Opérateurs vectoriels

1 - $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{\sqrt{y^2+z^2}}$

- $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{u_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{u_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u_z}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\vec{u_x} + \frac{x z^2}{(y^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_y} - \frac{xyz}{(y^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z}$$

- $\text{div}\, \vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

$$= 0 - \frac{3xz^2y}{(y^2+z^2)^{5/2}} - xy\left[\frac{(y^2+z^2)^{3/2} - 3z\cdot z^2(y^2+z^2)^{1/2}}{(y^2+z^2)^3}\right]$$

$$= -\frac{3xyz^2}{(y^2+z^2)^{5/2}} - xy(y^2+z^2)^{1/2}\cdot\frac{(y^2+z^2) - 3z^2}{(y^2+z^2)^3}$$

$$= -\frac{3xyz^2 + xy(y^2-2z^2)}{(y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{-xy(y^2+z^2)}{(y^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{xy}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

- $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$$= 0 - \frac{3xz^2y}{(y^2+z^2)^{5/2}} - xy\left[\frac{(y^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(y^2+z^2)^{1/2}}{(y^2+z^2)^3}\right]$$

On retrouve la deuxième ligne de calcul de $\text{div}\,\vec{A}$. Ainsi :

$$\Delta f = \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) = -\frac{xy}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

q2 - $g(r,\theta,z) = \dfrac{r}{z}\sqrt{r^2\cos^2\theta + z^2}$

- $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\, g = \dfrac{\partial g}{\partial r}\vec{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\vec{u_z}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{2r^2\cos^2\theta + z^2}{z\sqrt{r^2\cos^2\theta+z^2}}\vec{u_r} - \frac{r^2\sin(2\theta)}{2z\sqrt{r^2\cos^2\theta+z^2}}\vec{u_\theta} + \frac{r^3\cos^2\theta}{z^2\sqrt{r^2\cos^2\theta+z^2}}\vec{u_z}$$

avec $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

- $\text{div}\,\vec{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z}$

$$\Rightarrow \text{div}\,\vec{B} = \frac{4r^4\cos^4\theta + 6r^2z^2\cos^2\theta + z^4}{rz(r^2\cos^2\theta+z^2)^{3/2}} + \frac{r^2(-r^2\cos^4\theta + z^2\sin^2\theta - z^2\cos^2\theta)}{z(r^2\cos^2\theta+z^2)^{3/2}} + \frac{r^3(2r^2\cos^2\theta + 3z^2)\cos^2\theta}{z^3(r^2\cos^2\theta+z^2)^{3/2}}$$

- $\Delta g = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}$

Le calcul nous donne (long) :

$$\Delta g = \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\, g) = \text{div}\,\vec{B}.$$

q3- $h(r,\theta,\varphi) = r \ln\left(\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}\right)$

- $\vec{C} = \overrightarrow{\text{grad}}\, h = \dfrac{\partial h}{\partial r}\,\vec{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h}{\partial \theta}\,\vec{u_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial h}{\partial \varphi}\,\vec{u_\varphi}$

$$\Rightarrow \vec{C} = \ln\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}\right)\vec{u_r} - \tan\theta\,\vec{u_\theta} - \frac{\sin(2\varphi)}{\sin\theta}\,\vec{u_\varphi}$$

- $\text{div}\,\vec{C} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 C_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta \cdot C_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi}$

$$\Rightarrow \text{div}\,\vec{C} = \frac{2}{r}\ln\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}\right) - \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right) - \frac{2\cos(2\varphi)}{r\sin^2\theta}.$$

- $\Delta h = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial h}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial h}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2}$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{2}{r}\ln\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-r\sin\theta\tan\theta\right)$$
$$+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\frac{r\sin(2\varphi)}{\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{2}{r}\ln\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}\right) - \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$
$$- \frac{1}{r\sin^2\theta}\times 2\cos(2\varphi) = \text{div}\,\vec{C} = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, h\right).$$

Diffusion d'atomes

q1 - $\cdot\ \phi = \dfrac{\partial N}{\partial t}$: $[\phi] = T^{-1}$

$\cdot\ \vec{j_N} = -D\,\vec{\nabla}c$; or : $[j_N] = \dfrac{[\phi]}{[S]} = T^{-1}.L^{-2}$

et $[\|\vec{\nabla}c\|] = \dfrac{[c]}{L} = L^{-4}$.

Donc : $D = \dfrac{[j_N]}{[\|\vec{\nabla}c\|]} = \dfrac{T^{-1}.L^{-2}}{L^{-4}} = L^2.T^{-1}$

D s'exprime donc en $m^2.s^{-1}$.

q2 - cf. cours : $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_N}{\partial x}}$

q3 - Loi de FICK : $j_N = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$, donc :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$$

q4 - On donne : N_s, nombre de particules par unité de surface. Le nombre de particules au total est donc :

$$N_{tot} = \iint_\Sigma N_s\cdot dS = N_s\cdot S$$

avec Σ la surface du matériau (section du tube de diffusion).

