

# Chapitre I

## Stabilité des systèmes linéaires

### Pré-requis

- composants électroniques (résistance, bobine, condensateur) ;
- circuits de base (RC, RLC,...) ;
- filtrage analogique ;
- décomposition d'un signal périodique en série de FOURIER.

### Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

### Introduction

En première année, de nombreux phénomènes et dispositifs physiques ont été étudiés : oscillateur harmonique, circuits électriques, milieux réactionnels en chimie... Plusieurs de

ces dispositifs peuvent être décrits comme un **système**.

### Définition : système

Un système est un dispositif qui associe à **un ou plusieurs signaux d'entrée, un ou plusieurs signaux de sortie**.

Exemples de systèmes :

Système	Entrée	Sortie
Œil	Onde électromagnétique (lumière)	Signal électrique (impulsion nerveuse)
Radiateur à eau chaude	Température et débit de l'eau	Énergie thermique
Moteur thermique	Énergie thermique (combustion)	Énergie mécanique (travail)
Téléphone	Voix (ondes sonores)	Signaux électriques, puis onde EM

Un **système électronique** transforme un signal électrique en un autre signal électrique. Dans les chapitres traitant de l'électronique, nous nous placerons dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS).

**Rappel : ARQS**

L'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) revient à négliger les retards liés aux phénomènes de propagation dans un circuit électrique.

**Validité de l'ARQS :** Cette hypothèse est valide pour des signaux de fréquences  $f$  tels que leur **longueur d'onde soit grande devant les dimensions du circuit**  $L$  :  $\lambda = \frac{c}{f} \gg L$ . **A.N. :** pour le réseau électrique français,  $f = 50 \text{ Hz}$  et  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ , donc  $\lambda = 6000 \text{ km}$ . L'ARQS est vérifiée pour les petits circuits électriques de TP.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux systèmes électroniques **linéaires, continus** et **invariants**, ainsi qu'aux conditions de stabilité de ces systèmes.

**1.1 Système continu, linéaire et invariant****1.1.1 Système continu****Définition : système continu**

Un système est **continu** (ou **analogique**) si les signaux d'entrée et de sortie sont définis à tout instant  $t$ . Ces signaux sont alors notés  $e(t)$  et  $s(t)$ .

**Remarque :** lorsque le système n'est pas analogique, il peut être numérique. Il manipule alors des **signaux numériques**, qui sont des signaux discrets de niveaux logiques 0 et 1. Les convertisseurs analogique-numérique (CAN) ou numérique-analogique (CNA) assurent la conversion d'un type de signal à un autre (cf. chapitre échantillonnage et numérisation).

**1.1.2 Système linéaire****Définition****Définition : système linéaire**

Un système linéaire fait correspondre à tout signal d'entrée de la forme  $\sum_{k=0}^N \lambda_k e_k(t)$  un signal de sortie de la forme  $\sum_{k=0}^N \lambda_k s_k(t)$ .

**Généralisation mathématique : application linéaire**

Soit une application linéaire  $A$  telle que  $A(f) = g$  avec  $f_1$  et  $g_1$  des fonctions à valeurs réelles. Alors, pour  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $A(f_1) = g_1$  et  $A(f_2) = g_2$ ,  $A$  est linéaire si et seulement si :

$$A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A(f_1) + \beta A(f_2) = \alpha g_1 + \beta g_2$$

**Exemple 1 :** Vérifier que l'équation différentielle  $\frac{3}{2} \frac{d^3 s}{dt^3}(t) - 5 \frac{ds}{dt}(t) + 3s(t) = 0$  est linéaire.

Soit  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  deux solutions de l'équation différentielle. Si cette équation est linéaire, alors toute combinaison linéaire de  $s_1(t)$  et de  $s_2(t)$  est également linéaire :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{d^3(\alpha s_1 + \beta s_2)}{dt^3} - 5 \frac{d(\alpha s_1 + \beta s_2)}{dt} + 3(\alpha s_1 + \beta s_2) \\ &= \frac{3}{2} \alpha \frac{d^3 s_1}{dt^3} - 5 \alpha \frac{ds_1}{dt} + 3 \alpha s_1 + \frac{3}{2} \beta \frac{d^3 s_2}{dt^3} - 5 \beta \frac{ds_2}{dt} + 3 \beta s_2 = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Cette application est bien linéaire.

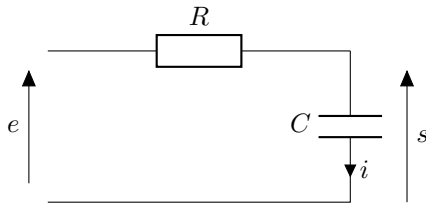
**Exemple 2 :** L'équation différentielle  $\frac{3}{2} \frac{d^3 s}{dt^3}(t) - 5 \frac{ds}{dt}(t) + 3s^2(t) = 0$  est-elle linéaire ? Justifier.

Par le même raisonnement que précédemment, on montre qu'en remplaçant  $s(t)$  par  $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$  l'équation différentielle n'est pas vérifiée. En effet, un terme croisé apparaît, entre autre, lors du développement de  $s^2$  :  $2\alpha\beta s_1(t)s_2(t)$ . L'équation différentielle n'est donc pas linéaire.

On retiendra que les **équations différentielles à coefficients constants** appartiennent à l'ensemble des applications linéaires.

**On considèrera par la suite qu'un système linéaire est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant  $e(t)$  et  $s(t)$ .**

**Exemple de système linéaire :** filtre du premier ordre (filtre RC série) :



Équation différentielle associée à  $s(t)$  :

$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{RC}s(t) = \frac{1}{RC}e(t)$$

### I.1.3 Système invariant

**Définition :** système invariant dans le temps

Un système est dit invariant dans le temps si ses propriétés ne sont pas modifiées au cours du temps.

**Remarque :** ceci n'est bien sûr pas le cas en réalité. Pour être plus rigoureux, il faudrait préciser que les systèmes sont invariants *durant leur durée de vie*.

**Conclusion**

Les systèmes étudiés dans ce chapitre seront toujours considérés linéaires, invariants dans le temps et les signaux qu'ils manipulent continus.

## I.2 Régime sinusoïdal et fonction de transfert

### I.2.1 Rappel : Régime sinusoïdal

**Description**

De nombreux signaux périodiques en physique peuvent être modélisés par **une fonction sinus** (ou cosinus), ou **une combinaison linéaire de ces fonctions**.

**Définition :** signal périodique sinusoïdal

Un signal périodique, de pulsation  $\omega_0$ , s'écrit, sous forme réelle :  $s(t) = S_{moy} + S_{max} \times \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . On note :

- $S_{moy}$  : la valeur moyenne du signal, ou offset ;
- $S_{max}$  : l'amplitude du signal ;
- $\varphi$  : la phase du signal.

Sous la forme complexe, ce signal s'écrit :

$$\underline{s}(t) = S_{moy} + S_{max} \times e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = S_{moy} + \underline{S}e^{j\omega_0 t}$$

avec  $\underline{S} = S_{max}e^{j\varphi}$ .

Dans ce dernier cas, le signal physique est la partie réelle de cette représentation complexe.  $\underline{S}$  est l'amplitude complexe du signal  $\underline{s}$  : son module donne l'amplitude  $S_{max}$ , et son argument donne la phase  $\varphi$ .

**Remarque :** Un signal sinusoïdal est un **modèle mathématique qui n'existe pas dans la réalité**. Il convient cependant bien à une description mathématique, au premier ordre, de nombreux phénomènes physiques périodiques.

