



Numéro d'inscription

Numéro de table

Né(e) le

Nom : _____

Prénom : _____

Emplacement QR Code

Filière :

Session :

Épreuve de : **SCIENCES INDUSTRIELLES**

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Téléchirurgie robotisée au contact d'organes mobiles

Q1. En développant une fermeture géométrique en projection dans la base du repère \mathcal{R}_0 , donner une relation algébrique reliant les paramètres L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3 .

On a : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0} \Leftrightarrow L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - L_2 \cdot \vec{x}_3 - L_2 \cdot \vec{x}_2 = \vec{0}$

Donc :

$$\begin{cases} L_0 + L_1 \cdot \cos \theta_1 - L_2 \cdot \cos \theta_3 - L_2 \cdot \cos \theta_2 = 0 \\ L_1 \cdot \sin \theta_1 - L_2 \cdot \sin \theta_3 - L_2 \cdot \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Donc : $(L_0 + L_1 \cdot \cos \theta_1 - L_2 \cdot \cos \theta_3)^2 + (L_1 \cdot \sin \theta_1 - L_2 \cdot \sin \theta_3)^2 = L_2^2$

Q2. De même, exprimer le vecteur position du point E (\vec{AE}) dans la base du repère \mathcal{R}_0 en fonction de L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3 .

$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE} = L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - 2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3$

donc $\vec{AE} = [L_0 + L_1 \cdot \cos \theta_1 - 2 \cdot L_2 \cdot \cos \theta_3] \cdot \vec{x}_0 + [L_1 \cdot \sin \theta_1 - 2 \cdot L_2 \cdot \sin \theta_3] \cdot \vec{y}_0$

Q3. Vérifier, à l'aide des figures 6 et 7, que le déplacement du point E est compatible avec les exigences « Amplitude déplacement » (id 1.2.1.1) et « Mouvement rectiligne » (id 1.2.1.2) sur l'intervalle $X_E \in [-60 \text{ mm}; 40 \text{ mm}]$.

- $X_{E_{max}} = 40 \text{ mm}$ et $X_{E_{min}} = -60 \text{ mm}$ (valeurs relevées)

donc $\Delta X_E = 100 \text{ mm} > 50 \text{ mm}$ donc l'exigence 1.2.1.1 est validée.

- $Y_{max} - Y_{min} = 0,25 \text{ mm} < 0,5 \text{ mm}$
- $\left. \begin{array}{l} \frac{dY_E}{dX_E} \Big|_{max} = 1,9\% < 2\% \end{array} \right\}$ l'exigence 1.2.1.2 est validée.

Q4. Proposer, à partir de la figure 8, une démarche permettant de vérifier l'exigence « Linéarité déplacement » (id 1.2.1.3) sur l'intervalle $X_E \in [-60 \text{ mm}; 40 \text{ mm}]$.

On pourrait faire une régression linéaire de $X_E = \text{fonct}^\circ(\theta_1)$

- si le coefficient de corrélation est supérieur à 0,99 alors l'exigence est vérifiée.
- sinon, l'exigence n'est pas respectée.

Q5. a. En isolant le solide S_2 , montrer que : $\vec{R}_{32} = X_{32} \vec{x}_2$

J'isole S_2 soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $S_0 \rightarrow S_2$
- $S_3 \rightarrow S_2$

Avec : $\{S_0 \rightarrow S_2\} = \begin{cases} \vec{R}_{S_0 \rightarrow S_2} = X_{02} \vec{x}_0 + Y_{02} \vec{y}_0 + Z_{02} \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{A, S_0 \rightarrow S_2} = L_{02} \vec{x}_0 + M_{02} \vec{y}_0 = \vec{0} \end{cases}$ m : car problème plan

De même : $\{S_3 \rightarrow S_2\} = \begin{cases} \vec{R}_{S_3 \rightarrow S_2} = X_{32} \vec{x}_2 + Y_{32} \vec{y}_2 \\ \vec{M}_{D, S_3 \rightarrow S_2} = \vec{0} \end{cases}$

S_2 n'est donc soumis qu'à deux glisseurs donc les résultantes de ces glisseurs seront dirigées par \vec{AD} donc par \vec{x}_2 donc :

$$\vec{R}_{S_3 \rightarrow S_2} = X_{32} \vec{x}_2$$

Q5. b. Déterminer une relation entre C_m , X_{23} et F en isolant l'ensemble $\{S_1, S_3\}$.

