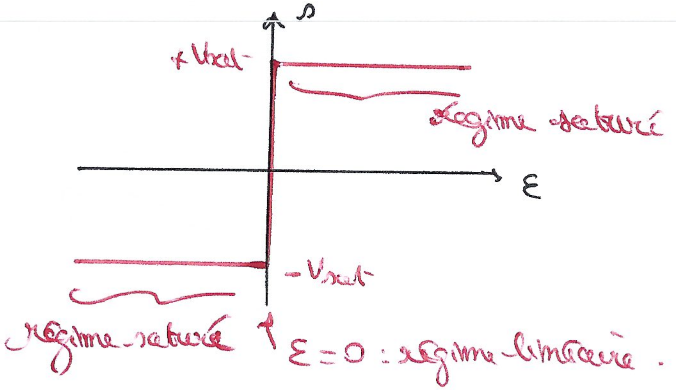
Appareil de mesure du champ $\vec{B}$: le teslamètre

(CCP MP 2018)

1- AO "idéal"

q1- • **Régime linéaire** : la tension de sortie est proportionnelle à la tension différentielle ε (ALI réel). Pour un ALI idéal, le gain statique étant infini, $\varepsilon = 0$ et $s \in [-V_{sat} ; V_{sat}]$.

• **Régime saturé** : la tension de sortie est "bloquée" à une valeur de saturation ($+V_{sat}$ ou $-V_{sat}$) et devient indépendante des variations de ε.



q2- Pour un AO idéal, $i_+ = i_- = 0$.

En régime linéaire : $\varepsilon = 0$ et $\mu \to +\infty$.

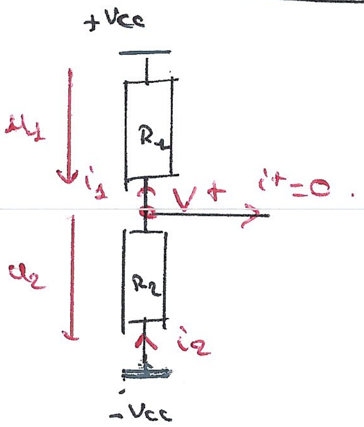
q3- "∞" qualifie le caractère idéal de l'ALI.

2- Montages de base avec AO

q4- • **Montage 1** : l'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire :
$$\varepsilon_1 = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow \boxed{e_1 = s_1} \quad \boxed{K_1 = 1}$$

On reconnaît un montage suiveur.

• **Montage 2** : mêmes hypothèses : $\varepsilon_2 = V^+ - V^- = V^+ - s_2 = 0$
$\Rightarrow V^+ = s_2$



Comme $i^+ = 0$: $i_1 = i_2 \Rightarrow \dfrac{V^+ - V_{cc}}{R_1} = \dfrac{-V_{cc} - V^+}{R_2}$

$$\Rightarrow V^+\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = V_{cc}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_2 = V_{cc}\,\frac{\left(1/R_1 - 1/R_2\right)}{1/R_1 + 1/R_2}} = K_2 V_{cc}$$

avec $\boxed{K_2 = \dfrac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}}$.

• **Montage 3** : • Loi des nœuds en V^+ :

$$\frac{e_1 - V^+}{R_3} = \frac{V^+}{R_4} \Rightarrow \boxed{V^+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4}\,e_1}$$

Or $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$ (ALI idéal, régime linéaire) et V^- est telle que : $\dfrac{e_2 - V^-}{R_3} = \dfrac{V^- - s_3}{R_4} \Rightarrow \boxed{\dfrac{R_4}{R_3 + R_4}\,e_2 + s_3\,\dfrac{R_3}{R_3 + R_4} = V^-}$

Ainsi : $V^+ = V^- \Rightarrow \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}\,e_1 = \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}\,e_2 + \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}\,s_3$.

$$\frac{R_3}{R_3 + R_4}\,s_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4}(e_1 - e_2) \Rightarrow \boxed{s_3 = \frac{R_4}{R_3}(e_1 - e_2)}$$

Ainsi $\boxed{K_3 = \dfrac{R_4}{R_3}}$

· Montage 4 : Par le même raisonnement que pour les montages précédents : $\varepsilon = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow V^+ = V^-$.