**Exemples de signaux périodiques rencontrés en physique :**

- signal électrique, ondes ;
- pendule simple, mouvement d'une planète autour de son étoile ;
- masse oscillante accrochée à un ressort.

**Caractéristiques d'un signal périodique**

On considère un signal  $T$ -périodique  $s(t)$ .

**Définition :** Valeur moyenne ; valeur efficace

- Valeur moyenne temporelle du signal :  $\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$
- Valeur efficace :  $s_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}$

**Exercice : Cas du régime sinusoïdal :** soit la tension sinusoïdale à valeur moyenne nulle  $s(t) = S_{moy} + S_{max} \times \cos(\omega t + \varphi)$ .

**Q1.** Déterminer la valeur moyenne du signal  $s(t)$

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_{moy} + S_{max} \cos(\omega t + \varphi)) dt = S_{moy} + \frac{S_{max}}{2\omega\pi} [\sin(\omega t + \varphi)]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \langle s(t) \rangle = S_{moy}$$

**Q2.** Déterminer la valeur efficace du signal  $s(t)$

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_{moy}^2 + S_{max}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2S_{moy}S_{max} \cos(\omega t + \varphi)) dt}$$

Après calculs (rappel :  $\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi))$ ) :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{S_{moy}^2 + \frac{S_{max}^2}{2}}$$

## 1.2.2 Signal périodique quelconque : représentation spectrale

### Définition : décomposition en série de FOURIER

Soit  $s(t)$  un signal périodique quelconque, de pulsation  $\omega_0$ . On peut décomposer le signal  $s(t)$  en une **série infinie de signaux sinusoïdaux** que l'on appelle **série de Fourier**. Ainsi, le signal  $s(t)$  de fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t))$$

avec :

• $a_0$ : valeur moyenne	• $a_k$ et $b_k$ : coefficients de FOURIER
• $f_0$ : fréquence du fondamental	• $k \cdot f_0, k \in \mathbb{N}$ : (fréquences) harmoniques de rang $k$

Un signal périodique quelconque peut ainsi être traité en s'appuyant sur la linéarité des équations modélisant les systèmes électroniques étudiés dans ce chapitre (principe de superposition). Les valeurs de coefficients de FOURIER conditionnent la forme du signal périodique.

### Exemple : signal triangulaire :

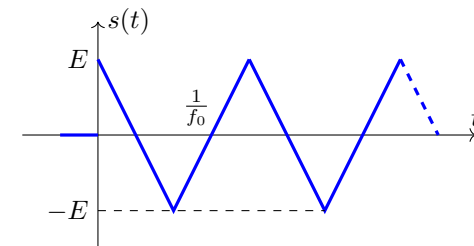
Soit le signal triangulaire périodique de période  $T$ , décrit par la fonction  $s(t)$  telle que :

$$\begin{cases} s(t) = E - \frac{4E}{T}t \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ s(t) = -E + \frac{4E}{T}t \text{ pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}$$

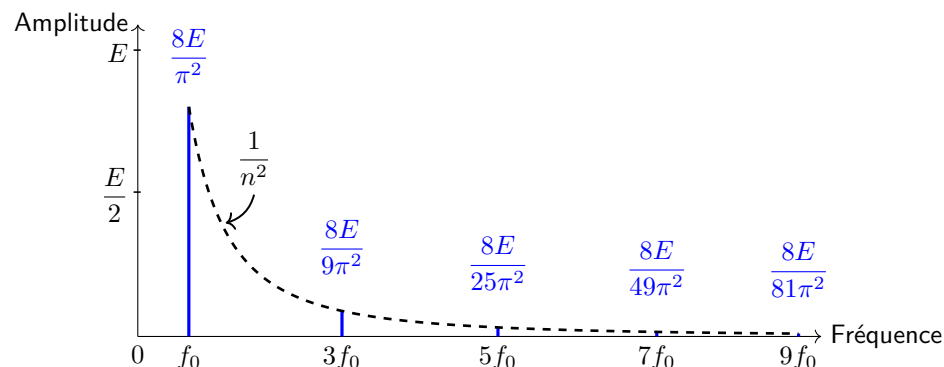
La décomposition en série de Fourier du signal  $s(t)$  est donnée par :

$$s(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t) \text{ avec } f_0 = \frac{1}{T}$$

**Représentation graphique de  $s(t)$  :**

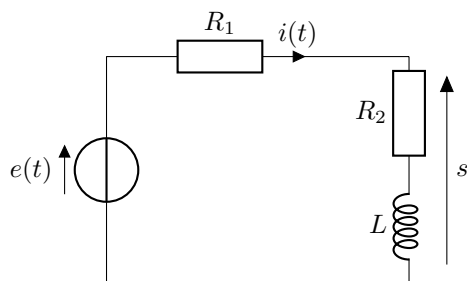


Allure d'un signal triangulaire

Spectre en fréquences de  $s(t)$  :

## I.2.3 Description d'un système électronique - équation différentielle

Des systèmes électroniques ont déjà été abordés en première année ; c'est l'exemple des **filtres analogiques** (passe-haut, passe-bas, passe-bande). Nous allons montrer l'équivalence entre la description d'un système électronique par son équation différentielle ou sa fonction de transfert à travers l'exemple du système électronique suivant :



**Exercice** : Le générateur de tension (GBF) fournit un signal  $e(t)$  sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . Montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution du signal  $s(t)$  au cours du temps est :

$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L}s(t) = \frac{de(t)}{dt} + \frac{R_2}{L}e(t)$$

**Démonstration** : utiliser la loi des mailles et les relations connues entre intensité et tension aux bornes des dipôles :  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ ,  $u_{R_1}(t) = R_1 \times i(t) = e(t) - s(t)$  et  $s(t) = R_2 \times i_2(t) + u_L$ .

**Remarque** : Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à coefficients constants. Le système décrit est donc un système d'ordre 1.

## I.2.4 Description d'un système électronique - fonction de transfert

## Rappel : Fonction de transfert harmonique

La **fonction de transfert harmonique**, ou **transmittance harmonique**, notée  $\underline{H}(j\omega)$  est une représentation mathématique décrivant le comportement d'un système physique soumis à un régime sinusoïdal forcé de pulsation connue. Elle est définie par le rapport entre le signal de sortie  $\underline{s}(t)$  et le signal d'entrée  $\underline{e}(t)$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S}{E}$$

En posant  $j\omega \longleftrightarrow p$ , on retrouve la fonction de transfert de Laplace  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ , qui lie la transformée de Laplace du signal de sortie et celle du signal d'entrée (cf. cours de SI). Il sera par la suite fait mention uniquement de cette dernière sous le nom de fonction de transfert.

**Exercice** : Déterminer la fonction de transfert harmonique du filtre précédent. Solution : on détermine l'impédance complexe équivalente à  $L - R_2$  en série :  $Z_{eq} = jL\omega + R_2$ , puis à l'aide de l'équation du diviseur de tension, on trouve :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_2 + jL\omega}{R_1 + R_2 + jL\omega}$$

## I.2.5 Lien entre équation différentielle et transmittance

En écrivant la fonction de transfert sous la forme d'un rapport entre deux polynômes, le lien avec l'équation différentielle est presque immédiat.