$\{S_1, S_3\}$ et soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $S_0 \rightarrow S_1$ X → J'écris donc le théorème des moments en B et en projection sur \vec{z}_0 :
- ext $\rightarrow S_1$ ✓
- $S_2 \rightarrow S_3$ ✓
- ext $\rightarrow S_3$ ✓

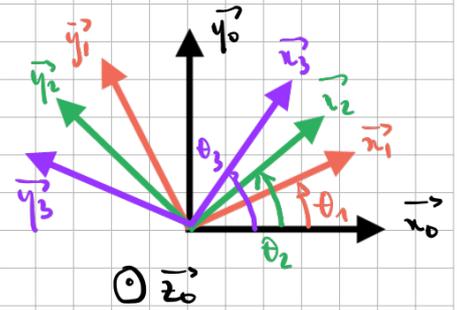
$$\underbrace{\vec{M}_{B, S_0 \rightarrow S_1} \cdot \vec{z}_0}_0 + \underbrace{\vec{M}_{B, \text{ext} \rightarrow S_1} \cdot \vec{z}_0}_{C_m} + \vec{M}_{B, S_2 \rightarrow S_3} \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}_{B, \text{ext} \rightarrow S_3} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\bullet \vec{M}_{B, S_2 \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 = \vec{M}_{D, S_2 \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 + (\vec{e}_0 \wedge (x_{23} \cdot \vec{x}_2)) \cdot \vec{e}_0$$

$$= [L_1 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_3)] \cdot x_{23}$$

$$\bullet \vec{M}_{B, ext \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 = \vec{M}_{E, ext \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 + (\vec{e}_0 \wedge (F \cdot \vec{x}_0)) \cdot \vec{e}_0$$

$$= [-L_1 \cdot \sin(\theta_1) + 2 \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_3)] \cdot F$$



Donc:

$$C_m + [-L_1 \cdot \sin \theta_1 + 2 \cdot L_2 \cdot \sin \theta_3] \cdot F + [L_1 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_3)] \cdot x_{23} = 0$$

Q5. c. Isoler le solide S_3 et montrer que : $C_m = \frac{FL_1}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} (\sin \theta_1 \sin(\theta_3 - \theta_2) + 2 \sin \theta_3 \sin(\theta_2 - \theta_1))$

S_3 est soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $S_2 \rightarrow S_3$ ✓
 - $S_1 \rightarrow S_3$ ✗
 - ext $\rightarrow S_3$ ✓
- j'écris le théorème des moments en C et en projection sur \vec{e}_0 .

$$\vec{M}_{C, S_2 \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 + \vec{M}_{C, S_1 \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 + \vec{M}_{C, ext \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 = 0$$

$$\bullet \vec{M}_{C, S_2 \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 = \vec{M}_{D, S_2 \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 + (\vec{e}_0 \wedge (x_{23} \cdot \vec{x}_2)) \cdot \vec{e}_0$$

$$= -L_2 \cdot x_{23} \cdot \sin(\theta_2 - \theta_3)$$

$$\bullet \vec{M}_{C, ext \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 = \vec{M}_{E, ext \rightarrow S_3} \cdot \vec{e}_0 + (\vec{e}_0 \wedge (F \cdot \vec{x}_0)) \cdot \vec{e}_0$$