1

$\cdot$ Soit $n(x,t) = \dfrac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$; on a :

$$\cdot\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{N_s}{2\sqrt{\pi D}}\cdot t^{-3/2}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\times\left(+\frac{x^2}{4Dt^2}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left[\frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\cdot\frac{x^2}{4Dt^2} - \frac{N_s t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi D}}\right].$$

$$\cdot\ \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\times\left(-\frac{2x}{4Dt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\left[e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\frac{2x}{4Dt}\right)^2 + e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(\frac{-2}{4Dt}\right)\right].$$

$$= \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left[\frac{x^2}{(4Dt)^2} - \frac{1}{2Dt}\right].$$

Ainsi :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left[\frac{x^2}{4Dt^2} - \frac{1}{2t}\right]$$

car $t^{-3/2} = \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$

On reconnaît $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ à un facteur D près :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}.$$

* On remarque par ailleurs que $j_N = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$

$$\Rightarrow j_N = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\times\frac{x}{2t}$$

Donc $-\dfrac{\partial j_N}{\partial x} = -\dfrac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\left[\dfrac{x}{2t}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\cdot\left(-\dfrac{2x}{4Dt}\right) + e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\cdot\dfrac{1}{2t}\right]$

$$= e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left[\frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}\cdot\frac{x^2}{4Dt^2} - \frac{N_s}{2\sqrt{\pi D}\,t^{3/2}}\right] = \frac{\partial n}{\partial t}.$$

- On vérifie que le nombre de particules N est conservé au cours de la diffusion dans tout le matériau :

$$\int_0^{+\infty} n(x,t) S\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} . S\,dx .$$

avec $d\tau = S\,dx$ est le volume du cylindre de section S et de longueur dx.

Donc :
$$\int_0^{+\infty} n(x,t) S\,dx = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}} . S \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx$$

On pose $u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} dx$, donc :

$$\int_0^{+\infty} n(x,t) S\,dx = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}} . S . \underbrace{\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right\}}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{2}} . \sqrt{4Dt}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_s S \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= N_s S .$$

$$= N_{tot} .$$

Q5. On pose : $n(R,t) = \frac{n(0,t)}{e}$.

Or : $n(0,t) = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}}$, donc :

$$n(R,t) = \frac{N_s}{\sqrt{\pi D t}} . e^{-\frac{R^2}{4Dt}} = \frac{N_s}{e . \sqrt{\pi D t}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{R^2}{4Dt}} = e^{-1} .$$

On a donc : $\frac{R^2}{4Dt} = 1$

Soit :

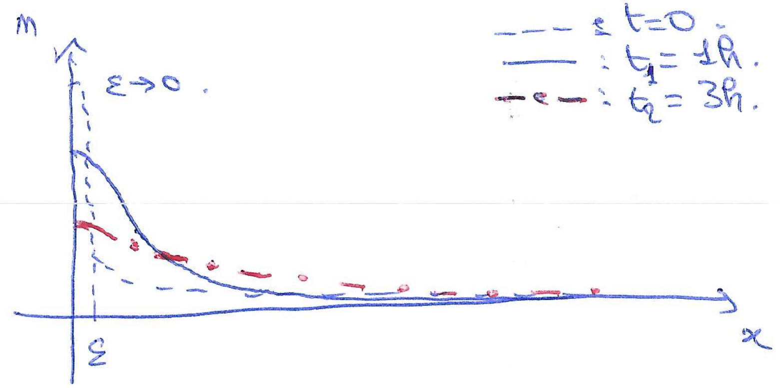
$$R^2 = 4Dt$$

$$\Rightarrow \boxed{R(t) = 2\sqrt{Dt}} .$$

- On donne : $R = 5\ \mu m$ pour $t = 3600\ s$.

Donc : $D = \frac{R^2}{4t} \Rightarrow \boxed{D \simeq 1{,}74 \times 10^{-15}\ m^2.s^{-1}}$

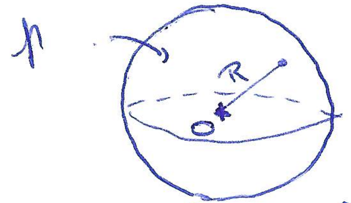
Q6.



⚠ $\begin{cases} n(0,t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}} . \\ R(t) \propto \sqrt{t} . \end{cases}$

Production de neutrons.

TD diffusion de particules.



- p : nombre de neutrons produits par unité de temps et de volume.

1- Équation différentielle : Équation de diffusion avec terme source, géométrique sphérique, dépendant de r :

$$\frac{\partial n_c(r,t)}{\partial t} = D \times \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 n_c(r,t))}{\partial r^2} + p.$$

régime permanent $\Rightarrow$ $\frac{D}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dn_c}{dr}\right) + p = 0.$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dn_c}{dr}\right) = -\frac{p}{D} r^2.$$

On intègre : $r^2 \frac{dn_c}{dr} = -\frac{p}{3D} r^3 + K$ $\quad (r \neq 0)$. $(K = \text{cte } \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \frac{dn_c}{dr} = -\frac{p}{3D} r + \frac{K}{r^2}$$

$$\Rightarrow n_c(r) = -\frac{p}{6D} r^2 + \frac{K}{r} + a \quad (a : \text{cte } \mathbb{R}).$$

La densité ne peut pas diverger quand $r \to 0$: $n_c(r) \underset{r\to 0}{\nrightarrow} +\infty$ donc $K = 0$.

