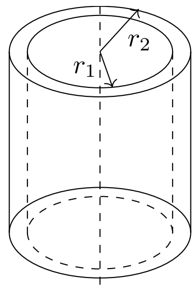
TD5 - Diffusion thermique

1 Chauffage d'un biberon au micro onde



On place un biberon rempli de lait dans un four à micro ondes. On donne les capacités thermiques massiques c_ℓ et c_v du lait et du verre. La puissance volumique fournie par le four est uniforme et notée $\mathscr{P}$ (le verre n'absorbe aucune fraction de cette puissance).

Q1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T_\ell(r,t)$, la température dans le lait.

Q2. Faire de même pour le verre, dont la température est notée $T_v(r,t)$.

Q3. Calculer la répartition de température $T_v(r)$ en régime permanent dans le biberon. On notera $T_v(r_1) = T_s$.

Q4. Quel conseil donner à un parent qui utilise le micro onde pour chauffer le biberon ?

2 Dissipateur de chaleur simplifié

Le performance des puces électroniques utilisées dans les ordinateurs décroît avec leur température. Afin de dissiper une puissance élevée en limitant la température du composant, on installe un dissipateur de chaleur, constitué d'ailettes de refroidissement en parallèle. On en étudie une.

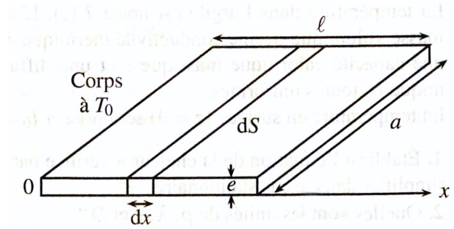
Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité thermique $\lambda = 200\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ est fixée en $x = 0$ à un corps dont la température est $T_0 = 70°\,\mathrm{C}$ constante. Elle baigne dans l'air ambiant de température $T_a = 20°\,\mathrm{C}$. Le corps à la température T_0 occupe le demi-espace $x < 0$. L'ailette est de forme parallélépipédique, d'épaisseur $e = 2\,\mathrm{mm}$, de largeur $a = 3\,\mathrm{cm}$ et de longueur $\ell = 2\,\mathrm{cm}$.

On émet les hypothèses suivantes :

- le régime étudié est stationnaire ;
- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x : elle sera donc notée $T(x)$;
- a est très grand devant e (cf. valeurs numériques) ;
- la puissance thermique cédée à l'air extérieur par la surface latérale $\mathrm{d}S$ d'un élément de longueur $\mathrm{d}x$ (échanges conducto-convectifs) est donnée par la loi de Newton :

$$\mathrm{d}P = h\,(T(x) - T_a)\,\mathrm{d}S \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}S = 2(a+e)\mathrm{d}x \simeq 2a\mathrm{d}x$$

où h est un coefficient constant : $h = 150$ USI.



Q1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ de l'ailette peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{T(x) - T_a}{L^2} = 0$$

où L est une longueur caractéristique à exprimer en fonction de λ, h et e.

Q2. Calculer la valeur numérique de L.

Q3. Justifier les deux conditions aux limites suivantes vérifiées par $T(x)$:

$$T(0) = T_0 \qquad \text{et} \qquad -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=\ell) = h\,(T(\ell) - T_a)$$

Q4. En déduire la loi $T(x)$ en fonction de x sous la forme :

$$T(x) = T_1 + T_2\left(ch\left(\frac{x}{L}\right) - f(\ell, L, \lambda, h)sh\left(\frac{x}{L}\right)\right)$$

où T_1 et T_2 dépendent de T_a et de T_0 et où f est une fonction de ℓ, L, λ et h à expliciter.

Rappel : l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}(x) - \dfrac{\theta}{L^2}(x) = 0$ *admet pour solution* $\theta(x) = \alpha ch\left(\dfrac{x}{L}\right) + \beta sh\left(\dfrac{x}{L}\right)$ *où* $ch(x)$ *et* $sh(x)$ *sont les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.*

Q5. Montrer que compte tenu de la longueur de l'ailette ($\ell = 2$ cm), la température de l'ailette est approximativement constante et égale à T_0 : on montrera que la valeur absolue de $\dfrac{T(\ell) - T_0}{T_0}$ est voisine de 2%.
On considère que la température de l'ailette est effectivement constante et égale à T_0.