On $V^+ = e_4$ et $V^- = \frac{R_5}{R_5+R_6} s_4$ d'où $\boxed{s_4 = \left(1+\frac{R_6}{R_5}\right)e_4}$.

Ainsi $\boxed{K_a = 1 + \frac{R_6}{R_5}}$

q5 - Le montage 3 est un soustracteur, et le montage 4 un amplificateur non inverseur ($K_4 > 1$).

3 - Conception d'un teslamètre

q6 - Le montage suiveur permet de découpler le capteur de tout circuit de charge auquel il est branché. Ainsi les propriétés du capteur ne sont pas modifiées et $u_1 = u_c$.

q7 - u_c contient une composante continue ($0,25\,V_{cc}$) que l'on cherche à annuler pour obtenir $u_s = KB$. Le décaleur permet de générer la tension $0,25\,V_{cc} = u_2$ en choisissant judicieusement R_1 et R_2 :

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4R_2 - 4R_1 = R_1 + R_2$$
$$\Rightarrow 3R_2 = 5R_1 \Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{5}{3}R_1}.$$

Le montage 3 permet de retirer u_2 à $u_1 = u_c$ (sortie du montage suiveur), et le montage 4 à amplifier u_3.

q8 - a) $u_s = \left(1+\frac{R_6}{R_5}\right)u_3$; $u_3 = \frac{R_4}{R_3}(u_1 - u_2)$; $u_1 = u_c$

et $u_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} V_{cc}$. Ainsi $u_3 = \frac{R_4}{R_3}\left(0,25V_{cc} + 20B - \frac{R_2-R_1}{R_1+R_2}V_{cc}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{u_s = \frac{R_4}{R_3}\left(1+\frac{R_6}{R_5}\right)\left[\left(0,25 - \frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}\right)V_{cc} + 20B\right]}$$

Rq : si $R_2 = \frac{5}{3}R_1$, $0,25 - \frac{R_2-R_1}{R_2+R_1} = 0$ et $u_s = \frac{R_4}{R_3}\left(1+\frac{R_6}{R_5}\right) \times 20B$

donc $u_s = KB$ comme attendu.

b) On remarque que $\frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{3}$. Ainsi $\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = 0,25$ et

$$\boxed{u_s = 20\frac{R_4}{R_3}\left(1+\frac{R_6}{R_5}\right)B = KB}.$$

A.N. : $u_s = 20 \times 1 \times (1+4)B = 100B$ donc $K = 100$.

Convertisseur tension-fréquence (CCP PC 2013 - PC2)

PROBLÈME B

B1 - Multivibrateur monostable à ALI

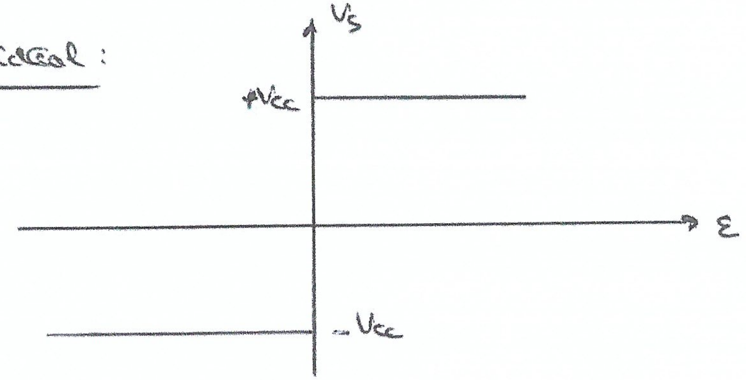
1 - Comparateur simple seuil

1- Ce montage fonctionne de manière non-linéaire (absence de rétroaction). Ainsi, en posant $\varepsilon = V^+ - V^-$:

- $\underline{\varepsilon > 0} \Rightarrow V^+ > V^-$ et $V_s = +V_{cc}$
- $\underline{\varepsilon < 0} \Rightarrow V^+ < V^-$ et $V_s = -V_{cc}$

La valeur de la tension de sortie renseigne sur la supériorité d'une tension d'entrée sur l'autre, tout le terme "comparateur".

