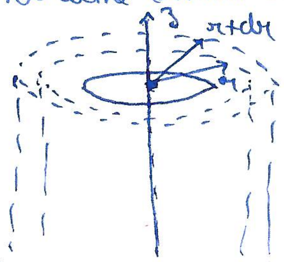
Chauffage d'un biberon au four à micro-ondes

Q1- Le biberon est cylindrique, et supposé suffisamment haut pour négliger les effets de bord liés aux extrémités du biberon.

- Répartition de la température dans le lait : $T_\ell(r,t)$:

Le lait est chauffé uniformément par les micro-ondes. Un bilan d'énergie appliqué à un volume élémentaire $d\tau$ de lait donne : (1) $dU = \delta Q = \phi(r,t)\,dt + \phi(r+dr,t)\,dt + \mathcal{P}\,d\tau\,dt$ pendant l'intervalle de temps dt, pour un volume élémentaire $d\tau$ de lait.



Or :

$$dU = U(r,t+dt) - U(r,t) = \rho . c_\ell \frac{\partial T}{\partial t} d\tau\, dt.$$

avec $dU = C\, dT$ pour une phase condensée,

et $U = \rho . d\tau . u$ (ρ : masse volumique du système).

Ainsi : (1) $\Rightarrow$

$$\rho_\ell c_\ell . \frac{\partial T_\ell}{\partial t} = \mathcal{P} + \lambda_\ell . \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_\ell}{\partial r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial T_\ell}{\partial t} = \frac{\lambda_\ell}{\rho_\ell c_\ell} . \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_\ell}{\partial r}\right) + \frac{\mathcal{P}}{\rho_\ell c_\ell}} \quad (2)$$

avec λ_ℓ : conductivité thermique du lait,

ρ_ℓ : masse volumique du lait.

- Le verre n'absorbe pas d'énergie électromagnétique portée par les micro-ondes. Un élément $d\tau$ du verre est donc soumis à un gradient de température entre le lait de température $T_\ell(r_1,t)$, et l'extérieur du biberon de température T_e.

On retrouve donc le cas de cours d'un système constitué d'une portion de milieu (verre) compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons r_1 et r_2.

Les bilans temporel et spatial donnent ainsi l'équation de la diffusion pour la température du verre, notée $T_v(r,t)$:

$$\boxed{\frac{\partial T_v(r,t)}{\partial t} = \frac{\lambda_v}{\rho_v c_v} . \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_v}{\partial r}\right)} \quad (3)$$

Q2- En régime permanent, l'équation (3) devient :

$$\frac{1}{r} . \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT_v}{dr}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad r . \frac{dT_v}{dr} = A \qquad A : \text{constante réelle}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{T_v(r) = A \ln(r) + B} \qquad B : \text{constante réelle}$$

Par ailleurs, l'équation (2) donne :

$$+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT_l}{dr}\right) = -\frac{\mathcal{P}}{\lambda_l}.$$

$$\Rightarrow \quad T_l(r) = -\frac{\mathcal{P}}{4\lambda_l}r^2 + C\ln(r) + D \text{ pour } r \in [0, r_1]$$

avec C et D des constantes réelles.

La température ne peut cependant pas diverger pour $r=0$, donc :

$$\boxed{C = 0}$$

Ainsi :

$$T_l(r) = -\frac{\mathcal{P}}{4\lambda_l}r^2 + D.$$

- Selon la conservation du flux thermique en $r = r_1$:

$$\begin{cases} \Phi_l(r_1) = -\lambda_l \dfrac{dT_l}{dr}(r=r_1) \times S = \dfrac{\mathcal{P}}{2} r_1 \cdot S. \\ \Phi_v(r_1) = -\lambda_v \cdot \dfrac{dT_v}{dr}(r=r_1) \times S = -\lambda_v \cdot \dfrac{A}{r_1} \cdot S \end{cases}$$

avec S la surface latérale de contact entre le lait et le verre.

Donc :

$$\Phi_l(r_1) = \Phi_v(r_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathcal{P}}{2}r_1 = -\lambda_v \frac{A}{r_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A = -\frac{\mathcal{P}}{2\lambda_v}r_1^2.}$$

<u>Ainsi</u> :

$$T_v(r) = -\frac{\mathcal{P}}{2\lambda_v}r_1^2 \ln(r) + B.$$

Par ailleurs : $T_v(r_1) = T_s$, donc :

$$\boxed{B = T_s + \frac{\mathcal{P}}{2\lambda_v}r_1^2 \ln(r_1)}.$$

Finalement, la température dans le biberon est, en régime permanent :

$$\boxed{T_v(r) = T_s + \frac{\mathcal{P}}{2\lambda_v}r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right).}$$

Q3- Pour $r = r_2$:

$$T_v(r_2) = T_s + \frac{\mathcal{P}}{2\lambda_v}r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{T_v(r_2) < T_s} \quad \text{car } r_2 > r_1.$$

Ainsi la température du verre sur la surface extérieure du biberon est inférieure à celle de la surface intérieure donc inférieure à celle du lait. Il faut toujours vérifier la température du lait avant de le donner au bébé (soit en goûtant, soit en appliquant sur sa propre peau) et ne pas se fier à la température perçue en saisissant le biberon !

Dis ①

Dissipateur de chaleur simplifié

1- La loi de Fourier donne la relation entre le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$ et le gradient de la température dans un système donné :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T.$$

avec λ : conductivité thermique.

2- Cette loi permet de décrire le phénomène de diffusion thermique : un flux thermique partant d'une portion du système de température élevée et se dirigeant vers les températures les plus faibles s'observant dans un milieu soumis à une différence de T°C.

3- h s'exprime en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.

4- En régime stationnaire, l'équation de diffusion à une dimension s'écrit :

$$\frac{\lambda}{\rho c_v}\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{P_v}{\rho c_v} = 0 \Rightarrow \lambda \frac{d^2T(x)}{dx^2} + P_v = 0.$$

où P_v est un terme de puissance volumique de source.

Or, ici, le terme P_v fait référence à la puissance perdue par flux conducto-convectif autour de l'ailette :

$$dP = h\,(T(x) - T_a)\,dS = 2ha\,(T(x) - T_a)\,dx.$$

Ainsi :

$$\frac{dP}{2a\,dx} = h\,(T(x) - T_a).$$

et $P_v = -\dfrac{dP}{a\times e\,dx}$ avec $ae\,dx = d\tau$, volume élémentaire de l'ailette dont la surface subit le flux.

(puissance volumique cédée perdue)

Ainsi :

$$P_v = -\frac{2h}{e}(T(x) - T_a).$$

D'où :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{e\lambda}(T(x) - T_a) = 0.$$

On pose : $\dfrac{e\lambda}{2h} = L^2 \Leftrightarrow L = \sqrt{\dfrac{e\lambda}{2h}} \Rightarrow L \approx 3{,}7\ cm$

$$\boxed{\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{T(x) - T_a}{L^2} = 0}$$

Autre méthode :

. 1er principe appliqué à la tranche d'épaisseur dx entre t et t+dt

$$dU = U(t+dt) - U(t) = 0 \text{ en régime permanent}$$

. La tranche reçoit algébriquement, à l'instant t :

$$dU = \delta Q = [j_{th}(x)\times ea - j_{th}(x+dx)ea - dP]\,dt$$

D'où :

$$-\frac{dj_{th}}{dx}ea\,dx - dP = 0$$

et, avec la loi de Fourier : $j_{th} = -\lambda \dfrac{dT(x)}{dx}$, il vient :

$$\lambda \frac{d^2T(x)}{dx^2}ea\,dx - dP = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \frac{d^2T(x)}{dx^2}ea\,dx - h\,(T(x) - T_a)\cdot 2a\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda e}(T(x) - T_a) = 0.$$

Diss (2)

5- $L = \sqrt{\dfrac{e\lambda}{2h}}$; A.N. : $L \simeq 3{,}7 \times 10^{-2}\,m = 3{,}7\,cm$.

6- Les deux conditions aux limites sont données pour $x = 0$ et $x = \ell$; selon la continuité du flux thermique :

$$\begin{cases} j_{th}(x=0^-) = j_{th}(x=0^+) \\ j_{th}(x=\ell^-)_{cd} = j_{pertes}(x=\ell^+)_{cc} \end{cases}$$

Or : $j_{th}(x) = -\lambda \dfrac{dT(x)}{dx}$ selon la loi de Fourier.

et de plus :

- $j_{th}(x=0^-) = 0$ (présence d'un thermostat à T_0, donc flux nul à l'intérieur).

$$\Rightarrow \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{x=0^+} = 0.$$

d'où $T(x=0) = \text{constante} = T_0$.

* Par ailleurs : $\begin{cases} j_{th}(x=\ell^-) = -\lambda \dfrac{dT(x=\ell)}{dx} \\ j_{pertes}(x=\ell^+) = h\,(T(\ell) - T_a). \end{cases}$

D'où : $-\lambda \dfrac{dT(x=\ell)}{dx} = h\,(T(\ell) - T_a)$

7- $T(x) = ?$

On a : $\dfrac{d^2T(x)}{dx^2} - \dfrac{T(x) - T_a}{L^2} = 0$.