Ainsi : $n_c(r) = -\frac{p}{6D} r^2 + a.$

2- Pour $r > R$, il n'y a plus de termes sources :

$$\frac{\partial n_e(r,t)}{\partial t} = D \times \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial n_e(r,t)}{\partial r}\right).$$

→ régime permanent : $\frac{\partial n_e}{\partial t} = 0$

Donc : $\frac{D}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dn_e}{dr}\right) = 0$

$\Leftrightarrow r^2 \frac{dn_e}{dr} = b$ $\quad b = \text{cte } \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow n_e(r) = -\frac{b}{r} + c$ $\quad c = \text{cte } \mathbb{R}.$

Or, pour $r \to +\infty$: $n_e \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $c = 0$.

Ainsi : $\boxed{n_e(r) = -\frac{b}{r}}$

3- On suppose que la densité de neutrons est continue à l'interface cœur / extérieur :

$$n_c(R) = n_e(R)$$

Donc :

$$-\frac{p}{6D} R^2 + a = -\frac{b}{R}.$$

Par ailleurs, on suppose l'égalité des courants de diffusion en $r = R$:

$$\frac{dn_c(r=R)}{dr} = \frac{dn_e(r=R)}{dr}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{p}{3D} R = \frac{b}{R^2}.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b = -\frac{p}{3D} R^3}$$

et ainsi : $a = -\frac{b}{R} + \frac{p}{6D} R^2 = \frac{p}{3D} R^2 + \frac{p}{6D} R^2$

$$= \frac{p}{2D} R^2.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} n_c(r) = -\frac{p}{6D} r^2 + \frac{p}{2D} R^2 = \frac{p}{6D}(3R^2 - r^2). \\ n_e(r) = \frac{p}{3D} \frac{R^3}{r}. \end{cases}$$

Oxydation du cuivre

q1- Loi de FICK : $\vec{j_d} = -D \frac{dc}{dz} \vec{u_z}$.

En régime permanent : $\Phi = \iint_S \vec{j_d} \cdot \vec{dS} = cste = A$

avec S la surface du métal.

Ainsi : $D \cdot \frac{dc}{dz} \cdot S = \Phi$

$\Rightarrow \quad \frac{dc}{dz} = \frac{\Phi}{DS}$

$\Rightarrow \quad \boxed{C(z) = \frac{\Phi}{DS} z + B}$ B : constante réelle.

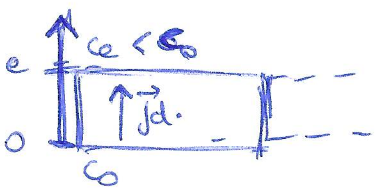
- $C(0) = C_0$ et $C(e) = C_e$, donc :

$$\begin{cases} B = C_0 \\ C_e = \frac{\Phi}{DS} e + C_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\Phi}{DS} = \frac{C_e - C_0}{e}$$

Ainsi :

$$\boxed{C(z) = \frac{C_e - C_0}{e} z + C_0}$$

- $\vec{j_d} = -D \frac{dC(z)}{dz} \vec{u_z} = -D \frac{C_e - C_0}{e} \vec{u_z}$ en régime permanent.



q2- On donne : $de = \gamma j_d dt$.

Donc : $de = \gamma \cdot D \frac{C_0 - C_e}{e} dt$.

$\Leftrightarrow \quad \frac{de}{dt} = \gamma D \frac{C_0 - C_e}{e} = \frac{\alpha}{e}$ avec $\alpha = \gamma D (C_0 - C_e)$

$\Rightarrow \quad e \, de = \alpha dt$

$\Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2} e^2\right) = \alpha dt$

⚠ "e(t)" de part et d'autre du signe "=" ⇒ équation différentielle !

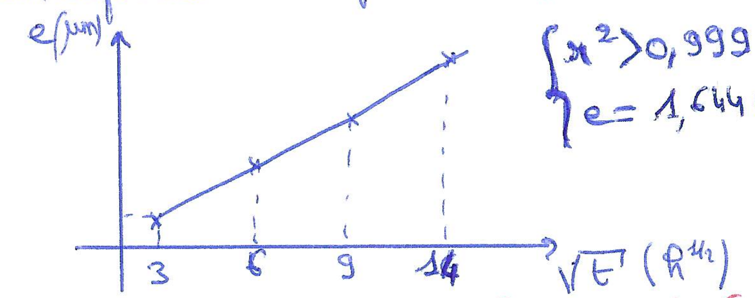
Par intégration de 0 à t, en posant $e(0) = 0$:

$\frac{1}{2} e^2(t) = \alpha t$.

$\Leftrightarrow \quad \boxed{e(t) = \sqrt{2\alpha t}}$.

On retrouve $e \propto \sqrt{t}$ comme prévu pour un processus de diffusion.

q3- On représente $e = f(\sqrt{t})$:



$$\begin{cases} r^2 > 0{,}999 \\ e = 1{,}644 \sqrt{t} + 6{,}83 \times 10 \end{cases}$$

$e \propto \sqrt{t}$: la relation précédente est vérifiée.

Rq : $\sqrt{2\alpha} = 1{,}644 \ \mu m \cdot h^{-1/2} \Rightarrow 2\alpha = 2{,}70 \cdot 10^{-12} \ m^2 \cdot h^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 7{,}50 \times 10^{-16} \ m^2 \cdot s^{-1}}$

q4- On donne $(\Delta m)^2 = \alpha t$. Une évaluation des pentes en $T_1 = 1138 K$ et $T_2 = 1248 K$ donne :

$$\begin{cases} \alpha(1138 K) \simeq \frac{0{,}2}{90} \simeq 2{,}2 \times 10^{-3} \ mg^2 \cdot h^{-1}. \\ \alpha(1248 K) \simeq 1{,}3 \times 10^{-2} \ mg^2 \cdot h^{-1}. \end{cases}$$

soit $\alpha(T_1) \simeq 6{,}1 \times 10^{-19} \ kg^2 \cdot s^{-1}$ et $\alpha(T_2) \simeq 3{,}6 \cdot 10^{-18} \ kg^2 \cdot s^{-1}$

Q5- Loi d'ARRHENIUS :

$$\alpha(T) = \alpha(0)\, e^{-\frac{E_a}{RT}}$$ avec E_a : énergie d'activation du procédé de diffusion.