**Exercice :** Établir la relation entre  $e$  et  $s$  à partir de la fonction de transfert. En déduire une équivalence entre les représentations temporelles et fréquentielles du modélisant le filtre.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{R_2 + jL\omega}{R_1 + R_2 + jL\omega} \Leftrightarrow (R_1 + R_2 + jL\omega) \underline{s} = (R_2 + jL\omega) \underline{e}$$

soit :

$$j\omega \underline{s} + \left( \frac{R_1 + R_2}{L} \right) \underline{s} = j\omega \underline{e} + \frac{R_2}{L} \underline{e}$$

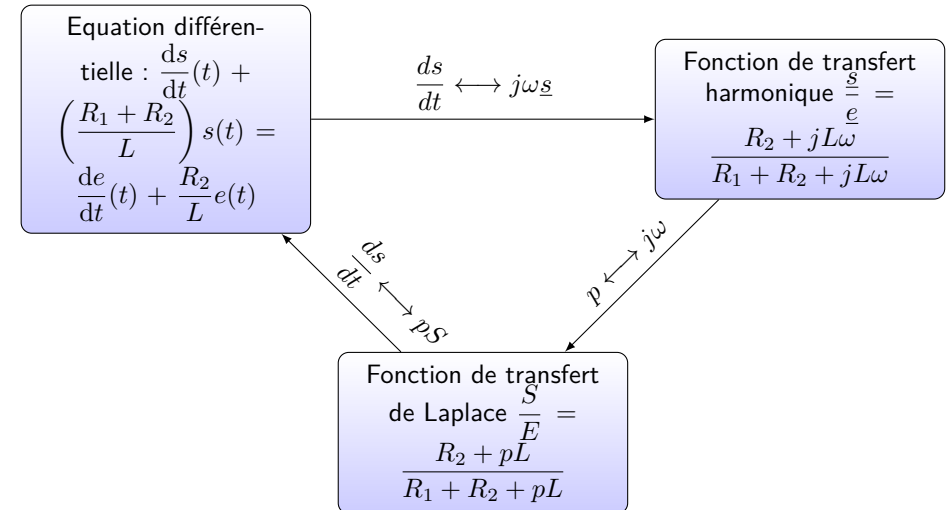
$$\text{or } \frac{ds}{dt}(t) + \left( \frac{R_1 + R_2}{L} \right) s(t) = \frac{de}{dt}(t) + \frac{R_2}{L} e(t)$$

Il est ainsi possible de poser les équivalences suivantes pour passer d'une description à une autre (**à retenir !**) :

$$p \longleftrightarrow j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt} \quad \text{et} \quad p^2 \longleftrightarrow (j\omega)^2 \longleftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}$$

### Conclusion

En résumé, on peut retenir l'organigramme suivant pour passer d'une représentation à une autre :



### Exercice :

- Donner la fonction de transfert harmonique  $\underline{H}(j\omega)$  d'un système décrit par :

$$\alpha \frac{de}{dt}(t) + 3\beta e(t) = \gamma \frac{d^2s}{dt^2}(t) - 2\delta \frac{ds}{dt}(t) + \lambda s(t)$$

**Réponse :**  $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{j\omega\alpha + 3\beta}{(j\omega)^2\gamma - 2j\omega\delta + \lambda}$

- Donner la fonction de transfert de LAPLACE, puis l'équation différentielle d'un système de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

**Réponse :**

— Fonction de transfert de LAPLACE :  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{1 + Q \left( \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)}$

— Équation différentielle :  $\frac{d^2 s}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt}(t) + \omega_0^2 s(t) = H_0 \frac{\omega_0}{Q} \frac{de}{dt}(t)$

### I.3 Stabilité d'un système électronique

#### I.3.1 Définition

**Définition :** stabilité d'un système

Un système physique est dit **stable** si, une fois écarté de sa **position d'équilibre**, il revient à sa valeur initiale sans contraintes extérieures, c'est-à-dire en **régime libre**.

Cette définition, générale, peut être adaptée au cas de l'électronique sous une forme plus intuitive : un système stable en électronique ne doit pas avoir de signal de sortie divergent. Autrement dit, **si le signal d'entrée est borné, le signal de sortie l'est aussi**.

**Remarque :** En pratique, l'amplitude du signal de sortie d'un système électronique instable ne tend pas vers l'infini : il parvient à une valeur fixe nommée **valeur de saturation**. Nous verrons dans un prochain chapitre l'origine de cette saturation.

Nous allons nous intéresser par la suite à la stabilité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2 (seuls exigibles cette année).

#### I.3.2 Stabilité d'un système d'ordre 1

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre, dont la fonction de transfert est la suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{a + j b \omega} \text{ ou } H(p) = \frac{H_0}{a + b p}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles quelconques.

Cette fonction de transfert représente, par exemple, un filtre passe-bas RC d'ordre 1 (mesure de  $s(t)$  aux bornes du condensateur de capacité  $C$ ) en posant  $a = 1$ ,  $H_0 = 1$  et  $b = \tau = RC$ .

**Propriété**

Un système de premier ordre est stable si et seulement si les coefficients du **dénominateur** de la fonction de transfert, pour les termes en  $p^0$  et  $p^1$ , sont de même signe.

**Démonstration :** L'équation différentielle modélisant le comportement d'un tel système est :

$$a s(t) + b \frac{ds}{dt}(t) = H_0 e(t)$$

La solution  $s(t)$  est la somme de deux termes (cf. cours de mathématiques) :

- la solution de l'équation homogène (à second-membre nul), notée  $s_n(t)$  :  $a s_n(t) + b \frac{ds_n}{dt}(t) = 0$ , soit  $s_n(t) = A e^{\left(\frac{-a}{b} t\right)}$ , avec  $A$  une constante réelle déterminée à l'aide des conditions initiales. Cette solution représente physiquement le **régime libre**, pour lequel  $e(t) = 0$ .
- la solution particulière, notée  $s_p(t)$ , de la même forme que l'entrée. Elle représente physiquement le signal permanent.

La solution générale est donc  $s(t) = s_n(t) + s_p(t) = A e^{\left(\frac{-a}{b} t\right)} + s_p(t)$ . Pour qu'un tel système électronique soit stable, il faut que, pour  $e(t)$  bornée,  $s(t)$  soit aussi bornée. Or :

- $s_p(t)$  est de la même forme que  $e(t)$  : elle est donc nécessairement bornée.  
*Exemple : fonction constante,  $\cos(\omega t)$ ,  $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ ...*
- $s_n(t)$  tend vers 0 uniquement si et seulement si  $\frac{a}{b} > 0$ , donc si  $a$  et  $b$  sont de même signe. Dans le cas contraire, la solution est **divergente** et le système **instable**.

En conclusion, un système de premier ordre est stable si et seulement si les coefficients du **dénominateur** de la fonction de transfert, pour les termes en  $p^0$  et  $p^1$ , sont de même signe.

**Remarque :** on montre que la conclusion est la même pour un filtre passe-haut de fonction de transfert  $H(p) = H_0 \frac{\tau p}{a + b p}$ .

### I.3.3 Stabilité d'un système d'ordre 2

#### Propriété

Un système d'ordre deux est stable si et seulement si les coefficients du **dénominateur** de la fonction de transfert, pour les termes en  $p^0$ ,  $p^1$  et  $p^2$ , sont de même signe.

#### Démonstration :

Comme pour l'étude de la stabilité d'un système d'ordre 1, considérons un filtre passe-bas d'ordre 2 dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{H_0}{a + bp + cp^2}$$

où  $c$  est une constante réelle.