On pose : $\Theta(x) = T(x) - T_a$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} = \frac{d^2T(x)}{dx^2}$$

et : $\dfrac{d^2\Theta(x)}{dx^2} - \dfrac{\Theta(x)}{L^2} = 0$.

Cette équation admet pour solution :

$$\Theta(x) = T(x) - T_a = \alpha\, ch\left(\frac{x}{L}\right) + \beta\, sh\left(\frac{x}{L}\right)$$

avec α et β : ctes réelles.

$ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Or : • $T(0) = T_0$

$$\Rightarrow T_0 - T_a = \alpha\, ch(0) + \beta\, \underbrace{sh(0)}_{\to 0} = \alpha$$

D'où $\boxed{\alpha = T_0 - T_a}$

• $-\lambda \dfrac{dT(x=\ell)}{dx} = h\,(T(\ell) - T_a)$; or :

$$\frac{dT(x)}{dx} = \alpha \times \frac{1}{L} sh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\beta}{L} ch\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx}(x=\ell) = \frac{\alpha}{L} sh\left(\frac{\ell}{L}\right) + \frac{\beta}{L} ch\left(\frac{\ell}{L}\right)$$

et :

$$\begin{cases} -\lambda \dfrac{\alpha}{L} sh\left(\dfrac{\ell}{L}\right) - \lambda \dfrac{\beta}{L} ch\left(\dfrac{\ell}{L}\right) = h\,(T(\ell) - T_a) \\ T(\ell) = \alpha\, ch\left(\dfrac{\ell}{L}\right) + \beta\, sh\left(\dfrac{\ell}{L}\right) + T_a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow h\,(T(\ell) - T_a) = h\alpha\, ch\left(\frac{\ell}{L}\right) + h\beta\, sh\left(\frac{\ell}{L}\right)$$

(Donc : $\left(-\dfrac{\lambda\alpha}{L} - h\beta\right) sh\left(\dfrac{\ell}{L}\right) - \left(\dfrac{\lambda\beta}{L} + h\alpha\right) ch\left(\dfrac{\ell}{L}\right) = 0$.)

$$\Leftrightarrow \left[-h\, sh\left(\frac{\ell}{L}\right) - \frac{\lambda}{L} ch\left(\frac{\ell}{L}\right)\right] \times \beta = +\alpha \left(h\, ch\left(\frac{\ell}{L}\right) + \frac{\lambda}{L} sh\left(\frac{\ell}{L}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \beta = -\alpha\, \frac{h\, ch(\ell/L) + \frac{\lambda}{L} sh\left(\frac{\ell}{L}\right)}{h\, sh(\ell/L) + \lambda/L\, ch(\ell/L)}$$

Diss 3

d'où : $\begin{cases} \alpha = T_0 - T_a \\ \beta = -(T_0 - T_a) \dfrac{h\,ch(\ell/L) + \lambda/L\, sh(\ell/L)}{h\, sh(\ell/L) + \lambda/L\, ch(\ell/L)} = -(T_0 - T_a) \times f(\ell, L, \lambda, h) \end{cases}$

et donc :

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\, ch\left(\frac{x}{L}\right) - (T_0 - T_a)\, f(\ell, L, \lambda, h)\, sh\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\Leftrightarrow T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\left[ch\left(\frac{x}{L}\right) - f(\ell, L, \lambda, h)\, sh\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

(on pose $T_1 = T_a$, $T_2 = T_0 - T_a$ et $f(\ell, L, \lambda, h) = \dfrac{h\, ch(\ell/L) + \frac{\lambda}{L} sh(\ell/L)}{h\, sh(\ell/L) + \frac{\lambda}{L} ch(\ell/L)}$ pour retrouver le résultat de l'énoncé).

8 - On sait que :

$$T(\ell) = (T_0 - T_a)\, ch\left(\frac{\ell}{L}\right) + (T_0 - T_a) f(\ell, L, \lambda, h)\, sh\left(\frac{\ell}{L}\right) + T_a$$

Or : $L = \sqrt{\dfrac{e\lambda}{2h}} \sim 3,7$ cm et $\ell = 2$ cm, donc :

et $\dfrac{T(\ell) - T_0}{T_0} = \dfrac{(T_0 - T_a)}{T_0}\left[ch\left(\frac{\ell}{L}\right) - f(\ell, L, \lambda, h)\, sh\left(\frac{\ell}{L}\right) + 1\right]$.

Or : $\begin{cases} ch\left(\frac{\ell}{L}\right) \simeq 1,15 \;;\; sh\left(\frac{\ell}{L}\right) \simeq 0,57 \;; \\ f(\ell, L, \lambda, h) \simeq 0,51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} T(\ell) = 335,7\,K \\ T_0 = 273 + 70 = 343\,K \\ \alpha = T_0 - T_a = 50\,K \\ \beta = -26\,K. \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{T(\ell) - T_0}{T_0} \simeq \dfrac{335,7 - 343}{343} \simeq -2,1 \times 10^{-2}$.

L'écart relatif entre les deux températures est d'environ 2 % : la température de l'ailette est donc constante et vaut T_0.

9 - On a : $dP \simeq h\,(T(x) - T_a) \times 2a\,dx$
$\simeq -2ahT_a dx + 2ahT(x)\,dx$.

En intégrant entre 0 et ℓ :

$$P_1 = -2ahT_a \ell + 2ah \int_0^{\ell} \left(T_a + \alpha\, ch\left(\frac{x}{L}\right) + \beta\, sh\left(\frac{x}{L}\right)\right) dx$$

Or : $\begin{cases} \int ch\left(\frac{x}{L}\right) dx = L\, sh\left(\frac{x}{L}\right) + \text{cte}. \\ \int sh\left(\frac{x}{L}\right) dx = L\, ch\left(\frac{x}{L}\right) + \text{cte}. \end{cases}$

Donc : $P_1 = -\cancel{2ahT_a \ell} + \cancel{2ahT_a \ell} + 2ah\alpha L\left(sh\left(\frac{\ell}{L}\right) - \cancel{sh(0)}\right)$
$+ 2ah\beta L\left(ch\left(\frac{\ell}{L}\right) - \underbrace{ch(0)}_{=1}\right)$

$\Leftrightarrow P_1 = 2ah\alpha L\, sh\left(\frac{\ell}{L}\right) + 2ah\beta L\, ch\left(\frac{\ell}{L}\right) = 2ahL\left[\alpha\, sh\left(\frac{\ell}{L}\right) + \beta\, ch\left(\frac{\ell}{L}\right)\right.$

A.N. : $P_1 \simeq 8,3$ W.

On rajoute de plus les pertes en $x = \ell$:
$P_2 = h\,(T(\ell) - T_a) \times a \times e$
$\simeq 0,4$ W.

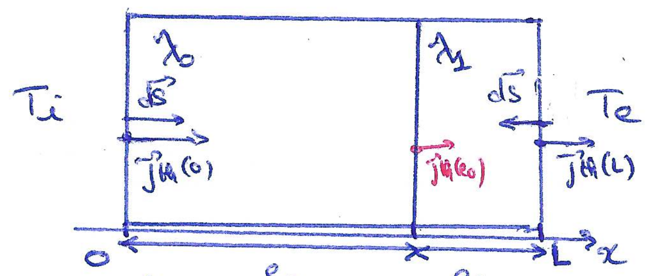
D'où : $P = P_1 + P_2 = 8,7$ W.

Remarque : en considérant T cste : $T(x) \to T_0$, donc :
$P = h\,(T_0 - T_a) \times (2a\ell + 2e\ell + ae) \simeq 2a\ell h\,(T_0 - T_a)$
$\simeq 9,0$ W.

10 - $P' = h\,(T_0 - T_a) \times ae = 0,45$ W.

11 - $\eta = \dfrac{P}{P'} \simeq \dfrac{2\ell}{e}$ soit $\eta \simeq 20 \Rightarrow$ abaissement important de $T°C$

Diffusion dans un mur



1- En régime forcé continu (= permanent) :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0 \quad (1) \text{ (cas unidimensionnel).}$$

2- Flux continu en $x=0$, $x=L$ et température continue en $x = e_0$.

On : $\boxed{T_k(x) = A_k x + B_k}$ $(A_k, B_k = \text{ctes} \in \mathbb{R})$ $(k = 0 \text{ ou } 1)$.

après intégration de (1).