Q6. Calculer l'expression de la puissance thermique P échangée entre l'ailette sur toute sa surface et l'air ambiant.

Q7. Déterminer la puissance thermique P' échangée entre le corps à la température T_0 et l'air ambiant par la surface d'aire $S' = ae$ en l'absence d'ailette, S' étant la surface de base de l'ailette en $x = 0$.

Q8. En déduire l'expression de l'efficacité $\eta = \dfrac{P}{P'}$. Calculer sa valeur.

3 Diffusion dans un mur

On considère un mur qui sépare une pièce à T_i de l'air extérieur à T_e. Le mur est constitué d'une épaisseur e_0 d'isolant en contact de la pièce, de conductivité thermique λ_0, et d'une épaisseur e_1 de pierre de conductivité λ_1 en contact avec l'extérieur. Les échanges thermiques entre le mur et l'air extérieur sont proportionnels à la surface S de l'interface et à la différence de température entre le mur et l'air. La température est continue entre la pièce et le mur.

La diffusion thermique est unidimensionnelle.

Q1. Rappeler sans démonstration l'équation de la diffusion thermique dans le mur en régime forcé continu.

Q2. Quelles sont les conditions aux limites en $x = 0$, $x = e_0$ et $x = e_0 + e_1 = L$? En déduire les relations qui permettent de déterminer complètement $T_0(x)$ et $T_1(x)$.

Q3. Donner l'équivalent électrocinétique du mur.

Q4. Calculer avec le circuit électrique équivalent les températures dans le mur en e_0 et $e_0 + e_1 = L$.

4 Igloo

Trois explorateurs sont enfermés dans un igloo, de forme hémisphérique, de rayon intérieur $R = 1,5$ m et d'épaisseur $e = 10$ cm. L'igloo est constitué de glace de conductivité thermique $\lambda = 2,0\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$. À l'extérieur, l'air est à la température constante $T_e = -5$ °C. À l'intérieur et à l'extérieur de l'igloo ont lieu des transferts conducto-convectifs, entre la glace et l'air, de constante $h = 5\,\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$. Chaque explorateur dégage la puissance $p = 100$ W. On supposera la situation stationnaire.

Q1. Définir et évaluer la résistance thermique de l'igloo.

Q2. Quelle est la température T_i à l'intérieur de l'igloo ?

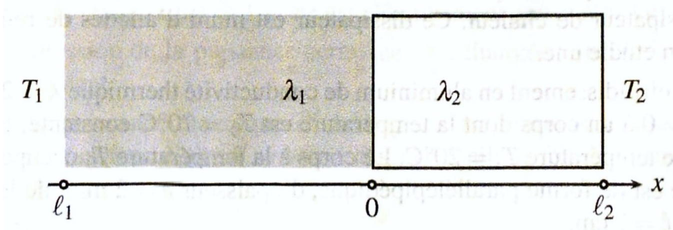
Q3. L'igloo fond-il ?

5 Sensation de chaud et de froid

Lorsqu'on touche deux objets à la même température, l'un en bois, l'autre en métal, celui en métal semble plus froid que celui en bois, malgré leurs températures identiques. L' objet de ce problème est d'étudier ce phénomène.

A - RÉGIME STATIONNAIRE

On étudie la conduction thermique suivant $\vec{u_x}$, entre deux solides 1 et 2, de même section S, portés aux températures extrémales T_1 et T_2 :



Q1. Établir le champ de température $T(x)$, $x \in [\ell_1, \ell_2]$.

Q2. Établir la valeur de la température T_0 de la jonction, en fonction de T_1 et T_2.