L'équation différentielle modélisant ce système est :

$$as(t) + b \frac{ds}{dt}(t) + c \frac{d^2s}{dt^2}(t) = H_0 e(t)$$

Tout comme précédemment, la solution particulière de cette équation différentielle est de la même forme que le signal d'entrée : elle est donc bornée si celui-ci l'est. La stabilité d'un système électronique de second ordre doit donc être étudiée à travers la solution de l'équation à second membre nul  $s_n(t)$  :

$$a \times s_n(t) + b \times \frac{ds_n}{dt}(t) + c \frac{d^2s_n}{dt^2}(t) = 0$$

**Résolution** : on détermine les racines de l'équation caractéristique  $cr^2 + br + a = 0$ , de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ . 3 cas sont possibles :

#### Cas n°1 : $\Delta < 0$ :

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes :  $r_{\pm} = \frac{-b \pm j\sqrt{4ac - b^2}}{2c}$ . Dans ce cas, la solution  $s_n(t)$  est de la forme :

$$s_n(t) = e^{(-\frac{b}{2c}t)} \left( s_1 \cos \left( \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2c} t \right) + s_2 \sin \left( \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2c} t \right) \right)$$

Cette solution reste bornée pour  $\frac{b}{2c} > 0$  : il faut donc que  $b$  et  $c$  soient du même signe. Par ailleurs,  $\Delta < 0 \Rightarrow 0 < b^2 < 4ac$ . Il faut donc que  $a$  et  $c$  soient également du même signe. En conclusion, pour que le système du second ordre ainsi décrit soit stable, il faut

que les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient tous du même signe.

#### Cas n°2 : $\Delta = 0$ :

La racine est alors double :  $r = -\frac{b}{2c}$ . La solution  $s_n(t)$  est alors :

$$s_n(t) = (s_0 + s'_0 t) e^{(-\frac{b}{2c}t)}$$

et la conclusion sur la stabilité est la même que précédemment.

#### Cas n°3 : $\Delta > 0$ :

Les racines sont dans ce cas réelles :  $r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ . La solution  $s_n(t)$  est alors :

$$s_n(t) = s_+ e^{r_+ t} + s_- e^{r_- t}$$

et elle reste bornée à la condition que  $r_+ < 0$  et  $r_- < 0$ . Ceci équivaut à :

- $r_+ + r_- < 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{c} < 0$ , soit  $\frac{b}{c} > 0$  :  $b$  et  $c$  doivent être du même signe.
- $r_+ \times r_- > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} > 0$  : de même,  $a$  et  $c$  doivent être de même signe.

### I.3.4 Conclusion sur la stabilité d'un système de premier ou deuxième ordre

#### Conclusion

Un système électronique est stable si, et seulement si, sa solution homogène (donc son régime libre) s'annule quand  $t \rightarrow \infty$ .

De manière équivalente, **un système est stable si tous les coefficients du dénominateur de sa fonction de transfert sont du même signe.**

Concrètement, la marche à suivre pour vérifier la stabilité d'un système est la suivante : on détermine l'équation différentielle (ou de manière équivalente, la fonction de transfert) représentative du système, puis on détermine les signes des coefficients de l'équation à second membre nul, traduisant le régime libre du système :

- **si les coefficients sont de même signe, le système est stable.**
- **sinon, le système est instable.**



**Remarque : systèmes d'ordre supérieurs à 2**

Dans le cas d'un système d'ordre strictement supérieur à 2, il n'y a pas de règles simples d'analyse mais un critère à appliquer appelé le critère de ROUTH-HURWITZ (hors-programme).

**Exemple :** Déterminer la stabilité des systèmes représentés par les fonctions de transfert suivantes :

Fonction de transfert $H(p)$	$\frac{5}{1+2p}$	$\frac{2p^2}{5+p-p^2}$	$\frac{p}{-2-p-4p^2}$	3. $\frac{(5+p-p^2)}{3p-6p^2}$
Stabilité	<b>stable</b>	<b>instable</b>	<b>stable</b>	<b>instable</b>



# Chapitre II

## Amplificateur Linéaire Intégré

### Pré-requis

- loi des mailles, lois des nœuds, diviseur de tension

### Objectifs

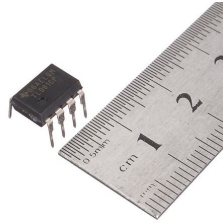
Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie. Limites du modèle : vitesse limite de balayage, saturation de l'intensité du courant de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse. <b>TP</b> : Détecter, dans un montage à ALI, les manifestations de la vitesse limite de balayage et de la saturation de l'intensité du courant de sortie.
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Analyser la stabilité du régime linéaire. Etablir la conservation du produit bande passante du montage non inverseur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
ALI idéal de gain infini en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de forte impédance d'entrée et de faible impédance de sortie.
ALI idéal de gain infini en régime saturé.	Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation. Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Associer, pour un signal d'entrée sinusoïdal, le caractère non-linéaire du système et la génération d'harmoniques en sortie. Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.

## Introduction

L'**Amplificateur Linéaire Intégré (ALI)**, connu également sous le nom d'**Amplificateur Opérationnel ("ampli op", AO)**, est un composant fréquemment rencontré en électronique moderne. Il est l'illustration même des **systèmes physiques à rétroaction**, c'est-à-dire dont la sortie possède une influence sur l'entrée.

Ses propriétés permettent de fabriquer de nombreux composants électroniques complexes, stables comme les suiveurs de tension, les montages inverseurs mais aussi des systèmes instables comme le comparateur à hystérésis. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux caractéristiques générales de l'ALI, et nous étudierons quelques montages fréquemment rencontrés.

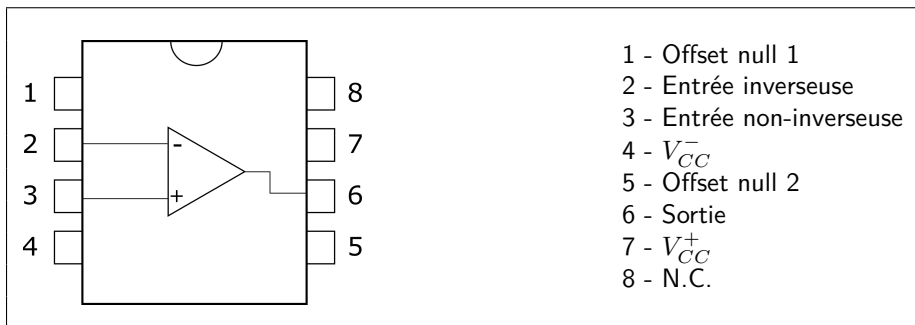


## II.1 Amplificateur linéaire intégré

### II.1.1 Description

L'ALI se présente sous la forme **d'une puce électronique** de dimension standardisée (11 mm x 6,6 mm), avec **8 pattes** dont les fonctions sont fournies par le constructeur. De manière générale, un ALI se présente sous la forme suivante :

Schéma ALI



Le brochage est une partie importante dans l'exploitation expérimentale de l'ALI. Les broches les plus importantes à notre niveau sont :

- Entrée inverseuse, repérée par le signe "-";
- Entrée non-inverseuse, repérée par le signe "+";

- $V_{CC}^-$  et  $V_{CC}^+$  : ce sont les entrées d'alimentation de l'ALI;
- Sortie : connectique sur laquelle peut se lire le signal de sortie de l'ALI.

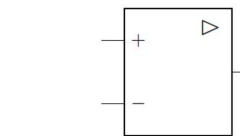
#### Remarque importante : composant actif

Il est important de noter que l'ALI est un composant **actif** : il est nécessaire de l'alimenter pour qu'il soit fonctionnel. La tension d'alimentation est continue, et d'amplitude  $\pm 12V$  ou  $\pm 15V$  suivant les modèles.

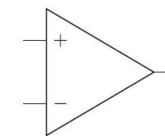
### II.1.2 Représentation électrique

L'ALI est schématisé de la manière suivante :

#### Représentations européenne et américaine de l'ALI



Représentation européenne



Représentation américaine

Les représentations US et EU peuvent être utilisées l'une comme l'autre.