Ainsi :

$$\frac{\alpha(T_2)}{\alpha(T_1)} = e^{-\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad E_a = -R\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)^{-1} \cdot \ln\left(\frac{\alpha(T_2)}{\alpha(T_1)}\right)$$

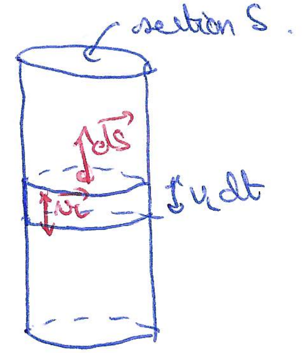
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{E_a = R\left(\frac{T_2 T_1}{T_2 - T_1}\right) \ln\left(\frac{\alpha(T_2)}{\alpha(T_1)}\right)}$$

A.N. : avec $R \simeq 8{,}314 \ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_a \simeq 1{,}91 \ kJ \cdot mol^{-1}}$$

Relation d'Einstein :

Q1-



Pendant dt, le nombre de particules traversant la surface S ~~est~~ égal au nombre de particules présentes dans le cylindre de hauteur $v_L\, dt$; ainsi :

$$\delta N = n(x,t)\cdot S \cdot v_L\, dt = \left(\iint_S \vec{j_1}\cdot\overrightarrow{dS}\right)dt.$$

Donc :

$$\iint_S \vec{j_1}\cdot\overrightarrow{dS} = -j_1 S = n(x,t)\cdot S v_L.$$

$$\Rightarrow \boxed{j_1 = n(x,t)\cdot v_L}$$

Avec $\vec{j_1}$ opposé à l'orientation de la surface ;

$$\vec{j_1}(x,t) = -n(x,t)\cdot v_L \overrightarrow{u_x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{j_1}(x,t) = n(x,t)\cdot \vec{v_L}}.$$

Rq : ce flux est un flux de convection.

Q2- La concentration de particules est décroissante dans le sens de $\overrightarrow{u_x}$. Selon la loi de FICK :

$$\boxed{\vec{j_2} = -D\frac{\partial n}{\partial x}\overrightarrow{u_x}}.$$

avec $\frac{\partial n}{\partial x} < 0$, donc $\vec{j_2}$ orienté selon $+\overrightarrow{u_x}$.

Q3- Le flux de diffusion compense le flux convectif en régime permanent. Ainsi :

$$\vec{j_1} + \vec{j_2} = \vec{0}$$

$$/\overrightarrow{u_x} \Rightarrow -n(x)\cdot v_L - D\frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dn}{dx} + \frac{v_L}{D}n = 0}.$$

Q4- Résolution :

$$n(x) = n(0)e^{-\frac{v_L}{D}x}.$$

On pose $H = \frac{D}{v_L} = \frac{6\pi\eta R D}{m^* g}$:

$$n(x) = n_0 e^{-x/H}.$$

Q5- Les deux expressions doivent être égales :

$$\frac{e_p}{k_B T} = \frac{v_L}{D}x$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{v_L\cdot k_B T}{e_p}x.$$

Or : $e_p = m^* g x$, donc :

$$D = \frac{v_L\cdot k_B T}{m^* g}.$$

Avec l'expression de v_L :

$$\boxed{D = \frac{m^* g}{6\pi\eta R}\times\frac{k_B T}{m^* g} = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}}.$$

Q6- A.N. :

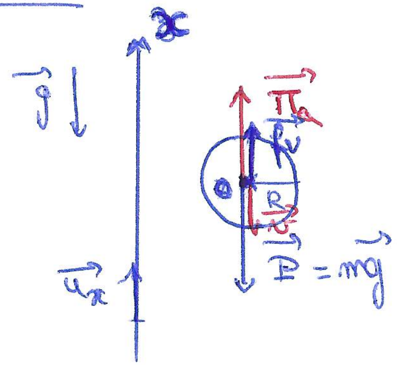
urée : $H_1 = \frac{k_B T}{m^* g} \simeq 1{,}8\times 10^4\ m$

hémoglobine : $H_2 \simeq 16\ m \ll H_1$.

→ agitation thermique insuffisante pour permettre aux grosses molécules de monter dans la colonne.

