpha = \frac{19{,}6}{19{,}6+40{,}2} \simeq 0{,}328$. On en déduit : $f = \frac{1}{T} \simeq \underline{15{,}6\ kHz}$.

q3- a)



L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0$$

Or : $V^+ = v_e$

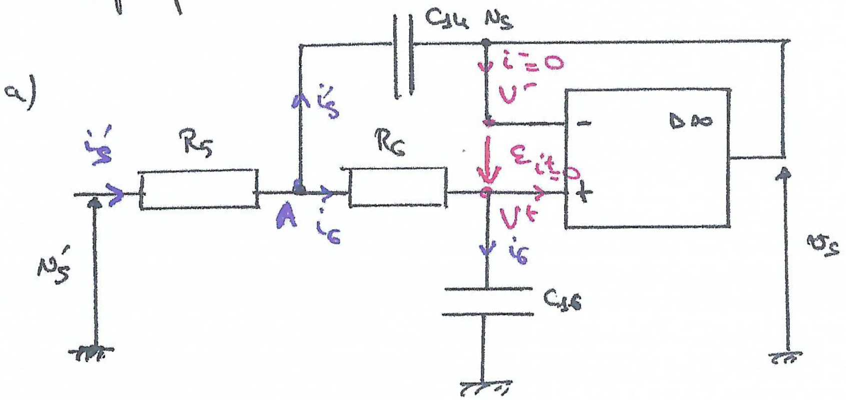
et $\dfrac{v_s' - V^-}{R_8} = \dfrac{V^-}{R_9}$

donc : $V^- = \dfrac{R_9}{R_8 + R_9} v_s'$.

Comme $V^- = V^+ = v_e$: $\boxed{v_s' = \left(1 + \dfrac{R_8}{R_9}\right) v_e}$

b) On a : $\dfrac{v_s'}{v_e} = 1 + \dfrac{R_8}{R_9} \Rightarrow \dfrac{v_s'}{v_e} = 21 > 1$: ce montage est un amplificateur de tension.

q4- a)



L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire : $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$.

• Loi des noeuds appliquée en A : $\dfrac{v_s' - V_A}{R_5} = \dfrac{V_A - V^+}{R_6} + jC_{14}\omega\,(V_A - v_s)$

si l'on suppose v_s et v_s' sinusoïdales, de pulsation ω (hypothèse implicite de l'énoncé).

De plus : $\dfrac{V_A - V^+}{R_6} = jC_{16}\omega V^+$ (loi des noeuds en V^+)

$$\Rightarrow \boxed{V^+ = \frac{1}{1 + jR_6C_{16}\omega} V_A}$$

Or $V^+ = V^- = v_s$: $v_s = \dfrac{1}{1 + jR_6C_{16}\omega} V_A$

Ainsi :

$$v_s' - V_A = \frac{R_5}{R_6}(V_A - v_s) + jR_5C_{14}\omega\,(V_A - v_s)$$

$$\Rightarrow v_s' = \left(\frac{R_5}{R_6} + jR_5C_{14}\omega\right)(\cancel{1} + jR_6C_{16}\omega - \cancel{1})v_s + (1 + jR_6C_{16}\omega)v_s$$

$$\Rightarrow v_s' = \left[\left(\frac{R_5}{R_6} + jR_5C_{14}\omega\right) \times jR_6C_{16}\omega + 1 + jR_6C_{16}\omega\right] v_s$$

$$\Rightarrow \frac{v_s}{v_s'} = \frac{1}{1 + jR_6C_{16}\omega + jR_5C_{16}\omega + (j\omega)^2 R_5R_6C_{14}C_{16}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_s}{v_s'} = \frac{1}{1 + j(R_5 + R_6)C_{16}\omega - \omega^2 R_5R_6C_{14}C_{16}}}$$