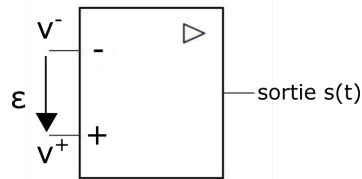
**Remarque importante : l'alimentation de l'ALI n'est pas représentée sur le schéma électrique !**

### II.1.3 Propriétés principales d'un ALI

#### a - Fonction de transfert

Détaillons le schéma de l'ALI :

## Schéma électrique d'un ALI : grandeurs caractéristiques

Définition : entrée différentielle  $\epsilon$ 

La grandeur  $\epsilon$  est l'entrée différentielle : elle correspond à la différence de potentiel entre l'entrée non-inverseuse (+) et l'entrée inverseuse (-) de l'ALI :

$$\epsilon = v^+ - v^-$$

Le principe de l'ALI repose sur l'amplification de cette entrée différentielle. On définit ainsi, en première approche, la fonction de transfert  $A(p)$  de l'ALI, aussi appelée gain différentiel.

## Définition : gain différentiel

## Expression du gain différentiel :

$$A(p) = \frac{S(p)}{\epsilon(p)} = \frac{A_0}{1 + \tau p}$$

avec  $A_0$  le gain statique de l'ALI et  $\tau$  le temps de réponse de l'ALI.

**Nature du filtre modélisé :** Il s'agit d'une fonction de transfert de type passe-bas de premier ordre, avec en ordre de grandeur  $A_0 = 10^5$  et  $\tau = 10^{-3}$  s.

**ATTENTION !** : cette relation n'est valable qu'en **régime de fonctionnement linéaire**.

**Remarque :** la valeur de  $\tau$  est relativement élevée face à d'autres amplificateurs, notamment numériques ( $\tau_{numérique} \simeq 1 \mu\text{s}$ ). L'ALI est un composant "lent", mais de grande stabilité.

## b - Tension et courant de sortie

La tension maximale en sortie d'un ALI n'est pas infinie : elle est limitée par le phénomène dit de **saturation**. Ainsi, la tension de sortie est comprise entre  $\pm V_{sat}$ , où  $V_{sat}$  est la tension de saturation de l'ALI.

## Tension de saturation

La tension de sortie est limitée à l'intervalle  $[-V_{sat}; +V_{sat}]$ . Sa valeur est très souvent celle de l'alimentation continue  $V_{CC}$  de l'ALI, soit 12 V ou 15 V suivant les modèles.

Le courant de sortie est également limité (ordre de grandeur : dizaine de mA).

## c - Résistances d'entrée et de sortie

La résistance d'entrée des voies inverseuse et non-inverseuse est très importante devant les autres résistances classiquement utilisées en électronique, au maximum de quelques  $M\Omega$ . En effet, cette résistance est de l'ordre de  $10^{12} \Omega$  soit 1 T $\Omega$ . Ainsi, pour des tensions  $v^+$  et  $v^-$  de l'ordre de 10 V, les courants  $i^+$  et  $i^-$  associés sont faibles, **inférieurs au nA**.

## Résistances et courants d'entrée d'un ALI

Du fait des valeurs importantes des résistances des entrées inverseuse et non inverseuse de l'ALI, les intensités des courants d'entrée d'un amplificateur opérationnel sont nulles :  $i^+ = i^- = 0$ .

L'application d'une résistance de charge en sortie de l'ALI n'entraîne pas de changement de la tension de sortie  $s(t)$  : ceci n'est possible que si la résistance de sortie de l'ALI est faible. En pratique, elle est même négligeable devant toutes les autres résistances.

## Résistance de sortie d'un ALI

La résistance de sortie d'un ALI est négligeable dans un circuit électronique.

## d - Complément : vitesse de balayage, ou slew rate

L'ALI est un composant dont le comportement dépend de la fréquence du signal en

entrée ; il suit d'autant moins bien les variations des signaux que leurs fréquences sont élevées.

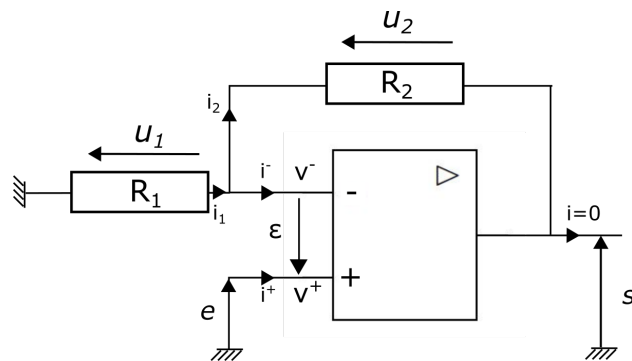
### Définition : Vitesse de balayage (slew rate)

On définit la vitesse de balayage limite d'un ALI comme le temps nécessaire pour faire varier la tension de sortie d'une certaine valeur. Typiquement, un ALI de qualité possède un *slew rate* de l'ordre de  $10 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ . Cela signifie qu'en  $1 \mu\text{s}$ , le signal de sortie varie de  $10 \text{ V}$ .

## II.2 Exemple d'application d'un ALI : l'amplificateur non inverseur

### II.2.1 Présentation du montage

Le schéma de l'amplificateur non inverseur est le suivant :



Le but de cette partie est de décrire les caractéristiques de ce montage en termes de :

- relation entre tensions d'entrée et de sortie ;
- fonction de transfert ;
- stabilité.

### Relation entre signaux d'entrée et de sortie

**Exercice :** À partir des caractéristiques de l'ALI et du schéma du montage, montrer que la tension de sortie  $s(t)$  est liée à la tension d'entrée  $e(t)$  par les relations suivantes :

$$\begin{cases} S(p) &= \frac{A_0}{1+\tau p} \varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) &= E(p) - \frac{R_1}{R_1+R_2} S(p) \end{cases}$$

en formalisme de LAPLACE.

### Démonstration :

1. Tension différentielle : elle est liée aux potentiels des entrées inverseuse et non inverseuse par :  $\varepsilon = v^+ - v^-$
2. Gain de l'ALI en régime linéaire :  $A(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A_0}{1+\tau p}$  en formalisme de Laplace
3. Loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse :  $i_1 = i_2 + i^-$
4. Valeurs de  $i^+$  et  $i^-$  : Résistance d'entrée de l'ALI est suffisamment grande pour écrire  $i^- = i^+ = 0$

### Lois des nœuds en termes de potentiels :

- aux bornes de  $R_1$  :  $u_1 = 0 - v^- = -v^-$  et  $u_1 = R_1 i_1$ , donc  $i_1 = \frac{-v^-}{R_1}$
- aux bornes de  $R_2$  :  $u_2 = v^- - s$  et  $u_2 = R_2 i_2$ , donc  $i_2 = \frac{v^- - s}{R_2}$

**Bilan :** Puisque  $i^- = 0$ , il vient :

$$i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{-v^-}{R_1} = \frac{v^- - s}{R_2} \Leftrightarrow v^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$$

Par ailleurs,  $\varepsilon = v^+ - v^-$  et  $v^+ = e$ , donc :

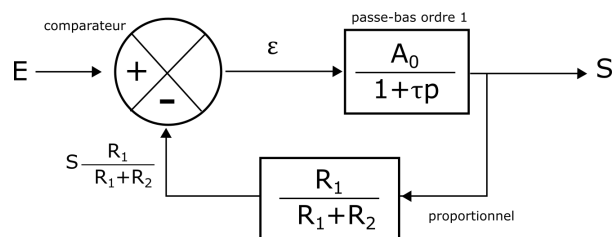
$$\varepsilon = e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$$

. En formalisme de Laplace, nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} S(p) &= \frac{A_0}{1+\tau p} \varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) &= E(p) - \frac{R_1}{R_1+R_2} S(p) \end{cases}$$

Il est possible de retranscrire ce système d'équation sous la forme d'un schéma bloc (ou schéma fonctionnel), associant un soustracteur, un passe-bas du premier ordre et un opérateur proportionnel :

Schéma-bloc : amplificateur non inverseur



On retrouve ainsi le schéma fonctionnel d'un **système bouclé**, avec :

- un comparateur (soustracteur) ;
- une chaîne directe (passe-bas ordre 1) ;
- une chaîne retour (diviseur de tension, ou opérateur proportionnel).