$$= +2 \cdot L_2 \cdot F \cdot \sin \theta_3$$

$$x_{23} = \frac{2 \cdot \sin \theta_3}{\sin(\theta_2 - \theta_3)} \cdot F$$

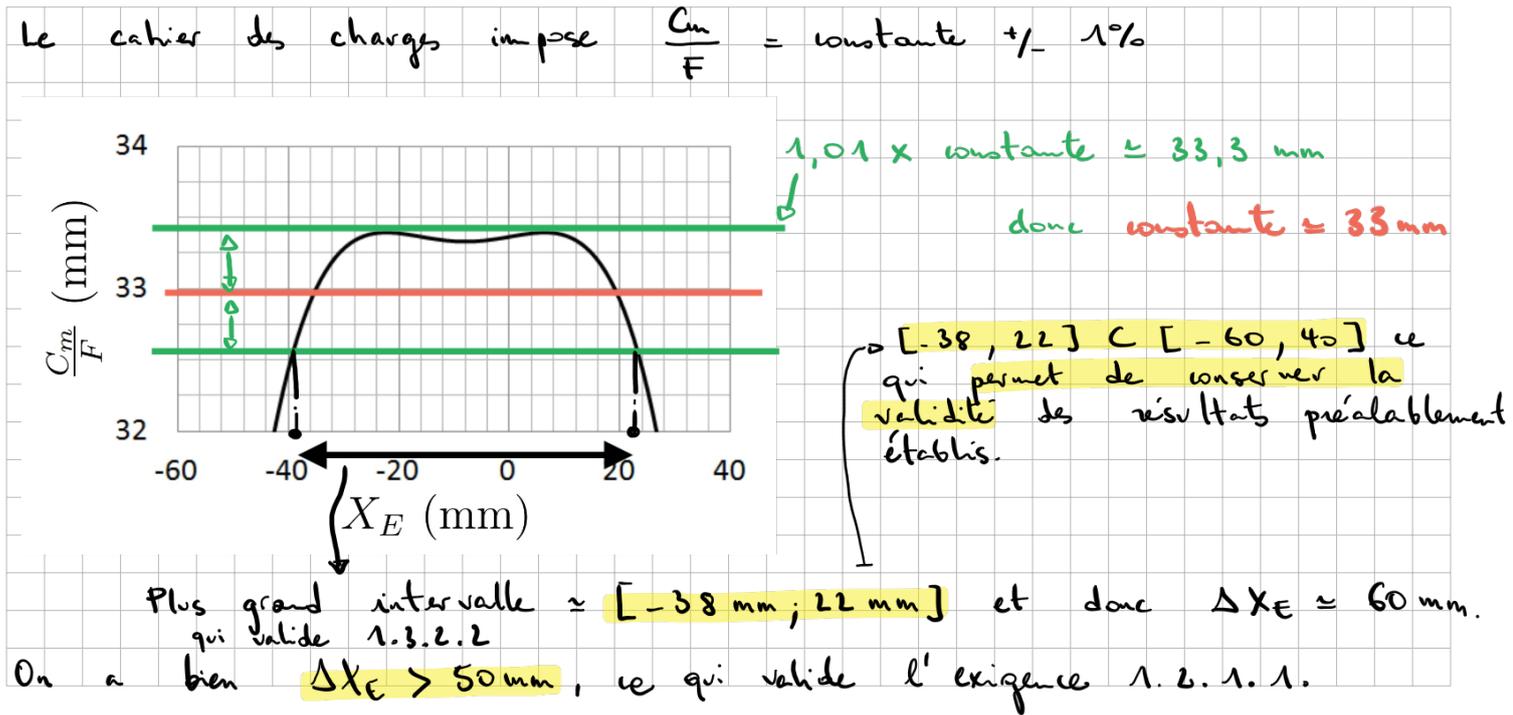
Donc : $C_m + [-L_1 \cdot \sin \theta_1 + 2 \cdot L_2 \cdot \sin \theta_3] \cdot F + [L_1 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_3)] \cdot \frac{2 \cdot \sin \theta_3}{\sin(\theta_2 - \theta_3)} \cdot F = 0$

s'annule

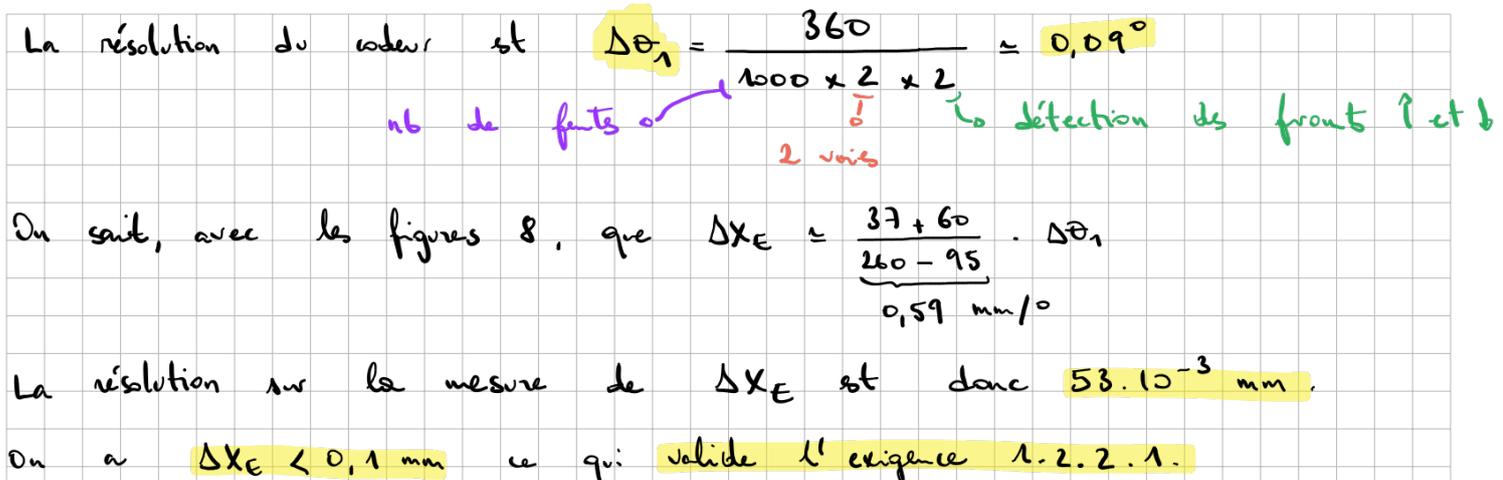
$$\text{Donc : } C_m = \left[L_1 \cdot \sin \theta_1 + L_1 \cdot \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot 2 \cdot \sin \theta_3}{\sin(-\theta_2 + \theta_3)} \right] \cdot F$$