2- <u>ALI idéal</u> :



2 - Comparateur à deux seuils

1 - Il s'agit d'un comparateur à hystérésis négatif (cf. cours).

(I)

L'ALI étant idéal mais fonctionnant en régime saturé :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = V^+ - V_e.$$

Or, puisque $i^+ = i^- = 0$, une loi des nœuds en V^+ donne :

$$\frac{V^+}{R_1} = \frac{V_s - V^+}{R_2} \Rightarrow V^+ = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_s.$$

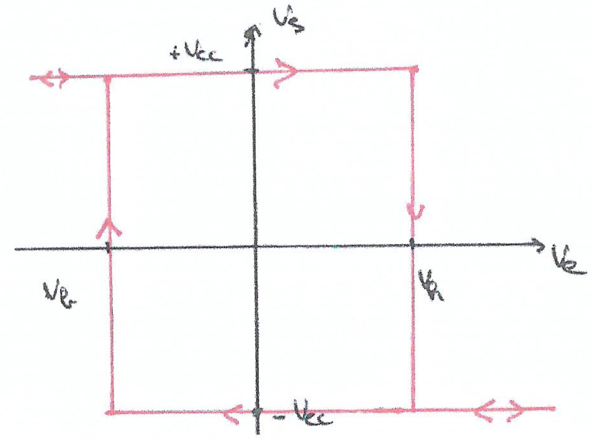
D'où :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_s - V_e}.$$

- $\underline{\varepsilon > 0}$: $V_s = +V_{cc}$ et $\boxed{V_e < \frac{R_1}{R_1+R_2} V_{cc} = V_H}$
- $\underline{\varepsilon < 0}$: $V_s = -V_{cc}$ et $\boxed{V_e > -\frac{R_1}{R_1+R_2} V_{cc} = V_B}$

Suivant la valeur de V_e, V_s peut donc prendre deux valeurs $+V_{cc}$ ou $-V_{cc}$.

2 -



On obtient un cycle d'hystérésis parcouru dans le sens horaire (sens négatif).

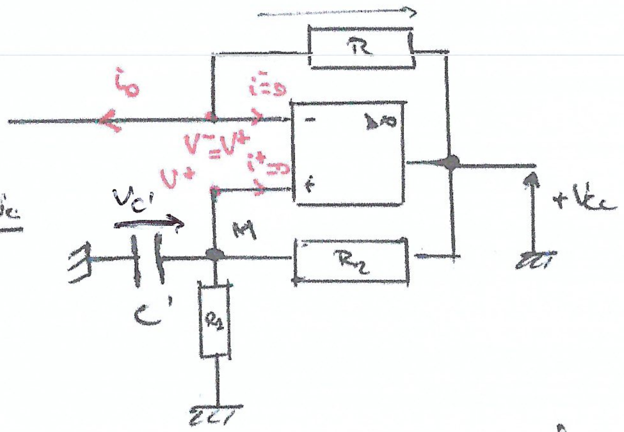
3 - Multivibrateur monostable à ALI

1- V_A est stable : $V_A = +V_{cc}$. Comme la tension V_c est nulle "depuis longtemps", on en déduit que $V_{c'} = V_M = V_+$. De plus, l'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire (fonctionnement stable), on a :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0$$

$$\Rightarrow V^+ = V^-.$$

Or $V^- = V_c$. Comme $i^+ = i^- = 0$, on en déduit :



- $V^- = V_c = V^+$
- $i_0 = \dfrac{V_{cc} - V^-}{R} = \dfrac{V_{cc} - V_c}{R}$

i_0 est aussi le courant passant dans l'ensemble {diode // condensateur}.

Si la diode est bloquée, alors $i_0 = 0$ et $V_c = V_{cc} > 0$.

Cela est contraire à la caractéristique de la diode.

Il est donc nécessaire que D soit passante : ainsi $V_c = 0$ et

$i_0 = \dfrac{V_{cc}}{R}$.

Rq : Je ne comprends pas l'utilité du "schéma équivalent" !.