### Étude de la stabilité du système

Pour étudier la stabilité de ce montage, il faut soit déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de signal de sortie  $s$ , soit étudier la fonction de transfert. Les relations entre  $S$  et  $\varepsilon$  étant déjà déterminées, il est plus intéressant de trouver la fonction de transfert.

**Exercice :** Montrer que la fonction de transfert du système s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A_0(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_1 A_0) + (R_1 + R_2)\tau p}$$

À partir des ordres de grandeur des termes intervenant dans son expression, en déduire que l'expression de  $H(p)$  peut être simplifiée pour devenir :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}$$

Si l'on remplace  $\varepsilon(p)$  par son expression dans la première équation du système, il vient :

$$S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} E(p) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{A_0}{1 + \tau p} S(p)$$

soit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{A_0}{1 + \tau p}}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{A_0}{1 + \tau p}}$$

*Remarque :* cette relation se redémontre aussi selon la relation vue en SI :

$$H(p) = \frac{\text{chaîne directe}}{1 + \text{chaîne directe} \times \text{chaîne retour}}$$

Finalement, en simplifiant l'expression précédente (mise au même dénominateur des différents termes de la fraction) :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A_0(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_1 A_0) + (R_1 + R_2)\tau p}$$

Or, nous savons que  $A_0 \gg 1$ , donc  $A_0 R_1 \gg R_1$  et  $A_0 R_1 \gg R_2$  pour  $R_1$  et  $R_2$  du même ordre de grandeur. La fonction de transfert se simplifie donc en :

$$H(p) = \frac{A_0(R_1 + R_2)}{R_1 A_0 + (R_1 + R_2)\tau p}$$

et, en factorisant par  $A_0 R_1$  au numérateur et au dénominateur, nous obtenons la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}$$

qui est la forme canonique d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bas de premier ordre (rappel :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ )

Les coefficients du dénominateur étant tous positifs, nous pouvons en déduire que le montage amplificateur non inverseur est **stable**.

### Conclusion : stabilité du système

La rétroaction sur la borne inverseuse de l'ALI, nommée **rétroaction négative**, est donc **stabilisatrice**.

### Remarque : Pourquoi appelle-t-on ce montage amplificateur non inverseur ?

Car le terme  $1 + \frac{R_2}{R_1}$  est nécessairement supérieur à 1 ; pour un signal continu en entrée, on observe directement que  $s(t)$  est le produit de  $e(t)$  par une constante  $>1$  : le signal est amplifié. Ceci est valable sur une certaine plage de pulsation (filtre passe-bas). L'étude du diagramme de BODE nous renseigne sur l'allure du gain et du déphasage en fonction de la pulsation du signal en entrée.

## II.2.2 Diagrammes de Bode du système

Nous avons déjà reconnu la fonction de transfert d'un passe-bas d'ordre 1. En prenant pour valeurs caractéristiques  $R_1 = 10^3 \Omega$ ,  $R_2 = 10^5 \Omega$ ,  $A_0 = 2 \cdot 10^5$  et  $\tau = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  (valeurs d'un TL081), on obtient les diagrammes de BODE en gain et en phase de l'amplificateur non inverseur suivants :

Diagramme de BODE en amplitude de l'amplificateur non inverseur

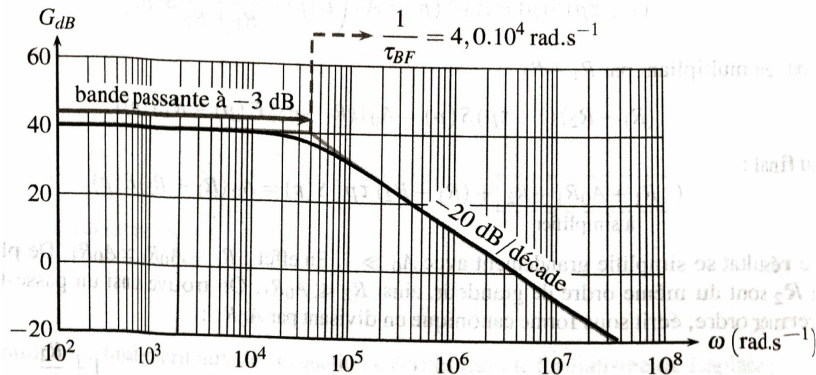
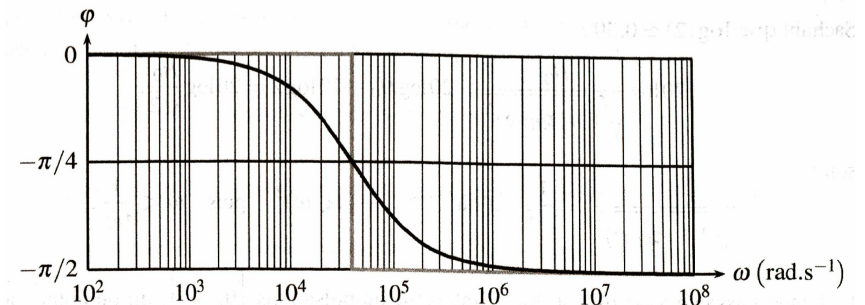


Diagramme de BODE en phase de l'amplificateur non inverseur



Justification des valeurs :  $H_0 = 1 + R_2/R_1 = 101$  donc  $G(\omega = 0) = 20 \log(H_0) \simeq 40$  dB, et  $\omega_0 = \frac{A_0}{(1 + \frac{R_2}{R_1})\tau} \simeq 3,96 \cdot 10^4$  rad.s<sup>-1</sup>

### Définition : Bande passante

À partir d'une certaine valeur de fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 6,3 \cdot 10^3$  Hz, le montage non inverseur intègre le signal d'entrée et le gain chute : **ce montage ne peut être utilisé que dans une certaine plage de fréquence. Cette plage s'appelle la bande passante du système, et se note  $\Delta\omega$ .**

La bande passante est par définition la plage de fréquence dans laquelle le gain est supérieur à -3 dB. Pour un filtre passe-bas, il s'agit donc de l'intervalle  $[0, f_0]$ .

## II.2.3 Compromis gain/bande passante du système

L'utilisation du système précédent est limitée à des pulsations inférieures à la pulsation de coupure  $\omega_0$ . Il n'est pourtant pas rare de travailler avec des signaux d'entrée dont la fréquence dépasse  $10^6$  Hz : le système précédent ne possède pas les caractéristiques nécessaires. Or, nous avons vu que :

$$\omega_0 = \frac{A_0}{(1 + \frac{R_2}{R_1})\tau}$$

Un moyen d'adapter le système est donc de modifier les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  : **plus le rapport  $R_2/R_1$  est faible, plus  $\omega_0$  est grande, et la bande passante du système aussi.**



Cependant, le gain statique du système dépend aussi de  $R_1$  et  $R_2$ . En effet :

$$H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Si le rapport  $R_2/R_1$  diminue, le gain diminue aussi. Le montage amplificateur est alors moins intéressant.