$$\text{D'où : } C_m = \frac{F \cdot L_1}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \cdot (\sin \theta_1 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_2) + 2 \cdot \sin \theta_3 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1))$$

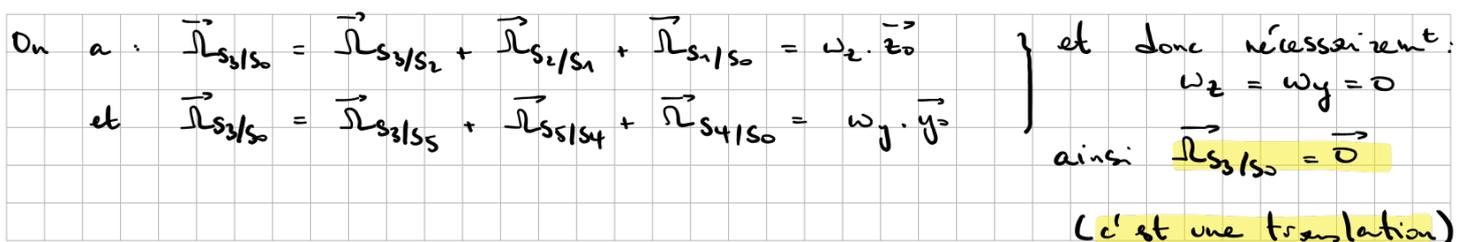
Q6. Déterminer, à partir de la figure 9, sur quel intervalle de l'abscisse X_E l'exigence « Linéarité couple/effort » (id 1.3.2.2) est satisfaite. Indiquer si cet intervalle est compatible avec les exigences précédemment vérifiées.



Q7. Sachant qu'une mesure est réalisée sur chaque front montant (passage de 0 à 1 d'une variable) et front descendant (passage de 1 à 0 d'une variable), déterminer la résolution du codeur. Vérifier la satisfaction de l'exigence « Résolution mesure consigne » (id : 1.2.2.1)



Q10. Montrer que le mouvement de S_3/S_0 ne peut être qu'une translation de direction \vec{x}_0 .



On a aussi : $\vec{J}_{CES_3/S_0} = \vec{J}_{CES_3/S_2} + \vec{J}_{CES_2/S_1} + \vec{J}_{CES_1/S_0} = \sqrt{x} \cdot \vec{x}_0 + \sqrt{y} \cdot \vec{y}_0$
 (compte-tenus des axes des pivots)

$$\vec{J}_{CES_3/S_0} = \vec{J}_{CES_3/S_5} + \vec{J}_{CES_5/S_4} + \vec{J}_{CES_4/S_0} = \sqrt{x} \cdot \vec{x}_0 + \sqrt{z} \cdot \vec{z}_0$$

Donc nécessairement : $\sqrt{y} = \sqrt{z} = 0$.

Il s'agit donc bien d'une translation de direction \vec{x}_0 .

Q12. En déduire l'équation différentielle liant les paramètres $C_m, \dot{x}_s, \ddot{x}_s, f_v, M_3, I_1$ et α .