Q3. Calculer numériquement T_0 pour un contact 1/2 métal/peau puis bois/peau (on prendra $|\ell_1| \simeq \ell_2$) où $T_1 = 20°$ C, $T_2 = 37°$ C et :

milieu	métal	corps humain	bois
λ ($\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$)	350	$6,0.10^{-1}$	$7,5.10^{-1}$

Conclure quant à la sensation de froid.

B - RÉGIME VARIABLE

Les solides sont maintenant d'extension infinie, 1 va de $-\infty$ à 0 et 2 de 0 à $+\infty$. Le contact est encore en $x = 0$. Les solides sont initialement aux températures uniformes T_1 et T_2.

Q4. Rappeler l'équation de la diffusion thermique.

Q5. On note D est le coefficient de diffusivité thermique. Montrer que la fonction

$$f(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-u^2} \mathrm{d}u$$

est solution de l'équation précédente.

On cherche une solution en $T_1(x,t) = a_1 + b_1 f(x,t)$, de même pour 2. On précise :

$$f(0,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x,t) = \pm 1$$

Q6. Sur quelle distance, en ordre de grandeur, la diffusion thermique a-t-elle modifiée la répartition de température au bout d'une durée τ ? On répondra en fonction de D.

Que valent alors les expressions suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} T_1(x,t) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} T_2(x,t)$$

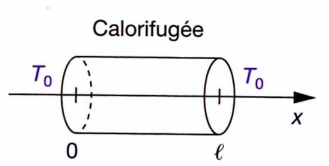
Q7. Établir 4 équations portant sur a_1, a_2, b_1, et b_2.

Q8. Établir l'expression de la température de jonction T_0, en fonction de T_1, T_2, $E_l = \sqrt{\rho_1 c_1 \lambda_1}$ et $E_2 = \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}$.
Application numérique : Pour un contact 1/2 métal/peau puis bois/peau, avec : $E_{métal} = 14.10^3$ USI, $E_{peau} = 1,8.10^3$ USI et $E_{bois} = 0,4.10^3$ USI

Q9. Quel modèle vous paraît le plus adapté pour répondre à la question posée en introduction ? Celui du A ou du B ?

6 Thermalisation d'une barre

Une barre de longueur ℓ et de section S est calorifugée latéralement (figure ci-contre). On note $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ le coefficient de diffusion, λ étant la conductivité thermique, μ la masse volumique et c la capacité calorifique massique de la barre.



Initialement, la température de la barre est $T_{i,n}(x) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$. Les deux extrémités de la barre sont alors placées en contact avec un thermostat à la température T_0. On cherche à déterminer l'évolution de la température de la barre au cours du temps.

Q1. Que dire de la température de la barre pour des temps très longs ?

Q2. Établir une équation aux dérivées partielles satisfaite par la température.

Q3. La résoudre sous la forme $T(x,t) = A + f(x)g(t)$ (solution à variables séparées). Trouver sans ambiguïté les formes de f et g.

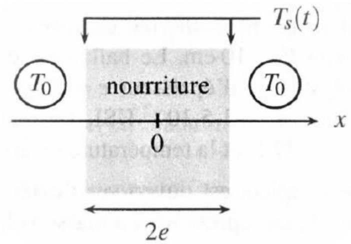
Q4. Conclure sachant que la température initiale est $T_{i,n}(x)$.

Q5. Faire apparaître un temps typique d'évolution et commenter le résultat. On vérifiera l'homogénéité de ce temps.

Q6. *Question hors-programme, à ne pas traiter en priorité* Désormais, la température initiale est une fonction quelconque $T_i(x)$ vérifiant seulement $T_i(0) = T_i(e) = T_0$. Trouver $T(x,t)$ à l'aide des séries de Fourier. On pourra faire apparaître la série de Fourier d'une fonction impaire, de période $2e$, et identique à T_i sur $[0, \ell]$.

7 Four à micro-ondes (*)

De la nourriture, de coefficient de diffusion λ, de capacité thermique massique c_v et de masse volumique ρ est placée dans le four. La nourriture est parallélépipédique, d'aire S et d'épaisseur $2e$, suffisamment faible pour qu'on puisse admettre que le problème reste unidimensionnel. Le champ électrique du four est le même en tout point : le chauffage de la nourriture est uniforme en volume. On note P la puissance totale fournie à toute la nourriture.