Un compromis doit donc être trouvé entre d'une part, une amplification satisfaisante, et d'autre part une bande passante adaptée aux signaux d'entrée.

Ce compromis se traduit par un produit **gain × bande passante constant**. En effet,  $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{A_0}{(1 + \frac{R_2}{R_1})\tau} = \frac{A_0}{H_0\tau}$ , donc :

$$H_0 \times \Delta\omega = \frac{A_0}{\tau} = \text{constante}$$

**Produit Gain × Bande passante**

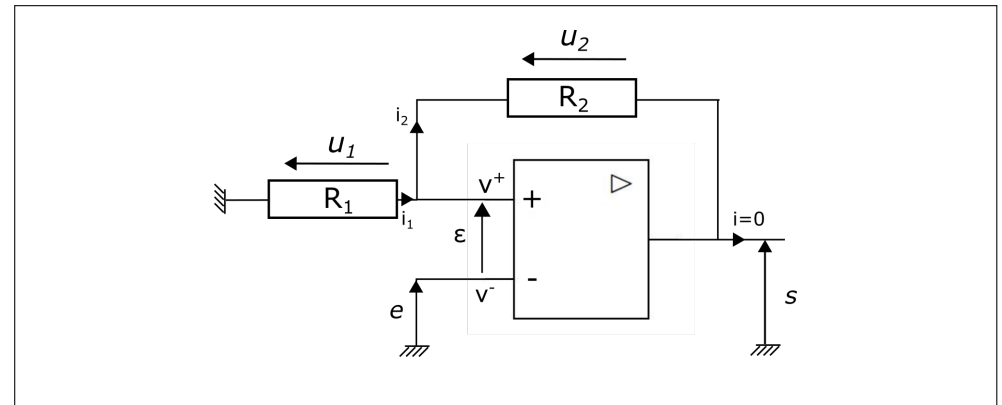
Nous pouvons ainsi généraliser la remarque précédente : **le produit entre le gain statique et la bande passante est constant pour un système d'ordre 1, bouclé par un retour constant.**

Les montages à ALI avec rétroaction sur la borne inverseuse sont stables. Mais qu'en est-il lorsque la rétroaction s'effectue sur la borne non inverseuse ?

## II.3 Un exemple de montage à rétroaction positive : le comparateur à hystérésis

### II.3.1 Schéma électrique du comparateur à hystérésis

Il s'agit du même schéma que celui du montage inverseur, à l'exception de la rétroaction, qui s'effectue cette fois sur la borne non inverseuse (rétroaction positive).



### II.3.2 Fonction de transfert

Il suffit de reprendre les calculs précédents en inversant les rôles de  $v^+$  et  $v^-$ . Ainsi :

$$v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s \quad \text{et} \quad v^- = e$$

On obtient alors :

$$S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \varepsilon(p) \quad \text{et} \quad \varepsilon(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p) - E(p)$$

La fonction de transfert est donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}$$

**Conclusion : stabilité du système**

Les signes des coefficients au dénominateur ne sont pas les mêmes : le montage ainsi réalisé est instable. La rétroaction sur la borne non inverseuse, nommée rétroaction positive, est **déstabilisatrice**.

La sortie devrait alors diverger jusqu'à l'infini ; ceci n'est physiquement pas possible, l'ALI limitant la tension de sortie à  $\pm V_{sat}$ . Ainsi, quelque soit la valeur de la tension d'entrée, la tension de sortie sera toujours  $\pm V_{sat}$  : **l'ALI en rétroaction positive n'est pas un système linéaire.**

## II.4 ALI idéal : limite du gain infini en régime linéaire

### II.4.1 ALI idéal

L'étude du montage non inverseur a montré qu'un ALI réel ne fonctionnait correctement que sur une plage limitée de fréquences, la bande passante. La fonction de transfert de ce montage est, pour rappel :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}$$

Ainsi, le montage amplificateur non inverseur peut ne pas être limité en fréquence à la condition que le gain de l'ALI tende vers l'infini :

$$\lim_{A_0 \rightarrow \infty} H(p) = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

On retrouve alors le comportement amplificateur attendu, sans limite en fréquence.

#### Définition : ALI idéal

**Un ALI idéal est un amplificateur opérationnel dont le gain statique  $A_0$  tend vers l'infini.**

On rajoute alors souvent un symbole " $\gg \infty$ " en haut à droite du symbole électrique de l'ALI pour signifier le comportement idéal de celui-ci.

### II.4.2 ALI idéal dans un montage électrique

La relation entre le signal de sortie et la tension différentielle est toujours  $S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \varepsilon(p)$ . Si  $A_0$  tend vers l'infini, et puisque le signal de sortie est nécessairement borné (régime linéaire, montage stable), il est nécessaire que  $\varepsilon(p)$  tende vers 0.

#### Tension différentielle d'un ALI idéal

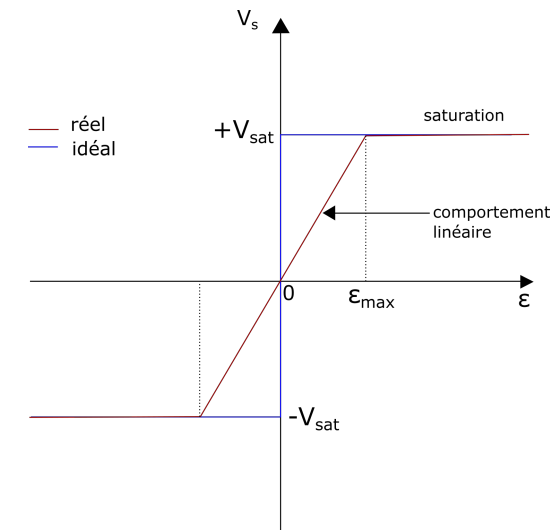
**Un ALI idéal possède une tension différentielle nulle en régime linéaire.**

Ainsi  $v^+ = v^-$  pour l'ALI idéal fonctionnant en régime linéaire. Nous allons désormais pouvoir appliquer cette règle de calcul, sauf indication contraire, à tous les circuits électroniques faisant intervenir des ALI.

### II.4.3 Gain de l'ALI idéal

On représente ci-dessous les caractéristiques d'un ALI réel et d'un ALI idéal. Les portions linéaire et saturée sont précisées.

Caractéristiques d'un ALI réel et d'un ALI idéal



### II.4.4 Retour sur le montage non inverseur

**Exercice :** Montrer que la fonction de transfert du montage amplificateur non inverseur constitué d'un ALI idéal s'écrit :

$$H = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

En considérant un ALI de gain infini fonctionnant en régime linéaire :

$$v^+ = v^- \Leftrightarrow e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$$

La fonction de transfert se résume donc à

$$H = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Il s'agit bien d'un amplificateur non inverseur ( $s$  du même signe que  $e$ ,  $H > 1$ ).