Donc, selon la loi de Fourier : $j_{th,k}(x) = -\lambda_k \frac{dT_k(x)}{dx}$

$\Leftrightarrow \quad j_{th,k}(x) = -\lambda_k A_k = \text{constante}.$

Donc :

- en $x = 0$: contact avec un thermostat :

$$T_0(0) = B_0 = T_i.$$

- en $x = e_0$: continuité de la température ET du flux :

$$\begin{cases} T_0(x=e_0) = T_1(x=e_0) \Leftrightarrow B_0 + A_0 e_0 = B_1 + A_1 e_0. \\ \Phi_0(x=e_0) = \Phi_1(x=e_1) \text{ avec } \Phi_k(x) = \underbrace{\iint \vec{j}_{th,x} \cdot \vec{dS}}_{= j_{th}(x) S} \end{cases}$$

$j_{th_k}(x) = -\lambda_k \frac{dT_k}{dx} \Rightarrow -\lambda_0 A_0 = -\lambda_1 A_1 \Rightarrow \lambda_0 A_0 = \lambda_1 A_1.$

De plus :

- $x = e_1 + e_0 = L$: $T_1(x) = T_L$.

et de même que précédemment :

$$\Phi(x = L^-) = \Phi(x = L^+)$$

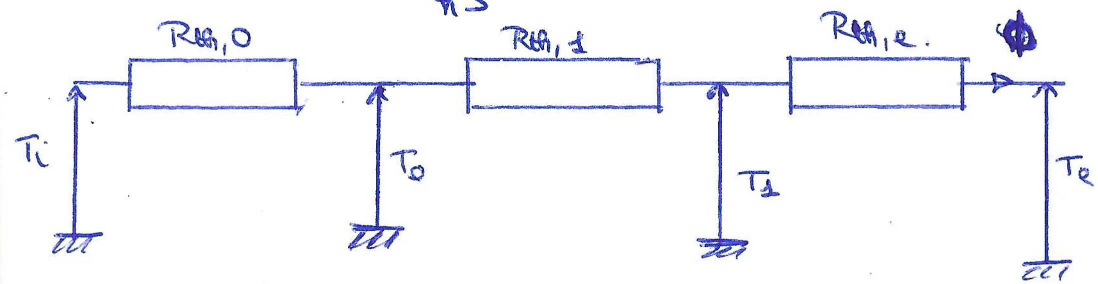
$\Rightarrow \quad j_{th,1}(x = L^-) = j_{th,1}(x = L^+)$

$\Leftrightarrow \quad -\lambda_1 A_1 = h(T_L - T_e).$

$\Leftrightarrow \quad A_1 = -\frac{h}{\lambda_1}(T_L - T_e).$ avec $T_L = A_1 L + B_1$

3- Association en série de 3 résistances :

- $R_{th,0} = \frac{e_0}{\lambda_0 S}$ $(e_0 \in [0; e_0])$
- $R_{th,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S}$ $(e_1 \in [e_0; e_0 + e_1])$.
- $R_{th,e} = \frac{1}{hS}$



4- $(T_i - T_e) = (R_{th,0} + R_{th,1} + R_{th,e}) \Phi$

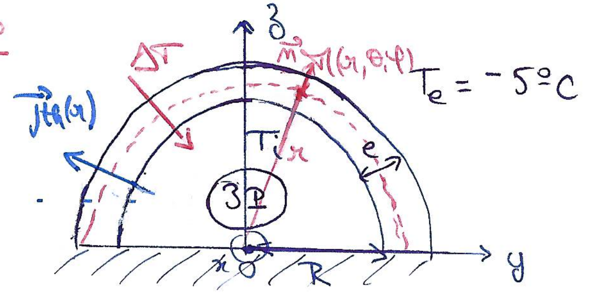
$\Rightarrow \quad \Phi = \frac{T_i - T_e}{R_{th,0} + R_{th,1} + R_{th,e}}$

Donc : $T_i - T_0 = R_{th,0} \Phi \Rightarrow \boxed{T_0 = T_i - \frac{R_{th,0}(T_i - T_e)}{R_{th,0} + R_{th,1} + R_{th,e}}}$

et, de même : $\boxed{T_L = T_1(x=L) = T_e + \frac{R_{th,e}}{R_{th,0} + R_{th,1} + R_{th,e}}(T_i - T_e)}$

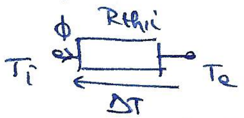
avec $R_{th,0} = \frac{e_0}{\lambda_0 S}$ et $R_{th,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S}$.

Igloo



On suppose la situation stationnaire : le flux thermique à travers la paroi de glace est donc constant, et il est possible de définir une résistance thermique pour chaque partie du système.

q1 - La résistance thermique de l'igloo est $R_{th,i}$ telle que :



$$R_{th,i} = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{T_i - T_e}{\Phi}$$ Système : {glace}

avec Φ le flux thermique à travers la glace.

Du fait de la symétrie hémisphérique de l'igloo, on peut supposer que le flux thermique à travers la glace ne dépend que de $r \in [R ; R+e]$. Or :

$$\Phi(r) = \iint_\Sigma \vec{j}_{th}(r) \cdot d\vec{S} = j_{th}(r) \cdot S$$

avec S : surface de la demi-sphère de rayon $r \in [R ; R+e]$:

$$S = 2\pi r^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\Phi(r) = 2\pi r^2 j_{th}(r)} = \text{constante} = \Phi$$

Or : $\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u_r}$, donc :

$$j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Ainsi :

$$\Phi = -2\pi\lambda r^2 \frac{dT(r)}{dr}.$$

$$\Leftrightarrow \quad dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \times \frac{dr}{r^2}.$$

En intégrant cette expression de R à R+e, il vient :

$$T(R+e) - T(R) = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \times \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad T_e - T_i = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e}\right).$$

Ainsi :

$$R_{th,i} = \frac{T_i - T_e}{\Phi} = \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_{th,i} = \frac{e}{2\pi\lambda R(R+e)}}$$

A.N. : $R_{th,i} \simeq 3{,}3 \times 10^{-3}\ K.W^{-1}$.

q2 - Le système {igloo} peut être modélisé comme la mise en série de trois résistances thermiques : deux pour les flux conducto-convectifs en R et en R+e, et une pour la glace :

Ainsi :

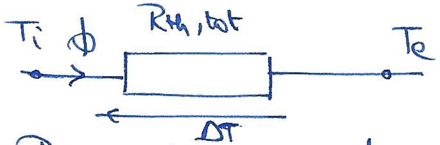
$$R_{th,tot} = \sum_k R_{th,k} = R_{th,int} + R_{th,i} + R_{th,ext}$$
$$= \frac{1}{h S_{int}} + \frac{2\pi\lambda e}{R(R+e)} + \frac{1}{h S_{ext}}$$

avec $S_{int} = 2\pi R^2$ et $S_{ext} = 2\pi (R+e)^2$.

Ainsi :

$$R_{th,tot} = \frac{1}{2\pi h R^2} + \frac{1}{2\pi h (R+e)^2} + \frac{e}{2\pi\lambda R(R+e)}$$

Le système est alors équivalent à :



D'où : $\Delta T = R_{th,tot} \cdot \phi$ avec $\phi = \dfrac{T_i - T_e}{R_{th,i}}$

Inutile.

$\phi = 300\,W$.

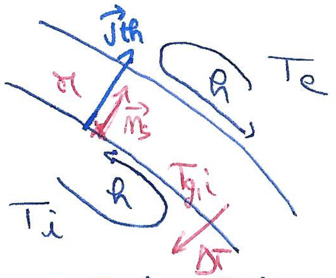
$\Leftrightarrow \boxed{\phi = 2\pi\lambda (T_i - T_e) \dfrac{R(R+e)}{e}}$ (cf. q1)

Ainsi : $\boxed{T_i = T_e + R_{th,tot} \cdot \phi}$

A.N. : $\begin{cases} R_{th,tot} \simeq 3{,}0 \times 10^{-2}\ K.W^{-1}. \\ T_e \simeq 268\,K. \end{cases}$

D'où : $T_i \simeq 277\,K$ soit $T_i \simeq 4°C$.

q3 - Il faut évaluer la température sur la face interne de l'igloo. Cette température n'est pas celle de l'air dans l'igloo (discontinuité de la température à l'interface air/glace).



Selon la loi de NEWTON : $\vec{j}_{th} \cdot \vec{n}_s = h \cdot (T_i - T_{g,i})$ à l'interface air intérieur/glace.

Or : $\phi = j_{th} \cdot S_{int} = j_{th} \times 2\pi R^2$, donc :

$$\frac{\phi}{2\pi R^2} = h\,(T_i - T_{g,i})$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{g,i} = T_i - \frac{\phi}{2\pi R^2 \cdot h}}$$

A.N. : $T_{g,i} = 277 - \dfrac{300}{2\pi \times 1{,}5^2 \times 5} \simeq 272{,}8\,K$

soit $T_{g,i} < 0°C$: la glace de l'igloo ne fond pas.

Rq : on peut également utiliser la résistance thermique associée au flux conducto-convectif sur la face interne :

$$R_{th,int} = \frac{1}{h \times 2\pi R^2}$$

d'où : $T_i - T_{g,i} = R_{th,int} \times \phi$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_{g,i} = T_i - \frac{\phi}{2\pi R^2 h}}.$$

Sensation de chaud et de froid

A- REGIME STATIONNAIRE

1 - Équations de la diffusion.