La température du milieu extérieur, T_0 est constante. La température d'interface est notée $T_s(t) = T(-e,t) = T(e,t)$. Les échanges thermiques au niveau des interfaces sont modélisés par la loi de Newton. La puissance sortant latéralement de la nourriture fait intervenir le coefficient d'échange g :

$$\phi_s = gS(T_s(t) - T_0)$$

Q1. Établir l'équation aux dérivées partielles relative à $T(x,t)$ dans la nourriture. Déterminer les expressions des vecteurs densité de flux thermique $\vec{j}_{th}(-e,t)$ et $\vec{j}_{th}(e,t)$, en fonction de g, $T_s(t)$ et T_0.

Q2. Déterminer l'expression et tracer l'allure de $T_p(x)$, profil de température en régime permanent, en fonction de $T_p(e)$, x et des paramètres pertinents du modèle.
Établir les relations :

$$T_p(0) = T_0 + \frac{P}{2Sg}\left(1 + \frac{ge}{2\lambda}\right) \text{soit} T_p(0) = T_p(e) + \frac{Pe}{4S\lambda}$$

Q3. La température initiale est T_0, en tout point de la nourriture. On cherche les conditions sous lesquelles l'équation aux dérivées partielles établie en **Q1.** admet une solution de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + (T_p(x) - T_0).(1 - f(t))$$

Déterminer a priori $f(0)$ et $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

Q4. Montrer qu'une telle solution est possible et acceptable si $ge \ll 2\lambda$. Quelle est la constante de temps τ_s de la fonction f ainsi trouvée ?

*Indication : la forme donnée dans la question **Q3.**, insérée dans l'équation aux dérivées partielles de la question **Q1.**, conduit pour f à l'équation différentielle $f'(t)+\phi(x)f(t) = 0$, qui n'a physiquement de sens que si $\phi(x)$ est une constante.*

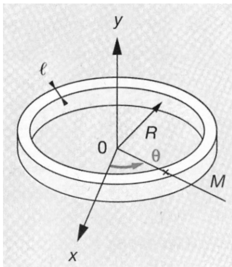
Q5. Valider l'hypothèse précédente et calculer τ_s et $T_p(0)$ pour :

$\rho c = 4.10^6\,\mathrm{J.K^{-1}.m^{-3}}$	$T_0 = 293\,\mathrm{K}$	$S = 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$	$g = 10\,\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$
$\lambda = 0.5\,\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$	$P = 500\,\mathrm{W}$	$e = 5.10^{-3}\,\mathrm{m}$	

Q6. Calculer numériquement la date τ_e d'apparition des bulles de vapeur d'eau dans la nourriture. Conclure.

8 Expérience de Joseph Fourier (1806)(*)

Un anneau en fer de rayon moyen R et de section carrée de côté $\ell \ll R$ est enfoui dans le sable, considéré comme un isolant thermique parfait. On repère un point quelconque de l'anneau par un angle θ, dont on considère le domaine de définition égal à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (figure ci-contre).



Q1. À l'instant initial, le profil de température $T_0(\theta)$ dans l'anneau est non uniforme, soit T_m sa valeur moyenne. Pour des raisons de symétrie du dispositif ayant créé ce profil initial, $T_0(\theta)$ est une fonction paire de θ.

a. Établir l'équation de la chaleur régissant l'évolution de $T(\theta, t)$.

b. On cherche des solutions de la forme $T(\theta, t) = T_m + f(\theta)g(t)$. Justifier l'observation faite par Fourier : « Les écarts de température avec la valeur moyenne T_m deviennent rapidement proportionnels au cosinus de l'angle θ».

c. Quel est l'ordre de grandeur du temps au bout duquel cette observation est valable ?

On donne $\mu = 7,86.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, $c = 460\,\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$, $\lambda = 81\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$, $\ell = 3,3\,\mathrm{cm}$ et $R = 16\,\mathrm{cm}$.