On pose : $\vartheta_1 = \alpha \cdot x_s$ et donc $M_3 \cdot \ddot{x}_s + I_1 \cdot (\alpha \cdot \ddot{x}_s) = C_m \cdot \alpha - f_v \cdot \alpha^2 \cdot \ddot{x}_s$

Donc $(M_3 + \alpha^2 \cdot I_1) \cdot \ddot{x}_s = \alpha \cdot C_m - f_v \cdot \alpha^2 \cdot \ddot{x}_s$

Q13. Donner l'expression de la fonction de transfert et des grandeurs caractéristiques (avec applications numériques)

$$(M_3 + \alpha^2 \cdot I_1) \cdot p^2 \cdot X_s(p) = \alpha \cdot C_m(p) - f_v \cdot \alpha^2 \cdot p \cdot X_s(p)$$

Donc $H(p) = \frac{X_s(p)}{C_m(p)} = \frac{\alpha}{f_v \cdot \alpha^2 \cdot p + (M_3 + \alpha^2 \cdot I_1) \cdot p^2}$ $[\alpha \cdot f_v] = \checkmark^1 \cdot \text{N} \cdot \text{s}$

$$H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\frac{1}{\alpha \cdot f_v}}{1 + \frac{M_3 + \alpha^2 \cdot I_1}{\alpha^2 \cdot f_v} \cdot p}$$

$\frac{1}{\alpha \cdot f_v} \approx 20,8 \text{ N} \cdot \text{s}$

$\frac{M_3 + \alpha^2 \cdot I_1}{\alpha^2 \cdot f_v} \approx 0,1 \text{ s}$

Q14. En considérant uniquement la fin de la phase d'insertion, justifier le choix de modéliser l'effort de pénétration d'une aiguille dans un tissu par une fonction linéaire : $f_e(t) = k_e x_e(t) + \text{constante}$. Évaluer la valeur de k_e .

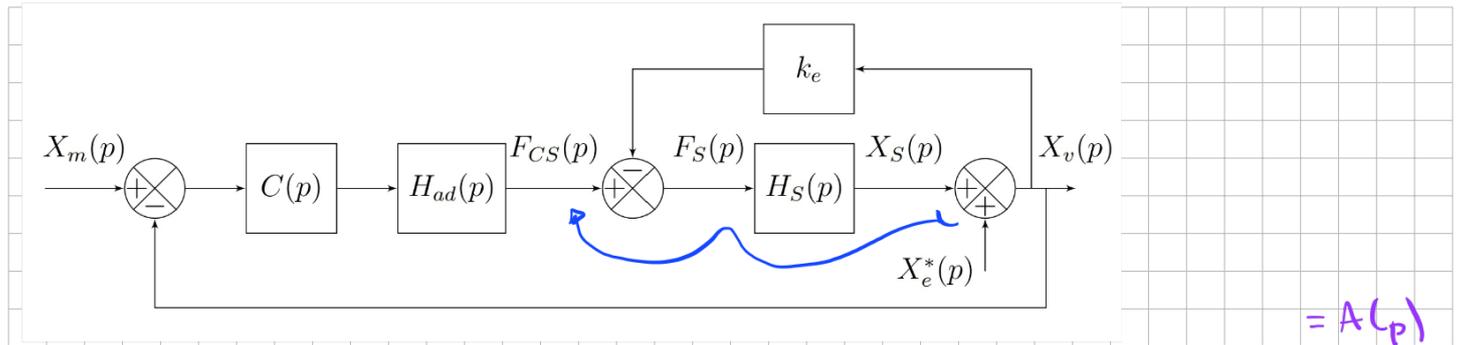
En fin de phase d'insertion : $f_e(t) \approx K_f \cdot t + \text{cste}_f$
 et $x_e(t) \approx K_x \cdot t + \text{cste}_x$

On a donc $f_e(t) \approx K_f \cdot \left(\frac{x_e(t) - \text{cste}_x}{K_x} \right) \approx k_e \cdot x_e(t) + \text{constante}$

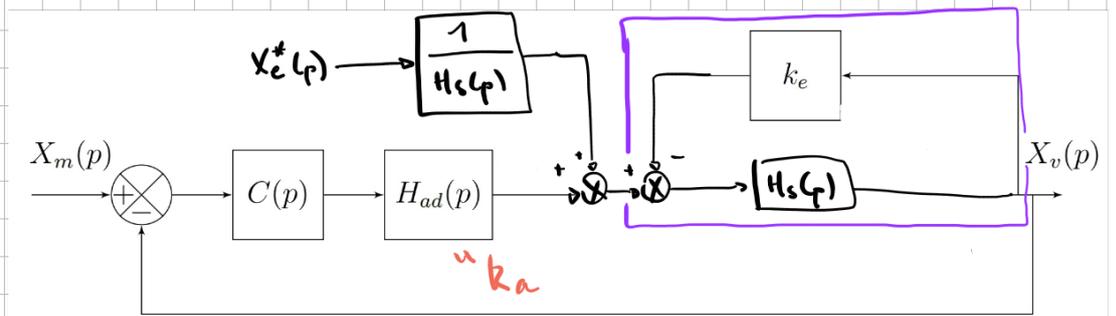
Je relève : $K_f \approx \frac{0,5 - 0,1}{1,9 - 1,4} \approx 0,8 \text{ N/s}$
 $K_x \approx \frac{0,13 - 0,22}{1,9 - 1,4} \cdot 10^{-1} \approx 0,016 \text{ m/s}$