- Milieu (1) : $\dfrac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = D_{th,1} \dfrac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}$.
- Milieu (2) : $\dfrac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = D_{th,2} \dfrac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2}$

avec . $T_1(x,t), T_2(x,t)$: températures dans les milieux (1) et (2).

- $D_{th,1} = \dfrac{\lambda_1}{\rho_1 c_1}$; $D_{th,2} = \dfrac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}$.

Donc, en régime stationnaire :

. $T_1(x) = A_1 x + B_1$ $\quad \begin{cases} A_1, B_1 = \text{ctes } \mathbb{R}. \\ x \in [0 ; \ell_1] \end{cases}$

. $T_2(x) = A_2 x + B_2$ $\quad \begin{cases} A_2, B_2 = \text{ctes } \mathbb{R}. \\ x \in [\ell_1 ; \ell_2] \end{cases}$

- Pour $x = \ell_1$: $T_1(\ell_1) = T_1 = B_1 + A_1 \ell_1$. (1)
- Pour $x = \ell_2$: $T_2(\ell_2) = T_2 = B_2 + A_2 \ell_2$. (2)
- Pour $x = 0$: conservation du flux thermique :

$$\iint_S \vec{j}_{th,1}(x) \cdot \vec{dS_1} = \iint_S \vec{j}_{th,2} \cdot \vec{dS_2}$$

avec $\vec{dS_1} = dS\,\vec{u_x}$ et $\vec{dS_2} = \vec{dS_1} = dS\,\vec{u_x}$.

Or : $\vec{j}_{th,i} = -\lambda_i \dfrac{dT_i(x)}{dx} \vec{u_x}$ selon la loi de Fourier,

donc :

$$\begin{cases} \vec{j}_{th,1}(x) = -\lambda_1 A_1 \vec{u_x} \\ \vec{j}_{th,2}(x) = -\lambda_2 A_2 \vec{u_x} \end{cases}$$

et donc : $-\lambda_1 A_1 = -\lambda_2 A_2$

$$\Leftrightarrow \boxed{A_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_2}$$

De plus, en supposant le contact parfait entre les 2 solides :

$$T_1(0) = T_2(0) = T_0 .$$

$$\Leftrightarrow B_1 = B_2 = T_0 .$$

Finalement :

(2)-(1) $\Rightarrow$ $T_2 - T_1 = A_2 \ell_2 - A_1 \ell_1 = A_2 \left(\ell_2 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \ell_1\right)$.

Donc : $\boxed{A_2 = \dfrac{T_2 - T_1}{\ell_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ell_1}}$. et $\boxed{A_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ell_2 - \ell_1}} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} A_2$.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{A_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1} (T_2 - T_1)}$ et $\boxed{A_1 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1} (T_2 - T_1)}$

Ainsi, pour $x \in [\ell_1 ; \ell_2]$:

$$\begin{cases} T_1(x) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1} (T_2 - T_1)\, x + T_0 . \\ T_2(x) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1} (T_2 - T_1)\, x + T_0 . \end{cases}$$

2 - $T_0 = \dfrac{(T_1 + T_2)}{2} - \dfrac{A_1 \ell_1 + A_2 \ell_2}{2}$ $\qquad$ ((1)+(2))

$\Leftrightarrow$ $T_0 = \dfrac{T_1 + T_2}{2} - \dfrac{\lambda_2 \ell_1 + \lambda_1 \ell_2}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1} \dfrac{(T_2 - T_1)}{2}$. $\quad + \lambda_1 \ell_2 T$

⚠ $\ell_1 < 0$

$= \dfrac{1}{2} * \dfrac{T_1 \lambda_1 \ell_2 - \cancel{T_1 \lambda_2 \ell_1} + \cancel{T_2 \lambda_1 \ell_2} - T_2 \lambda_2 \ell_1 - \lambda_2 \ell_1 T_2 + \cancel{\lambda_2 \ell_1 T_1} - \cancel{\lambda_1 \ell_2 T}}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1}$

$= \dfrac{1}{2} * \dfrac{2 T_1 \lambda_1 \ell_2 - 2 T_2 \lambda_2 \ell_1}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1} = \boxed{\dfrac{T_1 \lambda_1 \ell_2 - T_2 \lambda_2 \ell_1}{\lambda_1 \ell_2 - \lambda_2 \ell_1}}$

3- On pose : $|e_1| \simeq e_2 \Rightarrow e_1 = -e_2$

et $\begin{cases} T_1 = 20°C = 293K \\ T_2 = 37°C = 310K \end{cases}$

* Contact ① métal / peau ② : $\begin{cases} \lambda_1 = 350 \ W.m^{-1}.K^{-1} \\ \lambda_2 = 6{,}0 \times 10^{-1} \ W.m^{-1}.K^{-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{T_1 \lambda_1 + T_2 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

A.N. : $T_{0,a} \simeq 293K \simeq 20°C \simeq T_1$.

* Contact ① bois / peau ② : $\begin{cases} \lambda_1 = 7{,}5 \times 10^{-1} \ W.m^{-1}.K^{-1} \\ \lambda_2 = 6{,}0 \times 10^{-2} \ W.m^{-1}.K^{-1} \end{cases}$

Donc : $T_{0,b} \simeq 301 K \simeq 28°C > T_{0,a}$.

Ainsi, la jonction métal / peau ~~possède~~ une T°C de jonction plus basse que celle ~~de~~ bois / peau : le métal est plus froid au toucher que le bois.

B - REGIME VARIABLE

4- Pour chaque milieu :

$$\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = D_{th_i} \frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{avec } i = 1,2$$

$$D_{th_i} = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i}.$$

5- Soit la fonction : $f(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{Dt}} e^{-u^2} du$.

⚠ Erreur dans l'énoncé : $\underline{e^{-u^2} du}$!

On pose $v(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$.

On injecte f dans $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[F(v) - F(0)\right]\right] & \frac{\partial (F(0))}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[F(v) - F(0)\right]\right] & \frac{\partial (F(0))}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

en posant $\int e^{-u^2} du = F(u)$, F : une primitive de e^{-u^2}

Or : $\circ \ \frac{\partial}{\partial t}\left[F(v)\right] = \frac{dF}{dv} \times \frac{\partial v}{\partial t}$

Rq : $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ pour F une primitive de f.

Donc $\frac{dF(v)}{dv} = f(v)$.

$$= e^{-v^2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{xD}{2(Dt)^{3/2}}$$

$$= -e^{-v^2} \times \frac{xD}{4(Dt)\sqrt{Dt}}.$$

$$= -e^{-x^2/4Dt} \times \frac{x}{4\sqrt{D}\, t^{3/2}}.$$

$\circ \ \frac{\partial}{\partial x}\left[F(v)\right] = \frac{dF}{dv} \times \frac{\partial v}{\partial x}$

$$= e^{-v^2} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}}.$$

donc : $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[F(v)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-v^2} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\right]$

$$= \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \times \frac{d}{dv}\left[e^{-v^2}\right] \times \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \times (-2v) e^{-v^2} \times \frac{1}{2\sqrt{Dt}}.$$

$$= \frac{1}{4Dt} \times (-2) \frac{x}{2\sqrt{Dt}} e^{-x^2/4Dt}$$

$$= -\frac{x}{4(Dt)^{3/2}} e^{-x^2/4Dt}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -e^{-x^2/4Dt} \times \frac{x}{2\sqrt{\pi D}\, t^{3/2}} \\ D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{-x^2/4Dt} \times \frac{x}{2\sqrt{\pi D}\, t^{3/2}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \underline{Ok} \end{cases}$$

②

6- D'après équation de la diffusion en ordre de grandeur :

$$\tau = \frac{L^2}{D} \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{D\tau}}$$

Ainsi, sur une durée <u>finie</u> ($\tau < +\infty$), la température à l'∞ ne change pas !

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} T_1(x,t) = T_1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} T_2(x,t) = T_2 . \end{cases}$$

7- On a :

$$\begin{cases} T_1(x,t) = a_1 + b_1 f(x,t) \\ T_2(x,t) = a_2 + b_2 f(x,t) . \end{cases}$$

Donc :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} T_1(x,t) = \boxed{a_1 - b_1 = T_1}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} T_2(x,t) = \boxed{a_2 + b_2 = T_2}$
- $T_1(0,t) = T_2(0,t) = T_0 \Rightarrow \boxed{a_1 = a_2 = T_0}$.
- $\varphi_1(0,t) = \varphi_2(0,t) \Rightarrow \lambda_1 b_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,t) = \lambda_2 b_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,t)$.

avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} e^{-x^2/4Dt}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D_1 t}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D_2 t}} .$$

Donc : $\varphi_1(0,t) = \varphi_2(0,t) \Leftrightarrow \frac{\lambda_1 b_1}{\sqrt{D_1}} = \frac{\lambda_2 b_2}{\sqrt{D_2}}$.

On pose : $E_1 = \sqrt{\rho_1 c_1 \lambda_1}$; $E_2 = \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}$.