Q2. La méthode permettant de créer l'inhomogénéité thermique initiale consiste en un échauffement de la section de l'anneau au voisinage de la position correspondant à $\theta = 0$. Pendant cette phase de l'expérience, l'anneau est placé dans l'air (température T_a) si bien qu'un échange thermique conducto-convectif de coefficient de transfert h intervient. Après deux heures de chauffage, FOURIER étudie le profil de température stationnaire obtenu : $T_0(\theta)$. Pour ce faire, trois thermomètres sont disposés en des points repérés par les angles θ_i ($i = 1$, 2 ou 3) avec $0 < \theta_i < \pi$ et $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta = \theta_3 - \Delta\theta$. On pose $\Delta T_i = T_0(\theta_i) - T_a$ ·

a. En notant $T_0(0)$ la température du point de chauffage, déterminer l'expression de $T_0(\theta)$. Mettre en évidence une longueur caractéristique L_{th} fonction de λ, ℓ et h.

b. FOURIER remarqua que le rapport $C = \dfrac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2}$ est indépendant de la valeur de la température $T_0(0)$ au point de chauffage et de la valeur de θ_2. Est-ce prévisible théoriquement ?

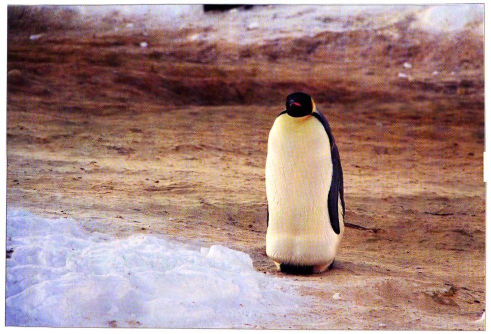
c. Avec la valeur numérique $h = 10\,\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$ et $\Delta\theta = \dfrac{\pi}{4}$, quelle valeur numérique prévoit-on d'obtenir pour C ? Expérimentalement, les valeurs en °C mesurées au tiers de degré près ont donné :

$$\Delta T_1 = (48 + 1/3)°C, \quad \Delta T_2 = 33°C, \quad \text{et} \quad \Delta T_3 = (26 + 1/3)°C$$

Commenter.

9 Résolution de problème : le manchot empereur

Le manchot empereur vit dans un environnement très froid. La température de l'air et du sol est en moyenne de -20°C, largement inférieure à la température corporelle de 39°C des manchots. Les manchots doivent donc s'adapter pour limiter les pertes de chaleur. La grande majorité de l'isolation des manchots est assurée par leur plumage, le reste par une couche de graisse. Les plumes couvrent l'ensemble de leur corps avec 15 plumes par cm^2, les manchots empereurs ont le plumage le plus dense de tous les oiseaux. L'épaisseur totale du plumage approche 2 cm. Le mâle et la femelle ont un plumage similaire et sont de même taille, de l'ordre de 1 m. Le manchot maintient sa température corporelle grâce à son métabolisme qui peut lui fournir 100 W.



Source : Didier Lacoste – http://alenversdelaterre.e-monsite.com/

Pour lutter contre le froid, les manchots adoptent un comportement social thermorégulateur afin de préserver au maximum leurs réserves : ils se regroupent et se tiennent collés, les uns contre les autres, en forme de «tortue».

Source : Didier Lacoste – http://alenversdelaterre.e-monsite.com/

Q1. Déterminer une valeur de la conductivité thermique λ du plumage d'un manchot.

Q2. On considère une cohorte de 9 manchots serrés les uns contre les autres formant un carré de 3 individus de côté. Déterminer la diminution (en pourcentage) du métabolisme d'un manchot appartenant à ce groupe par rapport au cas du manchot seul.

Q3. Dans le cas d'un plus grand nombre de manchots formant une "tortue", y a-t-il une limite à l'économie réalisée ?