$$\left. \begin{array}{l} K_f \approx 0,8 \text{ N/s} \\ K_x \approx 0,016 \text{ m/s} \end{array} \right\} k_e = \frac{K_f}{K_x} \approx 50 \text{ N/m}$$

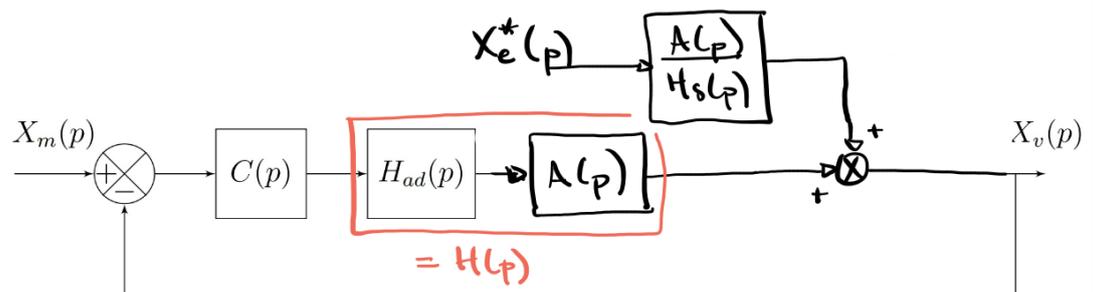
Q18. Simplifier le schéma bloc précédent pour lui donner la forme illustrée par la figure 20. Exprimer $H_t(p)$ et $H(p)$ en fonction de k_e ; k_a et $H_S(p)$.



ce qui donne :



Et $A(p) = \frac{H_S(p)}{1 + H_S(p) \cdot k_e}$



Avec : $H(p) = \frac{k_a \cdot H_S(p)}{1 + H_S(p) \cdot k_e}$

et $H_t(p) = \frac{1}{1 + H_S(p) \cdot k_e}$

Q19. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée (avec une perturbation nulle : $X_e^*(p) = 0$) : $F_{BF1}(p) = \frac{X_v(p)}{X_m(p)}$, puis la mettre sous forme canonique de façon à identifier les paramètres caractéristiques : gain statique (K), pulsation propre (ω_0) et coefficient d'amortissement (α). Faire l'application numérique.

$$\begin{aligned}
 F_{BF1}(p) &= \frac{X_v(p)}{X_m(p)} = \frac{\frac{1}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k_e}}{1 + \frac{1}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k_e}} \\
 &= \frac{1}{1 + k_e + b \cdot p + m \cdot p^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{1 + k_e}}{1 + \frac{b}{1 + k_e} \cdot p + \frac{m}{1 + k_e} \cdot p^2}
 \end{aligned}$$

J'identifie ensuite:

$$K = \frac{1}{1 + k_e} \approx 0,005$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + k_e}{m_s}} \approx 36,4 \text{ rd/s}$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_s}{\sqrt{m_s \cdot (1 + k_e)}} \approx 0,13$$

Q20. En vous aidant des abaques de la figure 21 page suivante, vérifier les exigences « stabilité » (uniquement l'amortissement), « rapidité » et « précision » (uniquement l'erreur statique).

• $z = 0,13$: il y aura donc des dépassements : exigence 1.1.1.1 **NON RESPECTÉE**

• $t_{réduit} \approx 20$ et donc $t_{rs0,6} \approx 0,55 \text{ s} > 0,1 \text{ s}$: exigence 1.1.2.1 **NON RESPECTÉE**

amplitude de l'échelon d'entrée

• Je sais que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_v(t) = K \cdot X_{mo} = X_{v\infty}$

$$\text{et } E_s = X_{mo} - X_{v\infty} = (1 - K) \cdot X_{mo} = 0,995 \cdot X_{mo}$$

On aura donc une erreur relative de 99,5% (!) : l'exigence 1.1.3.1 n'est donc **pas respectée**.