Ainsi : $\frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}} = \lambda_1 \times \frac{\sqrt{\rho_1 c_1}}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1} = E_1$ et $\frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}} = E_2$.

et : $\boxed{E_1 b_1 = E_2 b_2}$

8- On a :

$$(T_2 - T_1) \Rightarrow b_2 + b_1 = \left(\frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) b_1 .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = (T_2 - T_1) \times \frac{E_2}{E_2 + E_1} . \\ b_2 = (T_2 - T_1) \times \frac{E_1}{E_2 + E_1} . \end{cases}$$

<u>De plus</u> : $T_0 = T_1 + b_1$ (ou $T_0 = T_2 + b_2$).

$$\Rightarrow T_0 = \frac{T_1(E_2 + E_1) + (T_2 - T_1)E_2}{E_2 + E_1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_0 = \frac{T_1 E_1 + T_2 E_2}{E_1 + E_2}}$$

<u>A.N</u> : $\begin{cases} T_0 \simeq 22\,°C & \text{(métal/peau)} \\ T_0 \simeq 34\,°C & \text{(bois/peau)} . \end{cases}$

9- • <u>Modèle A</u> : suppose un régime permanent (temps "long" par rapport au temps de diffusion) ⇒ pas réaliste car l'expérience de toucher d'un objet est trop rapide pour cela.

• <u>Modèle B</u> : plus adapté.

⚠ Même si les milieux sont considérés infinis dans B, on ne ressent la diffusion que sur une longueur L égale à $\sqrt{D\tau_{exp}}$ où τ_{exp} est la durée du toucher. Donc tant que les milieux ont une extension $\gg L$: <u>modèle B adapté</u>.

Thermalisation d'une barre

On donne $T_{i,n}(x) = T_0 + \Theta_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ à l'instant $t=0$.

q1- Pour des temps très longs, la barre étant en contact avec un thermostat de température T_0, la température de la barre sera égale à T_0 (équilibre thermique).

q2- cf. cours. Il s'agit de l'équation de la diffusion thermique en coordonnées cartésiennes, unidimensionnelle :

$$\boxed{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}}$$

le système étant la barre.

q3- On pose $T(x,t) = A + f(x)g(t)$, avec A une constante réelle. On rappelle que $x \in [0;\ell]$ et $t \in \mathbb{R}^+$.

On a : $f(x) \cdot \frac{dg(t)}{dt} = D \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot g(t)$.

soit $f(x) \cdot g'(t) = D \cdot f''(x) \cdot g(t)$.

D'où, pour $f(x)$ et $g(t)$ non-nulles (solution triviale) :

$$\boxed{\frac{g'(t)}{g(t)} = D \cdot \frac{f''(x)}{f(x)}}$$

Le membre de gauche ne dépend que de "t", celui de droite que de "x". La seule solution possible de cette équation est que $\frac{g'(t)}{g(t)}$ et $D\frac{f''(x)}{f(x)}$ soient égales à la même constante, notée α :

$$\begin{cases} \frac{g'(t)}{g(t)} = \alpha \\ D \cdot \frac{f''(x)}{f(x)} = \alpha . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(t) - \alpha g(t) = 0 \quad (1) \\ f''(x) - \frac{\alpha}{D} f(x) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (1) donne :

$g(t) = g(0)e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha < 0$ car la température ne peut diverger pour $t \to +\infty$

L'équation (2) donne :

$f(x) = f_1 \cos\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{D}}x\right) + f_2 \sin\left(\sqrt{\frac{-\alpha}{D}}x\right)$, $\{f_1, f_2\} \in \mathbb{R}^2$, constantes.

car l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - \frac{\alpha}{D} = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{\alpha}{D} \text{ mais } \alpha < 0.$$

Donc :

$$r^2 = j^2\left(-\frac{\alpha}{D}\right)$$

$$\Rightarrow r = \pm j\left(\frac{\beta}{D}\right)^{1/2} \quad \text{avec } \beta = -\alpha ; \beta > 0.$$

Finalement :

$$\boxed{T(x,t) = A + \left[f_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{D}}x\right) + f_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\beta}{D}}x\right)\right] g(0) e^{-\beta t}}.$$

q4- Pour $t=0$, $T(x,0) = T_{i,m}(x)$
$$= T_0 + \Theta_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right).$$

Or : $$T(x,0) = A + g(0) f_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{D}}\, x\right) + g(0) f_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\beta}{D}}\, x\right).$$

Par analogie avec l'expression donnée, il vient :

$$\begin{cases} A = T_0 \\ g(0) f_1 = 0 \\ g(0) f_2 = \Theta_0 \\ \sqrt{\frac{\beta}{D}} = \frac{m\pi}{\ell} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A = T_0 \\ f_1 = 0 \\ g(0) f_2 = \Theta_0 \\ \beta = \frac{(m\pi)^2 D}{\ell^2} \end{cases}}.$$

Ainsi :

$$T(x,t) = A + g(0) f_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\beta}{D}}\, x\right) e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x,t) = T_0 + \Theta_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{m^2\pi^2 D}{\ell^2} t}}$$

q5- $T(x,t)$ présente une fonction exponentielle décroissante dans son expression. On pose τ le temps caractéristique de décroissance de T, équivalent au temps typique d'évolution :

$$T(x,t) = T_0 + \Theta_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{-t/\tau}$$

avec $\tau_m = \frac{\ell^2}{(m\pi)^2 D}$. Or : $[\tau] = \frac{\cancel{L^2}}{\emptyset \cdot \cancel{L^2} \cdot T^{-1}} = T$.

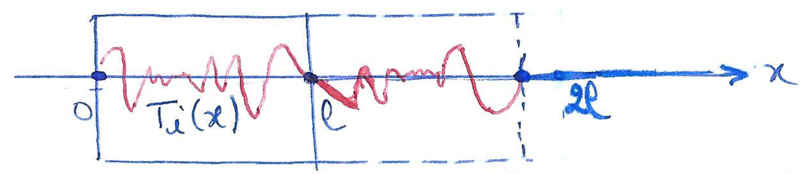
τ_m est donc bien homogène à un temps.

Rq : on retrouve, à un facteur $(m\pi)^2$ près, l'évolution classique de la diffusion :

$$\ell \sim \sqrt{D\tau}$$

avec ℓ la longueur caractéristique de diffusion et τ_m le temps caractéristique de diffusion.

q6- On suppose que $T_i(x)$ est quelconque, à l'exception de ses valeurs en $x=0$ et $x=\ell$:
$$T_i(0) = T_i(\ell) = T_0.$$



On prolonge $T_i(x)$ sur $[0; 2\ell]$ de façon à rendre la nouvelle fonction $T_2(x)$ impaire et périodique, de période 2ℓ. Ainsi, $T_2(x)$ peut se décomposer en série de Fourier :

$$T_2(x) = T_{2,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} T_{2m} \sin\left(\frac{2m\pi x}{2\ell}\right)$$

$$T_2(x) = T_{2,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} T_{2m} \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right).$$

Rappel : pour une fonction périodique, de période T :

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2m\pi t}{T}\right)\right]$$

Or : $T_2(0) = T_i(0) = T_0 \Rightarrow T_{2,0} = T_0$.

La fonction $T_2(x)$ est une combinaison linéaire de la solution $T(x,0) = T_{i,m}(x)$ précédente : elle est donc également solution de l'équation de diffusion de la question q2 -

La solution générale est donc :

$$\boxed{T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} T_{2n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{\ell^2}t}}$$

- On vérifie que cette solution correspond à ~~la~~ condition initiale :

$$T(x,0) = T_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} T_{2n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = T_2(x),$$

ce qui était attendu. Par ailleurs, aux temps longs :

$$\lim_{t\to+\infty} T(x,t) = T_0 .$$

On retrouve l'équilibre thermique anticipé à la question q1- : la barre se thermalise jusqu'à atteindre la température T_0.

Rq : La question q6- est quasiment hors programme. Elle n'est pas à traiter en priorité.

Exercice : Four à micro-ondes

q1- cf. cours :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} * \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{P}{2eS\rho c} \qquad \boxed{V = 2eS}$$

* Continuité du flux thermique en $\pm e$:

- $\vec{j}_{th}(+e,t) \cdot S\vec{u_x} = \phi_s = gS(T_s(t) - T_0)$.

$\Leftrightarrow \quad \vec{j}_{th}(+e,t) = g\,(T_s(t) - T_0)\,\vec{u_x}$

- $\vec{j}_{th}(e,t) \cdot (-S\vec{u_x}) = \phi_s = gS(T_s(t) - T_0)$

$\Leftrightarrow \quad +\vec{j}_{th}(+e,t) = -g(T_s(t) - T_0)\,\vec{u_x}$

Vérif : signes de $T_s - T_0 \Rightarrow$ en accord ac orientat° de $\vec{j}_{th}$.

q2- Régime permanent : $\frac{\partial T_P}{\partial t} = 0$

Donc :

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = -\frac{P}{2eS\lambda}.$$

$$\Rightarrow \quad T_P(x) = -\frac{P}{4eS\lambda}x^2 + K.x + K' \quad \text{avec } K, K' = \text{cste} \in \mathbb{R}.$$

Or : $j_{th} = -\lambda \frac{dT_P}{dx} = \lambda \times \frac{P}{2eS\lambda}x + K$.