Q7- • Système : {particule sphérique}

• Référentiel : terrestre supposé galiléen



$\vec{v} = v_x \vec{u_x} + v_y \vec{u_y} + v_z \vec{u_z}$

• Selon le principe fondamental de la dynamique,

$$\vec{P} + \vec{\Pi_a} + \vec{f_v} = m_p \vec{a}$$

avec $m_p = \rho_p \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \rho_p \cdot V_p$

Donc :

$$m_p \vec{g} - \rho V_p \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v} = m_p \vec{a}.$$

En projection selon $\vec{u_x}$:

$$-m_p g + \rho V_p g - 6\pi\eta R v_x = m_p \frac{dv_x}{dt}$$

Or $V_p = \frac{m_p}{\rho_p}$, donc :

$$m_p g \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1\right) - 6\pi\eta R v_x = m_p \frac{dv_x}{dt}.$$

En régime stationnaire, $v_x = v_L = cste$, donc :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

et :

$$-m^* g - 6\pi\eta R v_L = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_L = -\frac{m^* g}{6\pi\eta R}}.$$

d'où :

$$\boxed{\vec{v_L} = -\frac{m^* g}{6\pi\eta R} \vec{u_x}}$$

• En projetant le PFD selon $\vec{u_y}$ et $\vec{u_z}$, avec v_y et v_z les composantes de $\vec{v}$ selon ces axes :

$$\begin{cases} -6\pi\eta R v_y = m_p \frac{dv_y}{dt} \\ -6\pi\eta R v_z = m_p \frac{dv_z}{dt}. \end{cases}$$

Ainsi :

$$v_i(t) = v_i(0) e^{-\overbrace{\frac{6\pi\eta R}{m_p}}^{=\alpha} t} = v_i(0) e^{-\alpha t} \quad (i = \{y, z\})$$

avec $\boxed{\alpha = \frac{6\pi\eta R}{m_p}} > 0$. Au temps long, ces vitesses tendent vers 0.

Diffusion de l'oxygène dans le sang

⚠ $v_s = 2{,}8 \times 10^{-3}\ m.s^{-1}$

1 - Équation de diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_{aq} \Delta n$$

En ordre de grandeur : $\frac{n}{\tau} = D \frac{n}{L^2}$

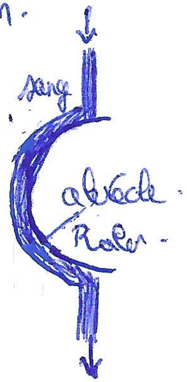
$$\Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{L^2}{D_{aq}}}$$

On peut prendre, en ordre de grandeur, $L \sim 1\,m$.

Donc : $\tau = \frac{1}{10^{-9}} = 10^9\,s$ soit ~ 32 ans.

Ce résultat n'est évidemment pas envisageable, le sang transport l'oxygène dans le corps par convection, et non par diffusion.

2 -



On suppose le capillaire en contact avec la demi-sphère de rayon Ralv. La longueur de contact est donc le demi-périmètre d'un cercle de rayon Ralv : $L = \pi R_{alv}$.

La durée de contact est donc :

$\Delta t_{contact} = \frac{L}{v} = \frac{\pi R_{alv}}{v}$, A.N. : $\Delta t_{contact} = \frac{\pi \times 10^{-4}}{10^{-3}}$

$\Rightarrow \Delta t_{contact} \simeq 0{,}3\ s$.

3 - On suppose que le dioxygène doit traverser l'alvéole par diffusion (alvéole remplie d'air) avant d'atteindre le capillaire.

Diffusion de particules.

Ainsi, le temps de diffusion τ_{air} dans l'alvéole est :

$$\begin{cases} \tau_{air} = \frac{L_{air}^2}{D_{air}} = \frac{R_{alv}^2}{D_{air}} . \\ \tau_{aq} = \frac{L_{aq}^2}{D_{aq}} = \frac{e^2}{D_{aq}} . \end{cases}$$

et $\tau = \tau_{air} + \tau_{aq}$

$= \frac{R_{alv}^2}{D_{air}} + \frac{e^2}{D_{aq}}$

A.N. : $\tau \simeq 0{,}1\ s$.

$\tau < \Delta t_{contact}$: la diffusion du dioxygène de l'alvéole au capillaire peut se faire lors du transit du sang contre l'alvéole

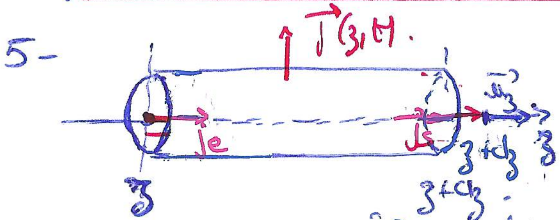
4 - On sait que :

$$\begin{cases} [j] = mol.L^{-2}.T^{-1} \\ [C_c] = [C_{aq}] = mol.L^{-3} \end{cases} \Rightarrow [\gamma] = \frac{[j]}{[C_c]} = L.T^{-1}.$$

γ a la dimension d'une vitesse.

Rq : le vecteur $\vec{j}$ peut être associé à la vitesse moyenne des particules $\vec{v}$ par : $\vec{j} = n\vec{v}$
n : densité volumique de particules.

5 -



Entre z et $z+dz$: il y a une quantité de matière $n(z,t) = C_c(z) \cdot S\,dz$ qui traverse le volume $S\,dz$.

Par ailleurs, le volume $S\,dz$ reçoit un flux entrant de particules en z et perd des particules en $z+dz$.

Entre les deux, des particules ont diffusé vers l'organe via la membrane latérale (densité de courant : j_{diff}) :

$$\begin{cases} j_e(z) = V_s \times C_c(z) \\ j_s(z+dz) = V_s \times C_c(z+dz) \\ j_{diff} = \gamma\,(C_c(z) - C_{org}). \end{cases}$$

Ainsi : $j_e(z) \cdot S + j_s(z) \cdot S - j_{diff} \cdot S_{lat} = \delta^2 N$
$= [n(z, t+dt) - n(z,t)]\,S\,dz$
$= 0$ en régime stationnaire.