Aides pour les exercices

Exercice 1

Q1. $\dfrac{\partial T_\ell}{\partial t} = \dfrac{\lambda_\ell}{\rho_\ell c_\ell}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T_\ell}{\partial r}\right) + \dfrac{\mathscr{P}}{\rho_\ell c_\ell}$

Q2. $\dfrac{\partial T_v}{\partial t} = \dfrac{\lambda_v}{\rho_v c_v}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T_v}{\partial r}\right)$

Q3. $T_v(r) = T_s + \dfrac{\mathscr{P}}{2\lambda_v} r_1^2 \ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$

Exercice 2

Q1. $L = \sqrt{\dfrac{e^l ambda}{2h}}$

Q2. $L \simeq 3.7\,\text{cm}$

Q6. $P = 2ahL\left(\alpha \sinh\left(\dfrac{\ell}{L}\right) + \beta \cosh\left(\dfrac{\ell}{L}\right)\right)$

Q7. $P' = h(T_0 - T_a)ae \simeq 0.45\,\text{W}$

Q8. $\eta = 20.$

Exercice 3

Q2. $T_k = A_k x + B_k$ avec $k = 0$ ou 1. On a : $B_0 = T_i$; $B_0 + A_0 e_0 = B_1 + A_1 e_0$; $\lambda_0 A_0 = \lambda_1 A_1$; $A_1 = -\dfrac{h}{\lambda_1}(T_L - T_e)$ avec $T_L = A_1 L + B_1$.

Q4. $T_0 = T_i - \dfrac{R_{th,0}}{R_{th,0} + R_{th,1} + R_{th,e}}(T_i - T_e)$ et $T_L = T_e + \dfrac{R_{th,e}}{R_{th,0} + R_{th,1} + R_{th,e}}(T_i - T_e)$

Exercice 4

Q1. $R_{th,i} = \dfrac{e}{2\pi\lambda R(R+e)} \simeq 3.3 \times 10^{-3}\,\text{K}\,\text{W}^{-1}$

Q2. $T_i = 277\,\text{K}$

Q3. Température de surface de la glace à l'intérieur de l'igloo : $T_{g,i} = T_i - \dfrac{\Phi}{2\pi R^2 h}$

Exercice 5

Q1. Penser à distinguer les champs de température des milieux 1 et 2, notés respectivement $T_1(x)$ et $T_2(x)$.

Q2. $T_0 = \dfrac{\lambda_1 \ell_2 T_1 - \ell_1 \lambda_2 T_2}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1}$

Q3. $T_0 \simeq 20\,°\text{C}$ pour un contact métal/peau ; $T_0 \simeq 28\,°\text{C}$ pour un contact bois/peau.

Q6. $L = \sqrt{D\tau}$

Q7. $a_1 - b_1 = T_1$; $a_2 + b_2 = T_2$; $a_1 = a_2 = T_0$; $E_1 b_1 = E_2 b_2$

Q8. $T_0 \simeq 22\,°\text{C}$ pour un contact métal/peau ; $T_0 \simeq 34\,°\text{C}$ pour un contact bois/peau.

Exercice 6

Q5. $\tau_n = \dfrac{\ell^2}{(n\pi)^2 D}$

Q6. $T(x,t) = T_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{2n} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 D}{\ell^2} t\right)$

Exercice 7

Q2. $T_P(x) = \dfrac{P}{4eS\lambda}(e^2 - x^2) + T_p(e)$

Q3. $f(0) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$

Q4. $\tau_s = \dfrac{e\rho c}{g}$

Q5. $\tau_s \simeq$ 33 minutes, $T_p(0) \simeq 2793\,\text{K}$.

Q6. $\tau_e \simeq$ 87 s.

Exercice 8

Q1. $\tau = \dfrac{\mu c}{\lambda} R^2 \simeq 1.14 \times 10^3\,\text{s}$ soit environ 19 minutes.

Q2. a - $L_{th} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda\ell}{h}}$; b - $C = 2\cosh\left(\dfrac{R}{L_{th}}\Delta\theta\right)$; c - $C \simeq 2.24$, à comparer à $C_{exp} \simeq 2.26$