- Continuité du flux en $x = \pm e$: $j_{th}(\pm e,t) = -\lambda \frac{dT_P(t)}{dx}(x = \pm e)$

$$= -\frac{P}{2eS} \times (\pm e) + K$$

Donc :

$$\frac{dT_P}{dx}(x=e) = -\frac{dT_P}{dx}(x=-e)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{P}{2S} + K = +\frac{P}{2S} - K \Leftrightarrow \boxed{K = 0}$$

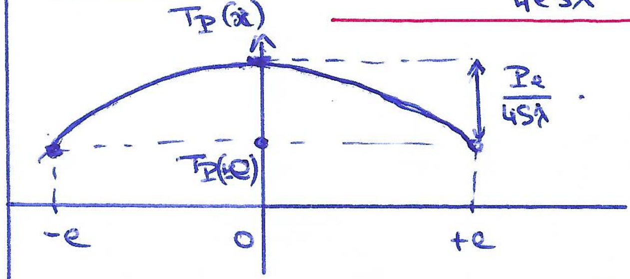
Ainsi :

$$T_P(x) = -\frac{P}{4eS\lambda}x^2 + K'$$

Or : $x = e$: $T_P(x=e) = T_P(e)$ donc :

$$K' = T_P(e) + \frac{P}{4eS\lambda}e^2.$$

Finalement : $T_P(x) = \frac{P}{4eS\lambda}(e^2 - x^2) + T_P(e)$.



- $\underline{x = 0}$: $T_P(0) = T_P(e) + \frac{Pe}{4S\lambda}$.

- En contact parfait avec un thermostat à T_s :

$$T_s = T_P(e)$$

donc $j_{th}(e) = \frac{P}{2S} = g(T_P(e) - T_0)$ et $T_P(e) = T_0 + \frac{P}{2Sg}$

D'où : $T_P(0) = T_0 + \frac{P}{2Sg}\left(1 + \frac{ge}{2\lambda}\right)$.

q3- On cherche $f(t)$ telle que :

- $\underline{t = 0}$: $T(x,0) = T_0 \quad \forall x$.

$\Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$.

- $\underline{t \to +\infty}$: régime permanent atteint, donc $T(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} T_P(x)$

Donc : $\boxed{f(t) = 0}$ quand $t \to +\infty$.

q4- On injecte la forme donnée de $T(x,t)$ dans l'équation aux dérivées partielles (non-permanent !) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = (T_P(x)-T_0)\times(-f'(t)) \\[2mm] \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = (1-f(t))\dfrac{d^2T_P(x)}{dx^2} = \underline{(f(t)-1)\times\dfrac{P}{2eS\lambda}} \end{cases}$$

Ainsi :
$$f'(t)\times(T_0-T_P(x)) = (f(t)-1)\frac{P}{2eS\rho c}+\frac{P}{2eS\rho c} = f(t)\times\frac{P}{2eS\rho c}.$$

Donc :
$$f'(t) + \underbrace{\frac{P}{2eS\rho c\,(T_0-T_P(x))}}_{=-\phi(x)} f(t) = 0.$$

avec $\underline{\phi(x) = \dfrac{P}{2eS\rho c\,(T_P(x)-T_0)}}$; $T_P(x) = \dfrac{P}{4eS\lambda}(e^2-x^2)+T_0+\dfrac{P}{2Sg}$.

Après développements : $\phi^{-1}(x) = \dfrac{e\rho c}{g}\left(1+\dfrac{ge}{2\lambda}\left(1-\dfrac{x^2}{e^2}\right)\right)$.

$\phi(x)$ est donc $\perp\!\!\!\perp$ de x ssi $ge \ll 2\lambda$.

Alors : $\phi^{-1}(x) \simeq \dfrac{e\rho c}{g}$ et $f'(t)+\dfrac{g}{e\rho c}f(t)=0$.

$$\Rightarrow \underline{f(t) = f(0)e^{-t/\tau_s}} \quad \text{avec } \underline{\tau_s = \frac{e\rho c}{g}}.$$

or $f(0)=1 \Rightarrow f(t)=e^{-t/\tau_s}$.

q5- On a :
- $\dfrac{ge}{2\lambda} \simeq 0{,}05 \ll 1 \Rightarrow$ hyp. validée.
- $\tau_s = \dfrac{e\rho c}{g} \Rightarrow \tau_s \simeq 2{,}0\times10^3\,s$. soit $\simeq 33$ min.
- $T_P(0) \simeq T_0 + \dfrac{P}{2Sg} \Rightarrow T_P(0) \simeq 2793\,K$.

T au centre de la nourriture très élevée ! Vaporisat° de l'eau d'abord...

q6- On cherche τ_e telle que :

$$T(0,\tau_e) = 373\,K = T_{vap}.$$

$$\Leftrightarrow T_0+\frac{P}{2Sg}(1-f(\tau_e)) = 373\,K = T_{vap}.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(\tau_e) = 1-(T_{vap}-T_0)\times\frac{2Sg}{P}}$$

soit :
$$\underline{\tau_e = -\tau_s \ln\left[1-(T_0-T_{vap})\frac{2Sg}{P}\right]}.$$

A.N : $\underline{\tau_e \simeq 87\,s}$: il faut environ 1 min 30s pour réchauffer sa nourriture.

Expérience de Joseph FOURIER (1806)

q1- $T_0(\theta)$: fonction paire de θ :

$$\Rightarrow \quad T_0(-\theta) = T_0(\theta).$$

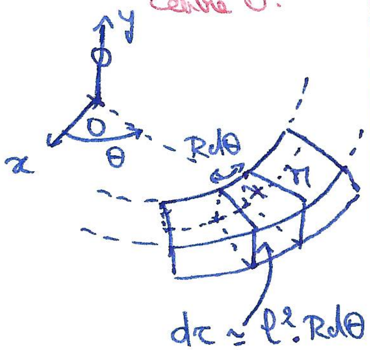
a- Par symétrie du système, le champ de température ne dépend que de θ (et du temps t). Un bilan d'énergie donne, sur le système constitué d'une portion de longueur $Rd\theta$ de l'anneau :

$$\cdot \; dU = \delta Q$$

$$\cdot \; dU = \mu c \, \frac{\partial T(\theta,t)}{\partial t} . \, dt . \, d\tau$$

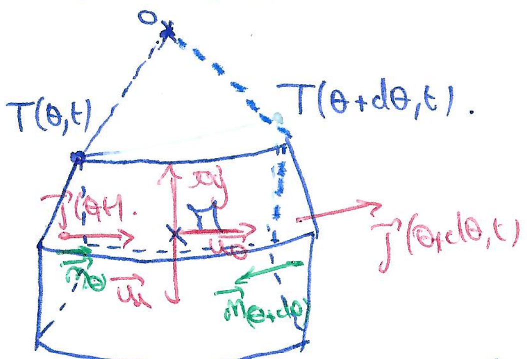
Rq : $\ell << R$: on suppose donc que le système ne dépend pas de r, la distance au centre O.

avec $d\tau = \ell^2 R d\theta$.



- Un bilan spatial donne :

$$\delta Q = \phi(\theta,t)\,dt + \phi(\theta+d\theta,t)\,dt$$



On oriente arbitrairement le système de sorte que le repère cylindrique $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_y})$ forme un trièdre direct.

Ainsi :

$$\cdot \; \phi(\theta,t) = \iint_{S_\theta} \vec{j}(\theta,t) . \vec{dS} \quad \text{avec } \vec{dS} = \ell^2 \vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\theta,t) = j(\theta,t) . \ell^2 .$$

$$\cdot \; \phi(\theta+d\theta,t) = \iint_{S_{\theta+d\theta}} \vec{j}(\theta+d\theta,t) . \vec{dS'} \quad \text{avec } \vec{dS'} = -\ell^2 \vec{u_\theta} .$$

donc :

$$\phi(\theta+d\theta,t) = -j(\theta+d\theta,t) . \ell^2 .$$

Finalement :

$$\delta Q = -\frac{\partial j(\theta,t)}{\partial \theta} . \, d\theta . \ell^2 . dt .$$

$$= -\frac{1}{R} \frac{\partial j(\theta,t)}{\partial \theta} . \, d\tau \, dt .$$

Avec $\vec{j}(\theta,t) = -\lambda \vec{\nabla} T = -\frac{\lambda}{R} . \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u_\theta}$, donc :

⚠ $\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial \ell} \vec{u_\theta}$
mais ici : $d\ell = R d\theta$
d'où : $\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial \theta} \times \frac{1}{R}$

$$\delta Q = \frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \, d\tau \, dt .$$

Finalement :

$$dU = \delta Q$$

$$\Leftrightarrow \mu c \, \frac{\partial T(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2} . \frac{\partial^2 T(\theta,t)}{\partial \theta^2} .$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial T(\theta,t)}{\partial t} = \frac{D_{th}}{R^2} . \frac{\partial^2 T(\theta,t)}{\partial \theta^2}}$$

avec $D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$.