Donc : $[C_c(z) - C_c(z+dz)]\,V_s \cdot S - \gamma \cdot 2\pi R\,dz\,(C_c(z) - C_{org}) = 0.$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{dC_c(z)}{dz} V_s S \cancel{dz} + \gamma \cdot 2\pi R \cancel{dz}\, C_c(z) - \gamma 2\pi R C_{org} \cancel{dz} = 0.$

Or : $S = \pi R^2$, donc :

$$\boxed{\frac{dC_c(z)}{dz} + \frac{2\gamma}{V_s R} C_c(z) = \frac{2\gamma}{V_s R} C_{org}.}$$

6- Équation différentielle du 1er ordre à coeff. csts :

$$C_c(z) = K e^{-z/L_0} + C_{org}. \qquad L_0 = \frac{R V_s}{2\gamma}.$$

Or, à $z = 0$: $C_c(0) = K + C_{org} \Rightarrow K = C_c(0) - C_{org}.$

Ainsi :

$$C_c(z) = (C_c(0) - C_{org})\,e^{-z/L_0} + C_{org}.$$

7- $C_c(z) - C_{org} = (C_c(0) - C_{org})\,e^{-z/L_0}.$

$\Rightarrow \quad C_c(L) - C_{org} = (C_c(0) - C_{org})\,e^{-L/L_0}$

Ainsi : $\left|\dfrac{C_c(L) - C_{org}}{C_c(0) - C_{org}}\right| = |e^{-L/L_0}| \geq 0{,}30 \Rightarrow e^{-L/L_0} \geq 0{,}30$

(car $e^{-L/L_0} \leq -0{,}30$.)

Donc : $\ln(e^{-L/L_0}) \geq \ln(0{,}30)$

et $+L \leq -L_0 \ln(0{,}30) \Leftrightarrow L_0 \geq \dfrac{L}{-\ln(0{,}30)}$ soit $\gamma \leq -\dfrac{R V_s \ln(0{,}30)}{2L}$

A.N. :

$$\gamma \leq -\frac{R V_s \ln(0{,}30)}{2L}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma \leq 2 \times 10^{-5}\ m \cdot s^{-1}.$$

Il faut donc $\gamma = 2 \times 10^{-5}\ m \cdot s^{-1}$ maximum si l'on souhaite que l'organe soit correctement alimenté en nutriments.

Centrifugeuse.

q1- $[j_{conv}] = m^{-2}.s^{-1}$

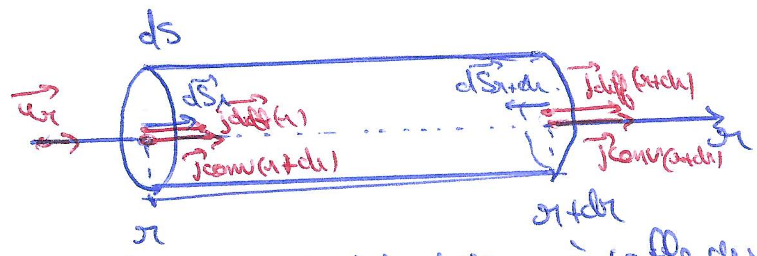
Or : $[c] = m^{-3}$ et $[v_{lim}] = m.s^{-1}$, donc :

$$[c\, v_{lim}] = m^{-2}.s^{-1} = [j_{conv}].$$

On peut proposer la relation :

$$\boxed{\vec{j}_{conv} = c(r,t)\,\vec{v}_{lim}} = s\omega^2 r c\,\vec{u}_r$$

q2- On considère un volume élémentaire de solution, unidimensionnel, de volume $d\tau = r\,dS$ avec dS la section élémentaire du cylindre. La diffusion étant radiale, on se ramène au cas d'un processus décrit en coordonnées cartésiennes où "x" est modifiée en "r" :



Rq: La démonstration est identique à celle du cours dans cette configuration, en prenant $\vec{j}_{tot} = \vec{j}_{diff} + \vec{j}_{conv}$.

Le bilan temporel donne :

$$\delta^2 N = \frac{\partial c(r,t)}{\partial t}.d\tau\,dt.$$

Le bilan spatial donne :

$$\delta^2 N = -\frac{\partial j_{tot}(r,t)}{\partial r}\,d\tau.dt.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{tot}(r,t)}{\partial r}}.$$

La généralisation s'effectue sur un volume $\mathcal{V}$ macroscopique ; on montre alors (cf. cours) que :

$$\frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j}_{tot}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}\left(c\,\vec{v}_{lim} - D\,\overrightarrow{grad}\,c\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}\left(s\omega^2 r\,c(r,t)\,\vec{u}_r - D\,\overrightarrow{grad}\,c\right) = 0}$$

Rq: erreur d'énoncé : $\begin{cases} \text{"} \div \text{"} \Leftrightarrow \operatorname{div} \\ s\omega^2 r\,\vec{u}_r \Rightarrow s\omega^2 r c\,\vec{u}_r. \end{cases}$

q3- $c = c(r,t)$, donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{grad}\,c = \dfrac{\partial c(r,t)}{\partial r}\,\vec{u}_r \\ \operatorname{div}(a\,\vec{u}_r) = \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial(r a)}{\partial r} \end{cases}$$

On pose $a(r,t) = s\omega^2 r\,c(r,t) - D\dfrac{\partial c}{\partial r}$; ainsi :

Ainsi :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}(a\vec{u_r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(s\omega^2 r^2 c(r,t) - rD\frac{\partial c}{\partial r}\right) = 0. \qquad (I)$$

q4- On pose $c(r,t) = c(r)$ (régime permanent).