Q21. Montrer que ce type de correcteur permet de rendre le système asservi précis vis-à-vis de l'entrée si celle-ci est en échelon et insensible à une perturbation en échelon.

$$\text{On a maintenant : } X_v(p) = F_{BFZ}(p) \cdot X_m(p) + H_e(p) \cdot X_e^*(p)$$

$$\text{Où } H_e(p) = H_t(p) \cdot \frac{1}{C(p) \cdot H(p)} \cdot F_{BFZ}(p) \quad \text{et} \quad F_{BFZ}(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)}$$

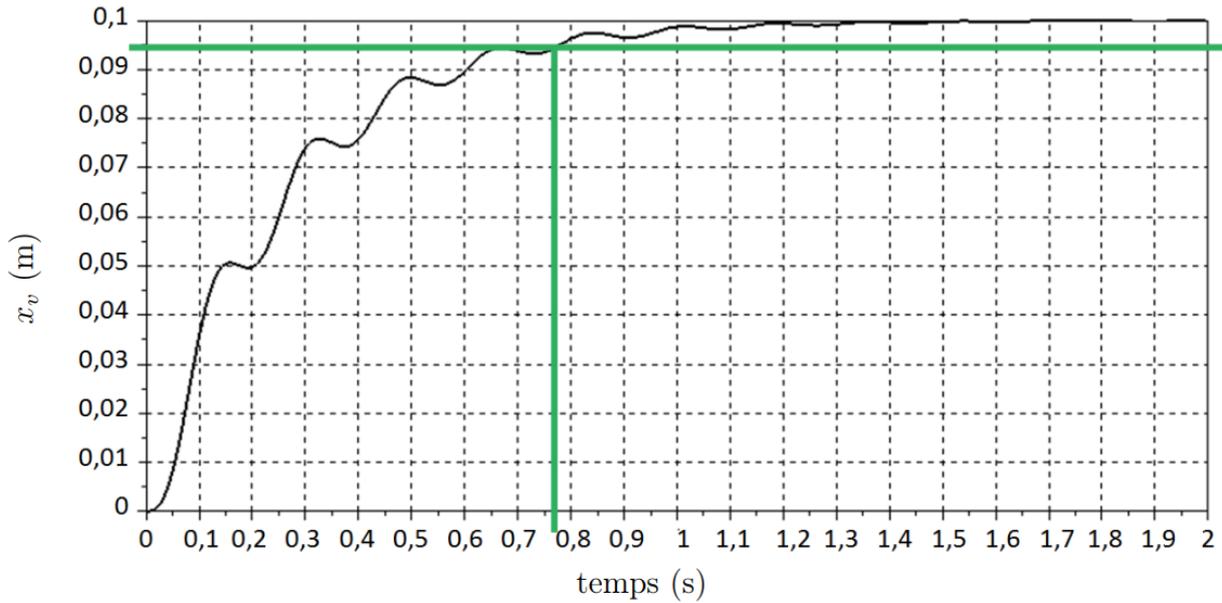
$$\text{On a donc : } \lim_{t \rightarrow +\infty} x_v(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot X_v(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot F_{BFZ}(p) \cdot \frac{X_{mo}}{p} + p \cdot H_e(p) \cdot \frac{X_{e0}}{p}$$

$$\text{Avec } C(p) \underset{p \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{k_i}{p} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{1}{k_e} \quad \text{donc} \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} F_{BFZ}(p) = 1$$

$$\text{Et } H_t(p) = \frac{1}{1 + H_s(p) \cdot k_e} \underset{p \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{1 + \frac{k_s \cdot k_e}{b_s \cdot p}} \underset{p \rightarrow 0^+}{\sim} p \cdot \frac{b_s}{k_s \cdot k_e} \quad \text{donc} \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} H_e(p) = 0$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_v(t) = X_{mo}$: l'erreur statique sera bien nulle.

Q23. En analysant la courbe réponse fournie ci-dessous, compléter le tableau associé puis conclure sur la capacité du correcteur à valider simultanément les exigences de « stabilité » et de « rapidité » (courbe obtenue avec $K_i = K_{imax}$).