JF 2

b- On pose $T(\theta,t) = T_m + f(\theta)g(t)$; $T_m = \text{cste}$.

L'équation différentielle devient :

$$f(\theta).g'(t) = \underbrace{\frac{D_{th}}{R^2}}_{=\alpha} . f''(\theta).g(t).$$

$$\Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = \alpha \frac{f''(\theta)}{f(\theta)} \quad \text{pour } f(\theta) \neq 0 \ \forall \theta \in [-\pi;\pi] \text{ et } g(t) \neq 0 \ \forall t \in [0;+\infty[.$$

Cette égalité n'est vérifiée que pour $\frac{g'(t)}{g(t)} = \beta = \alpha \frac{f''(\theta)}{f(\theta)}$,

avec β une constante. Ainsi :

$$\begin{cases} g'(t) = \beta g(t) \Rightarrow g(t) = g(0)e^{\beta t} \\ f''(\theta) = \frac{\beta}{\alpha} f(\theta) \end{cases}$$

Comme la température ne peut pas diverger dans le temps :

$$\boxed{\beta < 0}.$$

Ainsi : $f''(\theta) = \frac{\beta}{\alpha} f(\theta) \Leftrightarrow f''(\theta) - \frac{\beta}{\alpha} f(\theta) = 0.$

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow r = \pm j\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$

car $\beta/\alpha < 0$.

D'où : $f(\theta) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\theta\right) + B\sin\left(\sqrt{\beta/\alpha}\,\theta\right)$.

avec A et B des constantes réelles.

La fonction $f(\theta)$ étant paire, $B = 0$. Ainsi :

$$f(\theta) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\theta\right).$$

et :

$$T(\theta,t) = T_m + Ag(0)e^{\beta t}\cos\left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\theta\right).$$

On pose $\beta = -\frac{1}{\tau}$, avec τ une constante réelle positive :

$$\boxed{T(\theta,t) = T_m + Ag(0)e^{-t/\tau}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha\tau}}\theta\right)},$$

• L'anneau est par ailleurs fermé. La valeur de $T(\pi,t)$ est donc égale à celle de $T(-\pi,t)$. Ceci n'est possible que si le flux en $\theta = \pi$ est nul, ce qui revient à :

$$-\frac{\lambda}{R}.\frac{\partial T(\theta,t)}{\partial\theta} = 0 \quad \text{pour } \theta = \pi, \ \forall t \in [0;+\infty[$$

$$\Rightarrow +\frac{\lambda Ag(0)e^{-t/\tau}}{R}.\sqrt{\frac{1}{\alpha\tau}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha\tau}}\theta\right) = 0.$$

Cette relation est valable $\forall t \in [0;+\infty[$. Ainsi :

$$\sin\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha\tau}}\theta\right) = 0 \quad \forall \theta \in [-\pi;\pi].$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}} = n \Leftrightarrow \tau_n = \frac{1}{\alpha n^2}} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi : $\boxed{T(\theta,t) = T_m + Ag(0).e^{-\alpha n^2 t}\cos(n\theta) = T_n(\theta,t)}$.

On pose $B_n = Ag(0)$; la solution générale est la superposition des n modes :

$$\boxed{T(\theta,t) = T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-\alpha n^2 t}\cos(n\theta)}.$$

C'est ainsi que Fourier introduisit les séries de FOURIER, décomposition en fonction trigonométrique de fonction périodiques.

- La constante de temps de l'ordre n est : $\tau_n = \frac{1}{\alpha n^2}$.

Ainsi, les termes d'ordres supérieurs à 1 deviennent rapidement négligeable devant le terme fondamental ($n = 1$). On peut alors écrire :

$$\boxed{T(\theta,t) \simeq T_m + B_1 \cos(\theta) e^{-t/\tau} = T_m + B_1 \cos\theta\, e^{-\alpha t}}.$$

confirmant les dires de Fourier (en incluant une décroissance exponentielle de la fluctuation dans le temps).

c- L'ordre de grandeur est d'environ $\tau = \frac{1}{\alpha}$, soit :

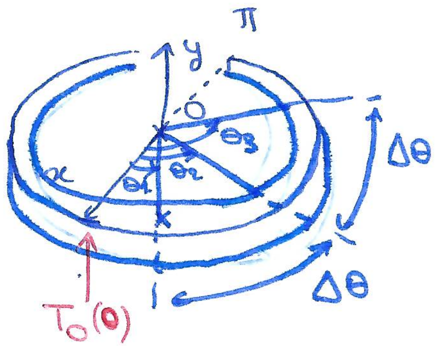
$$\tau = \frac{R^2}{D_{th}} = \frac{\mu c}{\lambda} R^2.$$

A.N. :

$$\tau = \frac{7{,}86 \cdot 10^3 \times 460}{81} \times (1{,}6 \times 10^{-1})^2 \simeq 1{,}14 \times 10^3\, s.$$

soit $\tau \simeq 19$ minutes.

Q2- a- Schéma :



On se place à l'instant initial :

$$T(\theta, 0) = T_0(\theta)$$

$$\Leftrightarrow T(\theta,0) = T_m + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cos(n\theta).$$

- Il est désormais nécessaire de prendre en compte le flux conducto-convectif, de forme :

$$\Phi_c = h \cdot S\,(T(\theta) - T_a)$$

avec S : surface de l'anneau en contact avec l'air.

$dS = 4\ell . R d\theta$ pour le système constitué d'une tranche d'anneau de longueur $R d\theta$.

Le bilan spatial donne ainsi, en régime stationnaire :

$$\delta Q = 0 = \phi(\theta)\, dt + \phi(\theta + d\theta)\, dt - h\, dS\,(T(\theta) - T_a)\, dt$$

$$= -\frac{dj(\theta)}{d\theta} \ell^2 d\theta\, dt - h\, dS\,(T(\theta) - T_a)\, dt.$$

$$= +\frac{\lambda \ell^2}{R} \frac{d^2 T(\theta)}{d\theta^2} d\theta\, dt - h . 4\ell R\, d\theta (T(\theta) - T_a)\, dt$$

soit :

$$\frac{d^2 T(\theta)}{d\theta^2} = \frac{4 R^2 h}{\lambda \ell} (T(\theta) - T_a).$$

On pose $\frac{4h}{\lambda \ell} = \frac{1}{L_{th}^2}$:

$$\boxed{\frac{d^2 T(\theta)}{d\theta^2} = \frac{R^2}{L_{th}^2} (T(\theta) - T_a)}.$$

L_{th} est une longueur caractéristique de diffusion.

JFW

La solution est de la forme :

$$T_0(\theta) = T_a + Ae^{R/\ell_{th}\,\theta} + Be^{-R/\ell_{th}\,\theta}.$$

Or : $\begin{cases} T_0(\theta) = T_0(-\theta) \quad (1) \\ \dfrac{dT_0}{d\theta}(\theta=\pi) = 0 \quad (2)\ \text{(annulation du flux en } \theta=\pi). \end{cases}$

Donc : $(2) \Rightarrow \boxed{Ae^{R/\ell_{th}\,\pi} = Be^{-R/\ell_{th}\,\pi} \quad (2')}$

$\Leftrightarrow \quad B = Ae^{2R/\ell_{th}\,\pi}.$ <u>INUTILE</u>

et $(1) \Rightarrow Ae^{R/\ell_{th}\,\theta} + Ae^{R/\ell_{th}(2\pi-\theta)} = Ae^{-R/\ell_{th}\,\theta} + Ae^{R/\ell_{th}(2\pi+\theta)}$

et, pour $\theta = \pi$: $T_0(\theta) = T_\pi = T_a + Ae^{R/\ell_{th}\,\pi} + Be^{-R/\ell_{th}\,\pi}.$

Donc : $\boxed{Ae^{R/\ell_{th}\,\pi} = (T_\pi - T_a) - Be^{-R/\ell_{th}\,\pi}.\ (3)}$

Ainsi, en combinant (2') et (3) :

$$(T_\pi - T_a) - Be^{-R/\ell_{th}\,\pi} = Be^{-R/\ell_{th}\,\pi}.$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \frac{T_\pi - T_a}{2} e^{+R/\ell_{th}\,\pi}.$$

et $A = \dfrac{T_\pi - T_a}{2} e^{-R/\ell_{th}\,\pi}.$

Finalement :

$$T_0(\theta) = T_a + \frac{T_\pi - T_a}{2} ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta)\right).$$