Ainsi : $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$

et : $(I) \Rightarrow \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(s\omega^2 r^2 c(r,t) - rD\frac{dc}{dr}\right) = 0.$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(s\omega^2 r^2 c(r,t) - rD\frac{dc}{dr}\right) = 0.$$

Donc : $s\omega^2 r^2 c - rD\frac{dc}{dr} = A$

avec A une constante réelle. Or, on sait que $a(r) = j_{tot}(r)$ par définition de a, et $j_{tot}(r_m) = 0$ et $j_{tot}(r_M) = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} a(r_m) = 0 \\ a(r_M) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\omega^2 r_m c(r_m) - D\frac{dc}{dr}(r_m) = 0 \\ s\omega^2 r_M c(r_M) - D\frac{dc}{dr}(r_M) = 0. \end{cases}$$

Ainsi :

$$A = r\left(s\omega^2 r c(r) - D\frac{dc}{dr}\right)$$
$$= r_m\left(s\omega^2 r_m c(r_m) - D\frac{dc}{dr}(r_m)\right)$$
$$= 0.$$

D'où $\boxed{A = 0}$. Ainsi :

$$s\omega^2 r^2 c - rD\frac{dc}{dr} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dc}{dr} = \frac{s\omega^2}{D} r c}. \Rightarrow \frac{dc}{c} = \frac{s\omega^2}{D} r\,dr.$$

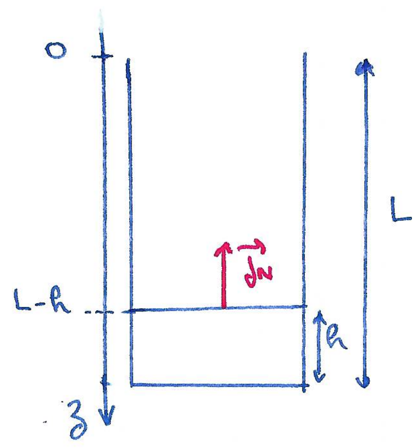
On intègre cette expression de r_m à r :

$$\ln(c(r)) - \ln(c(r_m)) = \frac{s\omega^2}{2D}(r^2 - r_m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{c(r) = c(r_m)\, e^{\frac{s\omega^2}{2D}(r^2 - r_m^2)}}$$

La concentration augmente quand on s'éloigne de l'axe de rotation ($r > r_m$). La séparation des composants du fluide est alors possible, car cet effet dépend des caractéristiques des particules et du solvant via le facteur s.

Evaporation d'Ether



q1- On suppose $h(t) \simeq$ constante.

En régime quasi-permanent de diffusion :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0 = D \cdot \frac{\partial^2 m(z,t)}{\partial z^2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{m(z,t) = A(t) + B(t) z}.$$

avec A et B des constantes de z, mais qui peuvent dépendre de t.

Or : $m(L-h,t) = \frac{P_s \mathcal{N}_A}{RT_0}$ car selon la relation des gaz parfaits :

$$PV = n_m RT = \frac{N RT}{\mathcal{N}_A}$$ avec n_m la quantité de matière d'Ether.

$$\Rightarrow \quad P = \frac{N}{V} \frac{RT}{\mathcal{N}_A} = \frac{m RT}{\mathcal{N}_A}$$ avec $m = \frac{N}{V}$: densité volumique de particules.

Donc : $\boxed{A + B(L-h) = \frac{P_s \mathcal{N}_A}{RT_0}}$.

De plus : $m(0,t) = 0 \Rightarrow A + B \cdot 0 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{A = 0}$.

et donc : $B = \frac{P_s \mathcal{N}_A}{RT_0} \times \frac{1}{L-h(t)}$.

Ainsi :

$$\boxed{m(z,t) = \frac{P_s \mathcal{N}_A}{RT_0} \times \frac{z}{L-h(t)}}.$$

q2- Par conservation de la quantité de matière, le nombre de molécules qui s'évaporent au niveau de l'interface entre t et t+dt est le même que le nombre de molécules qui diffusent à travers cette interface :

$$\delta N_{vap} = -j_N(z = L-h, t) \cdot S\, dt$$ (⚠ δN correspond à une perte $\Rightarrow \iint_S -\vec{j} \cdot d\vec{S}$)

avec $\vec{j_N} = -D\, \overrightarrow{grad}\, m$ (loi de FICK),

donc : $j_N = -D \frac{\partial m}{\partial z}$

et $$\boxed{\delta N_{vap} = +D \cdot \frac{P_s \mathcal{N}_A}{RT_0} \cdot \frac{1}{L-h(t)} S\, dt}$$

q3- La masse volumique de l'Ether est $\mu \cdot d\tau = dm$ avec dm la masse élémentaire contenue dans le volume élémentaire $d\tau$.

Or : $dm = M \cdot dn_m = \frac{M}{\mathcal{N}_A} \cdot dN$ et $d\tau = -S\, dh$, pour une variation de hauteur de liquide dh consécutive à une perte dN de molécules d'Ether.