2- . La diode est passante, donc $V_c = 0$.

. On a donc $V^- = 0$. Comme $V^- = V^+ = V_{c'}$, on a :

$V_{c'} = 0$, donc le condensateur C' se comporte comme un fil (car $V_E = 0$).

3-1- La tension est continue aux bornes d'un condensateur. Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} V_{c'}(t = 0^+) = 0 \\ V_c(t = 0^+) = 0 \end{cases}}$$

2- On sait que, à $t = 0$, $V_{c'} = 0$. Donc à cet instant initial, $V_M = V^+ = E$.

Or pour commuter de $+V_{cc}$ à $-V_{cc}$, il faut que $V^- > V_A$ (cf. B1.2). En supposant $V^+ = V^-$ à l'instant initial, cela implique que $V^+ > V_A$. Or, pour $t = 0$,

$V_{c'}(0) = 0$ ~~et~~ $V_{c'}(t) = V^+ - E \Rightarrow E = V^+ \Rightarrow \boxed{E > V_A}$

3- La diode est bloquée : aucun courant ne la traverse. Ainsi i_0 est le courant traversant C.

On peut donc écrire :

$$i_0 = C \frac{dV_c(t)}{dt}$$

Or $i_0 = \dfrac{V_A - V_c}{R} = \dfrac{-V_{cc} - V_c}{R}$. Ainsi :

$$-\frac{V_{cc}}{R} - \frac{V_c}{R} = C \frac{dV_c(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_c(t) = -\frac{V_{cc}}{RC}}$$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$V_c(t) = A e^{-t/RC} + V_{cc}$$

Or $V_c(0) = 0$ (cf. B1 3.3.1). Donc $\underline{A = +V_{cc}}$.

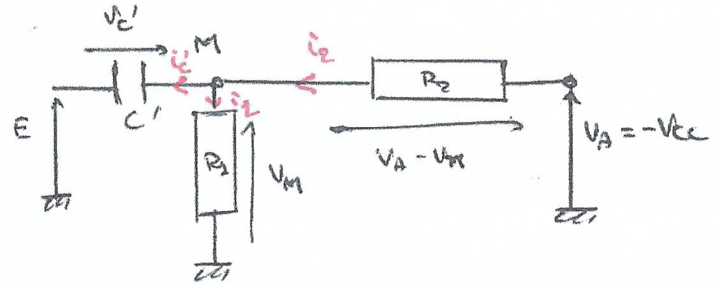
Ainsi : $\boxed{V_c(t) = V_{cc}\left(e^{-t/RC} - 1\right)}$

4- On en déduit que $V_c < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$; $V_c(0) = 0$, $V_c \xrightarrow[t \to +\infty]{} -V_{cc}$.

<u>La diode D est donc bien bloquée.</u>

5- On a : $V_c' = V_M - E \Rightarrow \boxed{V_M = V_c' + E}$.

Or :



$$i_2 = i_1 + i_c'$$

$$\Rightarrow \frac{V_A - V_M}{R_2} = \frac{V_M}{R_1} + C' \frac{dV_c'(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow -\frac{V_{cc}}{R_2} = (V_c' + E)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + C' \frac{dV_c'(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{V_{cc}}{R_2} \times \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}_{= -V_h} = V_c' + E + C' \times \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{dV_c'(t)}{dt}.$$

On pose : $\tau' = C' \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Ainsi :

$$-V_h = V_c' + E + \tau' \frac{dV_c'(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV_c'(t)}{dt} + \frac{V_c'(t)}{\tau'} = -\frac{E}{\tau'} - \frac{V_h}{\tau'}}.$$

- On a : $V_c'(t) = B e^{-t/\tau'} + (-E - V_h)$

Donc :

$$V_c'(t) = B e^{-t/\tau'} - (E + V_h)$$

De plus, $V_c'(0) = 0 \Rightarrow B = E + V_h$.