Or, pour $T_0(\theta=0)$: $T_0(\theta=0) = T_0(0)$, donc :

$$T_0(0) = T_a + \frac{T_\pi - T_a}{2} ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}\pi\right)$$

et $T_0(\theta)$ devient :

$$\boxed{T_0(\theta) = T_a + \frac{T_0(0) - T_a}{ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}\pi\right)} ch\left[\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta)\right]}$$

b- On a :

$$C = \frac{T_0(\theta_1) - T_a + T_0(\theta_3) - T_a}{T_0(\theta_2) - T_a}$$

$$= \frac{ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta_1)\right) + ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta_3)\right)}{ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta_2)\right)}$$

$$= \frac{ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta_2 + \Delta\theta)\right) + ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta_2 - \Delta\theta)\right)}{ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}(\pi - \theta_2)\right)}.$$

Or : $ch(p) + ch(q) = 2\, ch\left(\frac{p+q}{2}\right) ch\left(\frac{p-q}{2}\right)$, donc :

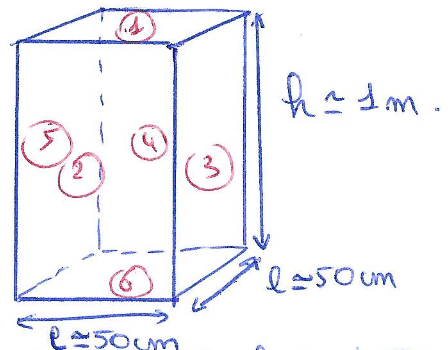
$\boxed{C = 2\, ch\left(\frac{R}{\ell_{th}}\Delta\theta\right)}$. $\Rightarrow$ C indépendante de $T_0(0)$ et θ_2.

c- <u>A.N.</u> : $C_{th} \simeq 2{,}24$ et $C_{exp} \simeq 2{,}26$.

$\Rightarrow$ résultats concordants à $\sim 2\%$.

Résolution de problème : le manchot empereur

Q1- On considère l'étude du système {manchot empereur} en régime stationnaire. La puissance thermique dissipée par le manchot est donc supposée égale à $P = 100\ W$. Pour simplifier, on modélise un manchot comme un parallélépipède rectangle dont les caractéristiques sont données ci-dessous :



Les côtés du carré de base sont évalués à 50 cm à l'aide de la photographie fournie (épaisseur du plumage incluse).

Le manchot possède une température intérieure $T_i = 39\,°C$; la température extérieure (sol + air) est prise égale à $T_e = -20\,°C$.

Chaque face du parallélépipède est donc soumise à la même différence de température ; la résistance thermique totale du manchot est $R_{th,tot} = \frac{\Delta T}{P} \Rightarrow R_{th,tot} = \frac{59}{100} = 0{,}59\ K.W^{-1}$

Or cette résistance est issue de l'association en parallèle des résistances de chacune des faces du manchot :

$$R_{th,tot}^{-1} = \sum_{i=1}^{6} R_{th,i}^{-1}$$

avec : $R_{th,1} = R_{th,6} = \frac{e}{\lambda S_1}$

avec $e = 2\,cm$ et $S_1 = l^2 = 0{,}25\,m^2$

et $R_{th,2} = R_{th,3} = R_{th,4} = R_{th,5} = \frac{e}{\lambda S_2}$

avec $S_2 = 0{,}5\,m^2$.

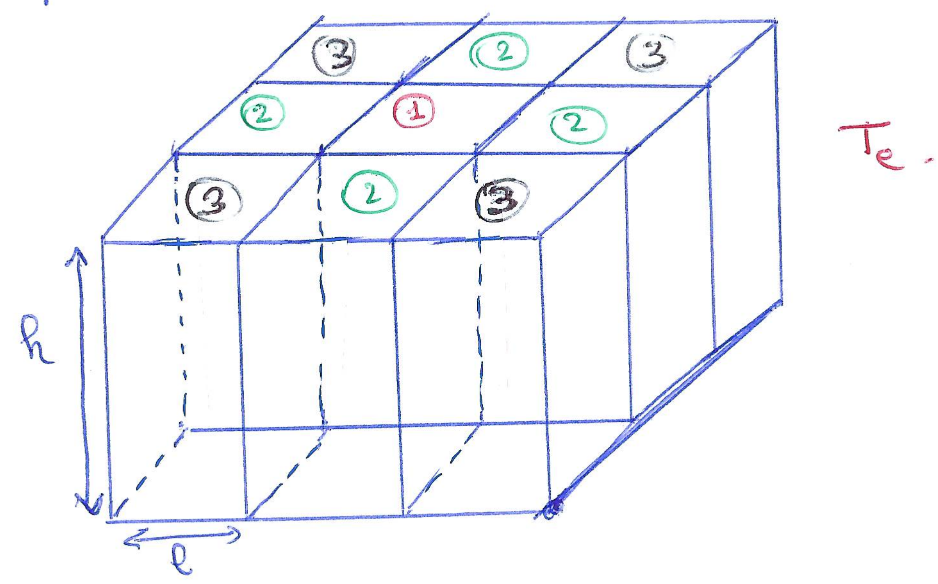
Ainsi :

$$\frac{1}{R_{th,tot}} = \frac{\lambda}{e}\left(4S_2 + 2S_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{e}{R_{th,tot}(4S_2+2S_1)} = \frac{P \times e}{\Delta T\,(4S_2+2S_1)}}.$$

A.N. : $\lambda \simeq 1{,}36 \times 10^{-2}\ W.K^{-1}.m^{-1}$.

Q2- Soit la configuration suivante :



Dans cette configuration :

- le manchot 1 perd de sa puissance thermique par les faces supérieure et inférieure : $\mathcal{P}_1 = 2 \times \frac{\Delta T}{\frac{e}{\lambda S_1}} = \frac{2\lambda S_1 \Delta T}{e}$

- les manchots de type 2 perdent leur puissance thermique à la fois par ses deux faces et une face exposée à l'air :

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 + \frac{\Delta T}{e/\lambda S_2} = \lambda S_2 \frac{\Delta T}{e} + \frac{2\lambda S_1 \Delta T}{e}$$

- les manchots de type 3 perdent, en plus des pertes précédentes, de la puissance thermique par une deuxième face exposée à l'air :

$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 + 2\lambda S_2 \frac{\Delta T}{e} = \frac{\lambda \Delta T}{e}(2S_1 + 2S_2)$$

Au total, avec 1 type 1 et 4 types 2 et 3 :

$$P_{tot} = \mathcal{P}_1 + 4\mathcal{P}_2 + 4\mathcal{P}_3 = 9\mathcal{P}_1 + 12\lambda S_2 \frac{\Delta T}{e}$$
$$= \frac{\lambda \Delta T}{e}(18 S_1 + 12 S_2).$$

donc :

$$\boxed{P_{tot} = \frac{6\lambda}{e}(3S_1 + 2S_2)\Delta T.}$$

A.N. : $P_{tot} \simeq 421{,}3 \text{ W}.$

soit, par manchot :

$$\mathcal{P}_0 = \frac{P_{tot}}{9} \simeq 46{,}8 \text{ W} \left(= \frac{6\lambda}{9e}(3\ell^2 + 2\ell h) \cdot \Delta T\right).$$

soit une diminution moyenne de 53% du métabolisme du manchot.

Rq : dans le détail :

- $\mathcal{P}_1 \simeq 20 \text{ W}$ → diminution de 80% du métabolisme du manchot 1 (par rapport au cas du manchot seul)
- $\mathcal{P}_2 \simeq 40{,}1 \text{ W}$ → diminution de 60% du métabolisme des manchots 2 (———)
- $\mathcal{P}_3 \simeq 60{,}2 \text{ W}$ → ——— 40% ——— 3 (———).

Q3- Soit N le nombre de manchots placés en formation "tortue" (= constituant un carré de n manchots de côté). Si n est le nombre de manchots par côté du carré ($N = n^2$) :

- il y a 4 manchots de type 3 ;
- il y a $4(n-2)$ manchots de type 2 ;
- il y a $N - (4n-4) = n^2 - 4(n-1)$ manchots de type 1.

Ainsi :

$$P_{tot_N} = [n^2 - 4(n-1)]\mathcal{P}_1 + 4(n-2)\mathcal{P}_2 + 4\mathcal{P}_3$$

et, par manchots :

$$\boxed{\mathcal{P}_{0,N} = \frac{P_{tot,N}}{n^2} = \left[1 - 4\frac{n-1}{n^2}\right]\mathcal{P}_1 + 4\left(\frac{n-2}{n^2}\right)\mathcal{P}_2 + \frac{4}{n^2}\mathcal{P}_3}$$

On remarque alors que la puissance dissipée par manchots varie comme $\mathcal{P}_1 - \frac{A_n}{n^2}$ avec $A_n = 4(n-1)\mathcal{P}_1 - 4(n-2)\mathcal{P}_2 - 4\mathcal{P}_3$.

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{A_n}{n^2} = 0$: il existe donc une limite de puissance thermique dissipée par manchots qui vaut $\mathcal{P}_1 \simeq 20 \text{ W}$.

Or $n - 1 \ll n^2$ dès $\boxed{n \simeq 10}$ ($\frac{n-2}{n^2} \simeq 0{,}09$) ; on peut donc en conclure que la taille limite de cette formation est de 100 manchots environ.