On retrouve la forme demandée en identifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{2m}{\omega_0} = (R_5 + R_6)C_{16} \\ R_5R_6C_{14}C_{16} = \dfrac{1}{\omega_0^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} m = \dfrac{1}{2}(R_5 + R_6)\sqrt{\dfrac{C_{16}}{R_5R_6C_{14}}} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{R_5R_6C_{14}C_{16}}} \end{cases}}$$

b- A.N : • $m = \dfrac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times \cancel{10 \times 10^{3}} \times \sqrt{\dfrac{2,2}{\cancel{(10 \times 10^3)^2} \times 4,7}} = \sqrt{\dfrac{2,2}{4,7}} \simeq 0,68$

• $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{(10 \times 10^3)^2 \times 2,2 \times 10^{-9} \times 4,7 \times 10^{-9}}} \simeq 31,1 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

soit $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \simeq 4,95 \text{ kHz}$

c) Ce montage est un filtre passe-bas d'ordre 2, faiblement résonant $\left(Q = \dfrac{1}{2m} \simeq 0,71\right.$, peu différent de $\left.\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de fréquence propre $f_0 = 4,95$ kHz. Ce filtre permet d'atténuer les signaux à haute fréquence comme celui de l'oscillateur étudié précédemment, de fréquence $f \simeq 15 \text{ kHz} \simeq 3 f_0$.

Q5-a) cf. annexe. $\underline{H} = \dfrac{v_s}{v_e} = \dfrac{v_s}{v_s'} \times \dfrac{v_s'}{v_e}$ (montage en cascade avec ALI, la fonction de transfert globale est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre pris séparément).

Donc :
$$\underline{H} = \frac{1 + \frac{R_g}{R_g}}{1 + j\frac{2m}{\omega_0}\omega - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$:
  - $\underline{\omega \to 0}$: $\underline{H} = 1 + \frac{R_g}{R_g} \Rightarrow G_{dB}(\omega \to 0) = 20 \log(21)$
    $\Rightarrow G_{dB}(\omega \to 0) \simeq 26,4$ dB.
  - $\underline{\omega = \omega_0}$: $\underline{H} = -j\dfrac{1 + \frac{R_g}{R_g}}{2m} \Rightarrow G_{dB}(\omega_0) = 20 \log\left(\dfrac{1 + \frac{R_g}{R_g}}{2m}\right)$
    $\Rightarrow G_{dB}(\omega_0) \simeq 23,8$ dB
  - $\underline{\omega \to +\infty}$: $\underline{H} \simeq -\left(1 + \frac{R_g}{R_g}\right) \times \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \Rightarrow G_{dB} = cte - 40 \log(\omega)$

$\longrightarrow$ pente de -40 dB / décade.

b) Le bloc amplifie les basses fréquences et atténue les hautes fréquences, supérieures à f_0 : il remplit donc le rôle souhaité.

- Le signal $v_e(t)$ contient une fréquence fondamentale f_a égale à :
$$2\pi f_a = 100\pi \Rightarrow f_a = 50 \text{ Hz}.$$

Si l'on suppose le filtre parfait, toutes les harmoniques de fréquence supérieures à f_0 sont coupées. Or l'harmonique d'ordre k a pour fréquence $k f_a$, d'où :
$$k f_a \leq f_0$$
$$\Rightarrow k \leq \frac{f_0}{f_a} \Rightarrow k \leq 99$$

Le signal $v_e(t)$ ne contient aucune harmonique de rang pair. On en déduit que $\text{Ent}\left(\frac{99}{2}\right) = 49$ harmoniques sont transmises.

Réponse n° 2 papier log log

* $|\underline{H}|(\omega=0) = 21$

* $|\underline{H}|(\omega=\omega_0) = \frac{1+R_f/R_g}{2m} \simeq 15,4$

Rq : Pour $\omega_1 >> \omega_0$:

$$|\underline{H}|(\omega_1) \simeq -\left(1+\frac{R_f}{R_g}\right)\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2$$

Donc pour $10\omega_1$ (une décade) :

$$|\underline{H}|(10\omega_1) \simeq \frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{100}$$

Dans cette représentation, on divise $|\underline{H}|$ par 100 pour chaque décade en pulsation dès que $\omega >> \omega_0$.