Donc : $\boxed{V_c'(t) = (E + V_h)\left[e^{-t/\tau'} - 1\right]}$

6- On sait que $V_M = V^+ = V_c' + E$. Donc :

$$V^+(t) = E + (E + V_h)\left[e^{-t/\tau'} - 1\right].$$

$$\Rightarrow V^+(t) = E e^{-t/\tau'} + V_h\left(e^{-t/\tau'} - 1\right).$$

$$\Rightarrow \boxed{V^+(t) = (E + V_h) e^{-t/\tau'} - V_h}.$$

7- On a :

$$\begin{cases} \lim_{t \to +\infty} V_c(t) = -V_{cc} \\ \lim_{t \to +\infty} V^+(t) = -V_h. \end{cases}$$

Par comparaison avec les notations du B1.2.2 :

$$V_c = V_e$$

Or V_c passe de 0 ($t=0$) à $-V_{cc} < V_e$ pour les temps longs. En particulier $V_A = -V_{cc}$, on remarque grâce au cycle d'hystérésis qu'il y a bien commutation de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ de V_A, et ce dès que $V_c = V_e = -\frac{R_1}{R_1+R_2} V_{cc}$.

8- a- On a : $\tau' \ll \tau = RC$

Donc $e^{-t/\tau'}$ converge plus vite vers 0 que $e^{-t/\tau}$.

le condensateur C' se charge beaucoup plus rapidement que C.

b- La tension $\varepsilon(t)$ est donnée par :

$$\varepsilon(t) = V^+(t) - V^-(t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = V^+(t) - V_c(t) \quad \text{ici.}$$

Puisque C' est plus rapidement chargé que C, on peut faire l'hypothèse $V^+ \simeq V^+(t \to +\infty) = -V_h$.

Ainsi : $\varepsilon(t) \simeq -V_h - V_{cc}(e^{-t/RC} - 1)$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) \simeq -V_{cc} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} - V_{cc}(e^{-t/RC} - 1)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) \simeq -V_{cc}\left[\frac{R_1}{R_1+R_2} + e^{-t/RC} - 1\right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) \simeq -V_{cc}\left[e^{-t/RC} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(t) \simeq V_{cc}\left[\frac{R_2}{R_1+R_2} - e^{-t/RC}\right]}$$

c- On a vu que V_A commutait dès que $\varepsilon = 0$. Ainsi :

$$\frac{R_2}{R_1+R_2} - e^{-t/RC} = 0$$

$$\Rightarrow t = -RC \ln\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$$

ou : $\boxed{t = RC \ln\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}$

B2 - Circuit de mise en forme

1- L'ALI est idéal et la rétroaction négative (unique) implique un fonctionnement en régime linéaire. Ainsi

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{V^+ = V^-}$. Or $V^+ = 0 \Rightarrow \boxed{V^- = 0}$.

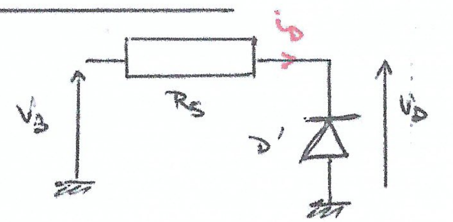
Une loi des noeuds en V^- donne, avec $i^- = 0$ (résistance d'entrée infinie) : $\dfrac{V_A}{R_3} = -\dfrac{V_B}{R_4}$

$$\Rightarrow \boxed{V_B = -\frac{R_4}{R_3} V_A}$$

Pour $R_3 = R_4$, $V_B = -V_A$: le circuit introduit un déphasage de π ("inversion" du signal d'entrée V_A).

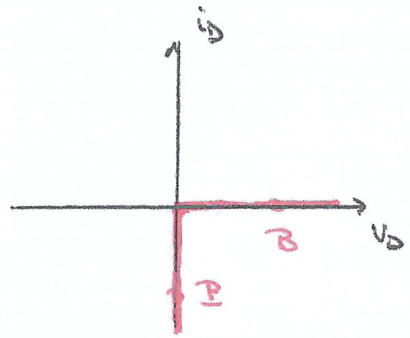
2- • Sur la figure 10, on reconnaît le montage inverseur précédent avec deux résistances identiques, donc $\boxed{V_B = -V_A}$.