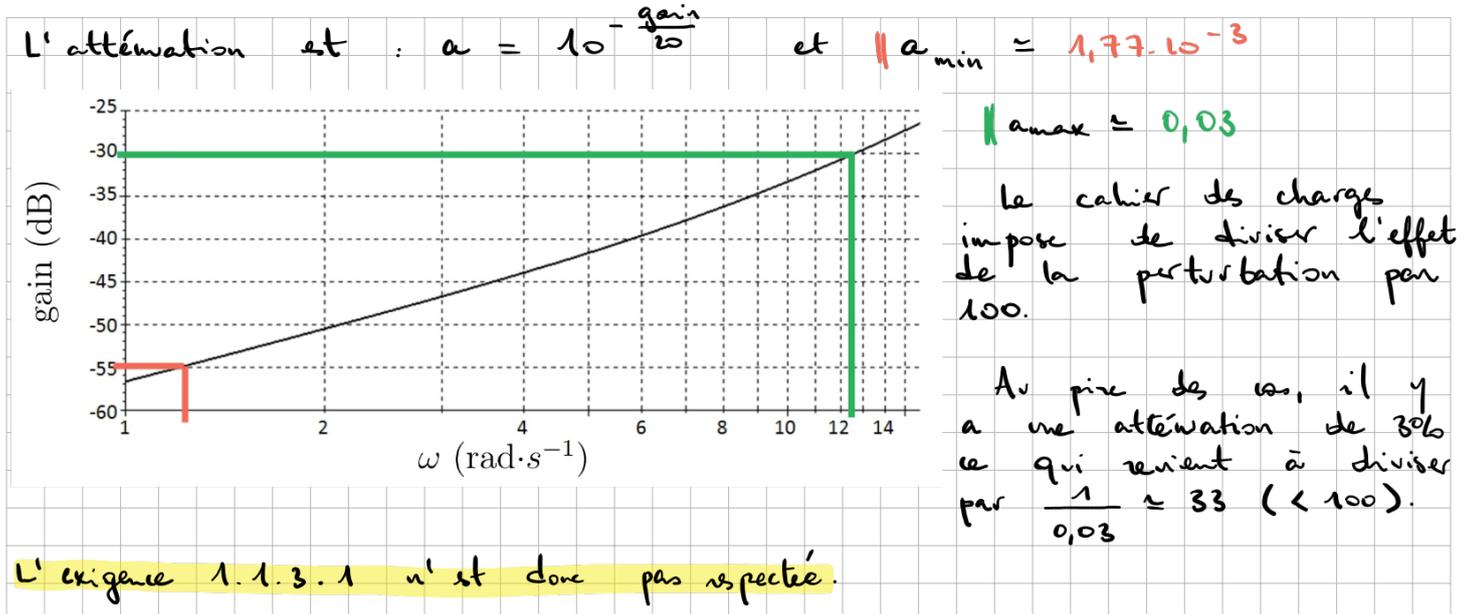


Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour un échelon de 10 cm.

Temps de réponse à 5%	0,76 s
Amplitude du premier dépassement	Non significatif
Erreur statique	NULLE

Même avec une valeur optimale de K_i , on ne respecte pas l'exigence 1.1.2.1 ($t_{r5\%} > 0,1$ s).

Q24. Le diagramme de Bode de la figure 22 représente la réponse fréquentielle (courbe de gain uniquement) de la fonction $F_{BF2}(j\omega) = \frac{X_v(j\omega)}{X_e^*(j\omega)}$ pour $K_i = K_{imax}$. Quelle sera l'atténuation minimale $|F_{BF2}(j\omega)|_{min}$ de la perturbation x_e^* (en %) sur l'intervalle [1,25 rad/s; 12,5 rad/s]. Conclure sur la validation de l'exigence de « précision ».



Q25. Indiquer s'il faut augmenter ou diminuer la valeur de T pour améliorer le temps de réponse consécutif à un échelon de consigne $x_m(t) = x_0$ (on prendra $Q(p) = 0$ pour cette question). Justifier votre réponse. En déduire la valeur limite de T permettant de satisfaire l'exigence de « rapidité ».

On a: $A(p) = \frac{1}{1 + 2 \cdot T \cdot p + T^2 \cdot p^2}$ donc $\omega_{0a} = \frac{1}{T}$
et $\zeta_a = 1$

Pour $\zeta_a = 1$, $t_{réglé} \approx 5$ et donc $t_{r50\%} \approx \frac{5}{\omega_{0a}} \approx 5 \cdot T$

Pour avoir le système le plus rapide, il faut donc T le plus faible possible.

Pour avoir $t_{r50\%} = 0,1 \text{ s}$, il faut $T \approx 0,02 \text{ s}$.

Q27. Les courbes du document réponse DR4 (page suivante) montrent la réponse mesurée sur la maquette et le résultat provenant du calcul sur le modèle obtenu. Conclure sur les écarts.

Ne rien écrire dans cette case.