⚠ $dh < 0$ car h diminue $\Rightarrow d\tau = \underline{\underline{-S dh}}$.

Ainsi : $-\mu \cdot S dh = \frac{M}{\mathcal{N}_A} dN$

Or $dN = \delta N_{vap}$, donc : $-\frac{\mu \mathcal{N}_A S}{M} \cdot dh = D \frac{P_s \mathcal{N}_A S}{RT_0} \cdot \frac{1}{L-h(t)} dt$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{dh}{dt} = \frac{D \cdot M \cdot P_s}{\mu RT_0} \cdot \frac{1}{L-h(t)}.$$

Ainsi :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{DMP_s}{\mu R T_0} \cdot \frac{1}{h(t) - L} .$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(h(t) - L)\frac{dh}{dt} = \frac{DMP_s}{\mu R T_0}} .$$

- On intègre cette expression entre $t = 0$ et t :

$$\int_{h(0)}^{h(t)} (h(t) - L)\, dh = \frac{DMP_s}{\mu R T_0} \cdot t .$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h^2(t)}{2} - L h(t) = \frac{DMP_s}{\mu R T_0} t + \frac{h^2(0)}{2} - L h(0) .$$

- Pour $t = t_f$ t.q. $h(t_f) = 0$, il vient :

$$\frac{DMP_s}{\mu R T_0} t_f + \frac{h^2(0)}{2} - L h(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t_f = \left(L h(0) - \frac{h^2(0)}{2}\right) \times \frac{\mu R T_0}{DMP_s} .$$

A.N. : $h(0) = 15$ cm ; $L = 20$ cm et avec les données de l'énoncé :

$t_f \simeq 4{,}4 \times 10^5$ s soit environ 122,6 heures (un peu plus de 5 jours).

q4- Le temps caractéristique de diffusion est :

$$\tau \simeq \frac{L^2}{D} \quad \text{soit} \quad \tau \simeq 2{,}67 \times 10^3 \text{ s} \ll t_f .$$

On peut donc considérer le processus de diffusion suffisamment rapide pour se placer en régime stationnaire.

Méthode des variables séparées

q1 - Dans cette configuration, l'équation de la diffusion est :

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Or $C(x,t) = C_0 + f(x)\,g(t)$, donc :

$$(1) \Rightarrow \quad f(x).\,g'(t) = D.\,f''(x)\,g(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{g'(t)}{g(t)} = D.\,\frac{f''(x)}{f(x)} \qquad \text{pour } g(t) \text{ et } f(x) \neq 0$$

Cette égalité n'est vérifiée que si les deux membres sont égaux à la même constante α ; ainsi :

$$\begin{cases} g'(t) - \alpha\, g(t) = 0 \\ D f''(x) - \alpha f(x) = 0 \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{g(t) = g(0)\, e^{\alpha t}} \\ f''(x) - \frac{\alpha}{D} f(x) = 0 \end{cases} \qquad g(0) \in \mathbb{R}^* \ (g(t) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R})$$

La solution ne peut pas diverger pour $t \to +\infty$. Il faut donc imposer $\boxed{\alpha < 0}$

Note : $\alpha = 0 \Rightarrow g = cste$, et $f(x) = Ax + B$. $g = cste$ est incompatible avec q2, donc $\alpha \neq 0$.

Ainsi :

$$f''(x) - \frac{\alpha}{D} f(x) = 0$$

On pose $k^2 = -\frac{\alpha}{D}$; ainsi : $f''(x) = -k^2 f(x)$

et $f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

avec A, B des constantes réelles.

Ainsi : $$C(x,t) = C_0 + \left[A g(0) \cos(kx) + B g(0) \sin(kx)\right] e^{\alpha t} \quad (2)$$

q2 - On pose $C(x,0) = C_1 + C_2 \sin(px)$.

Or, selon (2) :

$$C(x,0) = C_0 + A g(0) \cos(kx) + B g(0) \sin(kx).$$

Par identification :

$$\begin{cases} C_0 = C_1 \\ A g(0) = 0 \\ B g(0) = C_2 \\ k = p \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \boxed{A = 0} \\ \Rightarrow p^2 = -\frac{\alpha}{D} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -p^2 D} \end{matrix}$$

Ainsi : $$\boxed{C(x,t) = C_0 + C_2 \sin(px)\, e^{-Dp^2 t}}.$$

Par ailleurs, il faut que $C(x,t)$ respecte (1), donc :

$$-Dp^2 . C_2 \sin(px) e^{pt} = -D . p^2 C_2 \sin(px) e^{pt} \Rightarrow \underline{Ok}.$$

Remarque : en imposant de plus des conditions aux limites périodiques, comme par exemple :

$$C(0,t) = C(L,t) = 0$$

avec L la "taille" du liquide, il vient :

$$\begin{cases} C_0 = 0 \qquad (\text{car } C(0,t) = 0) \\ C_2 \sin(pL)\, e^{-Dp^2 t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Or $C_2 \neq 0$, sinon $C(x,t) \equiv 0 \quad \forall x$ et t. Donc la seule solution est :

$$\sin(pL) = 0 \Rightarrow \boxed{p = \frac{2m\pi}{L}} \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi : $$\boxed{C(x,t) = C_m(x,t) = C_2 \sin\left(\frac{2m\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 D m^2 t}} \Rightarrow \text{infinité de solutions}$$

→ terme m d'une série de FOURIER