• Relation entre V_D et V_B :



La convention d'orientation choisie pour la diode est l'inverse de celle d'une diode idéale donnée au début de l'énoncé.

La caractéristique (V_D, i_D) de la diode D' est donc :



$\begin{cases} D' \text{ passante : } V_D = 0,\ i_D \leq 0 \\ D' \text{ bloquée : } V_D > 0,\ i_D = 0. \end{cases}$

Or :

• Si $V_B < 0$: $i_D = \dfrac{V_B - V_D}{R_5} < 0$ car $V_D \geq 0$.

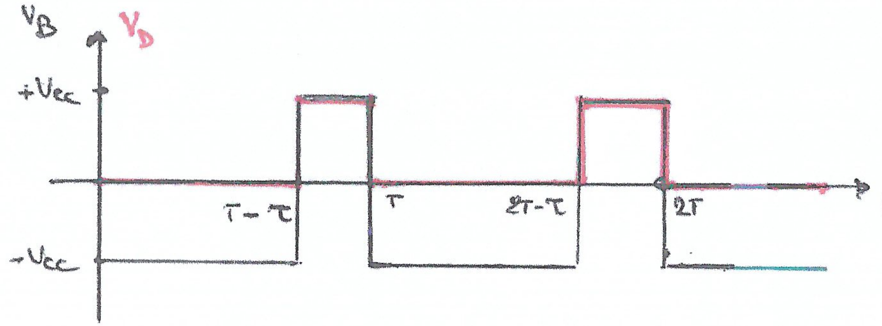
La diode est donc passante et $\boxed{V_D = 0}$.

• Si $V_B > 0$: deux cas à traiter :

• $i_D = 0 \Rightarrow V_B = V_D > 0$: la diode est bloquée

• $i_D < 0 \Rightarrow V_B < V_D$ donc $V_D > 0$: impossible car incompatible avec la caractéristique de la diode

Pour $V_B > 0$, la diode est donc bloquée et $V_D = V_B$.



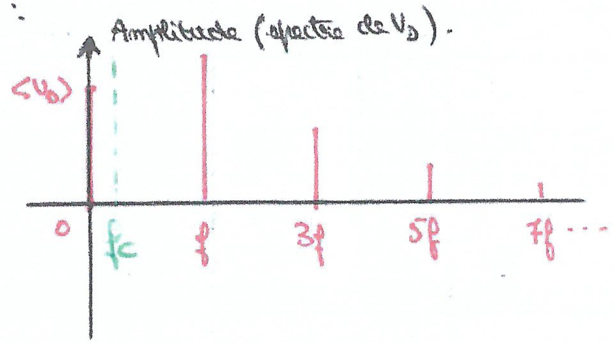
3 – La valeur moyenne est donnée par :

$$\langle V_D \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V_D(t)\,dt \Rightarrow \langle V_D \rangle = \frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{T} V_{cc}\,dt$$

car $V_D = 0$ pour $t \in [0; T-\tau]$ et $V_D = +V_{cc}$ pour $t \in [T-\tau, T]$.

Donc : $\boxed{\langle V_D \rangle = V_{cc} \cdot \frac{\tau}{T}}$.

4 – V_D est un signal créneau, de fréquence $f = \frac{1}{T}$. Pour obtenir $V_S = k \times f = \frac{k}{T}$ à partir de V_D, il faut atténuer toutes les harmoniques contenues dans le spectre de V_D et ne conserver que sa valeur moyenne $\langle V_D \rangle = V_{cc}\frac{\tau}{T} = \frac{k}{T}$. Il faut donc utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c \ll f$:



B3- Etude du filtre

1 - La forme de $\underline{H}(j\omega)$ donnée suppose que :

- l'entrée V_D est sinusoïdale de pulsation ω ;
- le montage est stable et l'ALI fonctionne en régime linéaire.

Puisque l'ALI est idéal, on retrouve $\varepsilon = 0 \Rightarrow V^+ = V^-$.

Or $V^- = V_S$ donc $\boxed{V^+ = V_S}$. Les résistances d'entrée des bornes "+" et "−" de l'ALI sont infinies (ALI idéal), donc $i^+ = i^- = 0$. On note V_A le potentiel au noeud situé entre R_5, R_6 et C_5 ; une loi des noeuds en V_A donne :

$$\frac{\underline{V_D} - \underline{V_A}}{R_5} = \frac{\underline{V_A} - \underline{V}^+}{R_6} + (\underline{V_A} - \underline{V_S})\, jC_5\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{V_D}}{R_5} = \underline{V_A}\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + jC_5\omega\right) - \left(\frac{1}{R_6} + jC_5\omega\right)\underline{V_S} \qquad (1)$$

- Loi des noeuds en $V^+ = V_S$:

$$\frac{\underline{V_A} - \underline{V_S}}{R_6} = \underline{V_S} \times jC_6\omega$$

$$\Rightarrow \underline{V_A} = \underline{V_S}(1 + jR_6C_6\omega). \qquad (2)$$

En injectant (2) dans (1) :

$$\underline{V_D} = \underline{V_S}\left[(1+jR_6C_6\omega)\left(1 + \frac{R_5}{R_6} + jR_5C_5\omega\right) - \left(\frac{R_5}{R_6} + jR_5C_5\omega\right)\right]$$

$$\Rightarrow \underline{V_D} = \underline{V_S}\left[1 + jR_6C_6\omega + jR_5C_6\omega + (j\omega)^2 R_5R_6C_5C_6\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_D}} = \frac{1}{1 + j\omega(R_5+R_6)C_6 + (j\omega)^2 R_5R_6C_5C_6}}$$

2 - On pose :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \dfrac{1}{\omega_0^2} = R_5R_6C_5C_6 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{R_5R_6C_5C_6}}} \\ \dfrac{1}{Q\omega_0} = (R_5+R_6)C_6 \Rightarrow Q = \dfrac{1}{(R_5+R_6)C_6} \times \sqrt{R_5R_6C_5C_6} \end{cases}$$

donc : $\boxed{Q = \dfrac{1}{R_5+R_6}\sqrt{\dfrac{R_5R_6C_5}{C_6}}}$

3 -
- $\lim_{\omega \to 0} \underline{H}(j\omega) = 1$
- $\lim_{\omega \to +\infty} \underline{H}(j\omega) = 0$

Ce filtre est un filtre passe-bas d'ordre 2.

4 - On a : $|\underline{H}(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$

Or on veut Q tel que :

$$\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2=1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

$$\Rightarrow \quad 1-2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\cancel{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2=1+\cancel{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2=2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{Q^2}=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

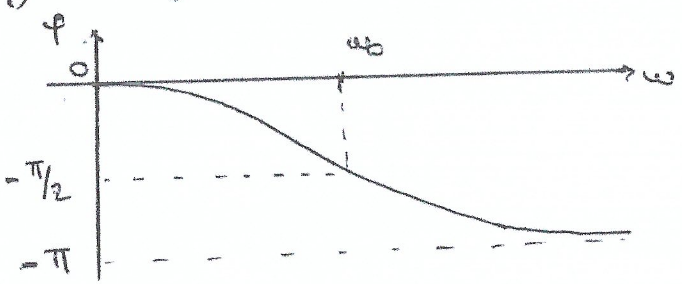
5- Pour Q quelconque :

$$\varphi(\omega)=\arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\omega)=\arg(H_0)-\arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\omega)=\begin{cases}-\arctan\left(\dfrac{\omega/Q\omega_0}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right) & \text{pour } \omega<\omega_0\\[2ex] -\pi+\arctan\left(\dfrac{\omega/Q\omega_0}{-1+(\omega/\omega_0)^2}\right) & \text{pour } \omega>\omega_0\end{cases}$$

avec $\arg(H_0)=\arg(1)=0$.



Pour $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\arctan\left(\dfrac{\omega_0\omega\sqrt{2}}{\omega_0^2-\omega^2}\right) & \text{pour } \omega<\omega_0\\[2ex] -\pi+\arctan\left(\dfrac{\omega_0\omega\sqrt{2}}{\omega^2-\omega_0^2}\right) & \text{pour } \omega>\omega_0\end{cases}$$