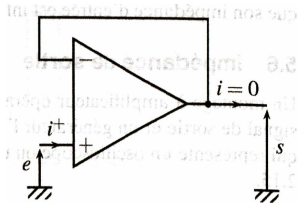
## II.5 Montages remarquables

Dans cette section du cours, nous allons déterminer les fonctions de transfert et les impédances d'entrée des différents dispositifs à ALI, en considérant ces derniers comme idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

### II.5.1 Montage suiveur

Fonction de transfert

Montage suiveur



**Relation entre  $e(t)$  et  $s(t)$  :** Dans ce cas, l'entrée et la sortie sont directement liées par la relation :

$$v^+ = v^- \Rightarrow e(t) = s(t)$$

**Utilité du montage suiveur :** il s'agit d'un **adaptateur d'impédance**. Par construction, la puissance délivrée par le générateur est  $e \cdot i^+$ , soit 0 car  $i^+ = 0$ . De même, la puissance en sortie est nulle en circuit ouvert car le courant  $i$  vaut 0.

Impédance d'entrée

**Définition :** Impédance d'entrée d'un système

L'impédance d'entrée correspond au rapport entre la tension appliquée à l'entrée de ce système et l'intensité du courant d'entrée :  $Z_e = \frac{E}{I_e}$

Dans le cas du montage suiveur,  $E$  étant finie et  $I_e = i^+ \rightarrow 0$  :  $Z_e \rightarrow +\infty$

L'impédance d'entrée du montage suiveur est infinie.

Impédance de sortie

**Définition :** Impédance de sortie d'un système

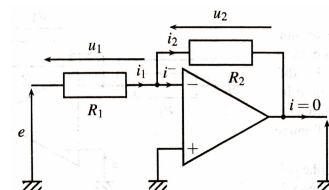
L'impédance de sortie comme le rapport entre la tension du signal de sortie et l'intensité du courant de sortie.

On admet que l'impédance de sortie du montage suiveur est **nulle**.

### II.5.2 Montage inverseur

Fonction de transfert

Montage inverseur



**Relation entre  $e(t)$  et  $s(t)$  :**  $s(t) = -\frac{R_2}{R_1}e(t)$  : amplification (avec inversion) si  $R_2 > R_1$

**Impédance d'entrée**  $Z_e = \frac{e}{i_1}$ . Or  $i_1 = \frac{u_1}{R_1}$  et  $e - v^- = u_1 = e$ , donc :

$$Z_e = R_1$$

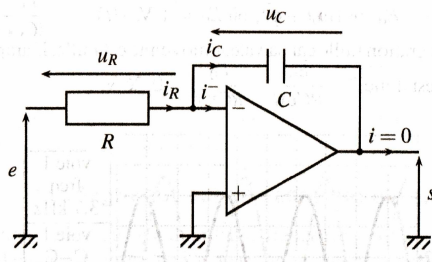
**Impédance de sortie**

$$Z_s = 0$$

### II.5.3 Montage intégrateur

#### Fonction de transfert

##### Montage intégrateur



#### Relation entre $e(t)$ et $s(t)$ :

On travaille en notation complexe. On a :

$$- \underline{u_C} = \underline{v^-} - \underline{s} = -\underline{s} \text{ car } v^- = v^+ = 0$$

$$- \underline{e} - \underline{v^-} = \underline{e} = \underline{u_R} = R \underline{i_R}. \text{ Or, du fait de } i^- = 0, \text{ on a } \underline{i_R} = \underline{i_C} = C \frac{d\underline{u_C}}{dt} = jC\omega \underline{u_C}.$$

Ainsi :

$$\underline{e} = jRC\omega \underline{u_C} = -jRC \underline{s}$$

La fonction de transfert est donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-1}{jRC\omega}$$

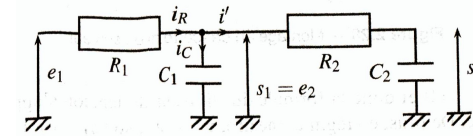
Le montage est donc un intégrateur de signal. L'équation différentielle décrivant l'évolution de  $s(t)$  est en effet :

$$s(t) = -\frac{1}{RC} \int e(t) dt$$

### II.5.4 Mise en cascade de systèmes stables

Lors de la mise en cascade de deux filtres analogiques classiques, la séparation du courant en deux parties rendent les deux filtres dépendants l'un de l'autre. Ainsi, si l'on

associe deux filtres RC différents :



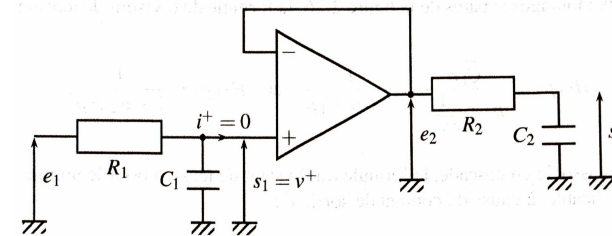
on trouve, après calculs, que la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{S_2(p)}{E_1(p)} = \frac{1}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)p + R_1 R_2 C_1 C_2 p^2}$$

Cette fonction de transfert est différente du produit des fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  de chaque circuit :

$$H_1(p)H_2(p) = \frac{1}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)p + R_1 R_2 C_1 C_2 p^2}$$

Que se passe-t-il si l'on rajoute un montage suiveur entre les deux parties du montage ?



Grâce à la propriété de l'ALI idéal (en régime linéaire),  $v^+ = v^-$ , et au fait que  $i^+ = i^- = 0$ , il vient :  $s_1 = e_2$ , si bien que :

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)$$

On montre de même que grâce à l'impédance nulle en sortie d'un ALI, la fonction de transfert du montage ne dépend pas de l'étage suivant.

**Conclusion : Mise en cascade**

La fonction de transfert d'une association en cascade de filtres d'impédances d'entrée infinies est **le produit des fonctions de transfert de chaque filtre**.

La fonction de transfert totale d'une association en cascade de filtres d'impédances de sortie nulles est **le produit des fonctions de transfert des montages pris séparément**.

On considèrera, sauf indication contraire, que toute mise en cascade d'ALI implique que la fonction de transfert globale du montage est le produit des fonctions de transfert de chaque bloc pris séparément.

**Conclusion du chapitre**

Ce chapitre sur les ALI a été l'occasion d'aborder un nouveau composant électronique, actif, et ses principales caractéristiques : gain, résistances d'entrée et de sortie, tension et courant de sortie, régime linéaire et saturé.

Son utilisation dans des circuits courants à également été discutée. On a ainsi pu mettre en évidence :

- la stabilisation d'un montage en cas de rétroaction sur la borne inverseuse ("-") de l'ALI. Celui-ci fonctionne alors en régime linéaire.
- la déstabilisation d'un montage en cas de rétroaction sur la borne non inverseuse ("+") de l'ALI. Celui-ci fonctionne alors en régime saturé.

Pour chaque mode de fonctionnement, nous avons décrit des montages usuels. L'obtention de leur fonction de transfert se voit grandement simplifiée si l'on considère un ALI idéal, de gain infini fonctionnant en régime linéaire. Les propriétés associées à l'ALI (impédance d'entrée infinie, impédance de sortie nulle) sont exploitées lors de leur association en cascade : la fonction de transfert globale du système est simplement le produit des fonctions de transfert de chaque bloc pris séparément.

Que se passe-t-il désormais si nous appliquons le modèle de l'ALI de gain infini en régime saturé ? C'est, entre autres, l'objet du prochain chapitre traitant des oscillateurs électroniques.



# Chapitre III

## Oscillateurs en électronique

### Pré-requis

- fonction de transfert ;
- ALI ;
- filtrage électronique.

### Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateur quasi-sinusoidal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoidale d'un système linéaire bouclé. Analyser sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. <b>TP</b> : Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoidal et analyser les spectres des signaux générés. <i>Capacité numérique</i> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler l'évolution temporelle d'un signal généré par un oscillateur.

### Notions et contenus

Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis.

Générateur de signaux non sinusoidaux.

### Capacités exigibles

Décrire les différentes séquences de fonctionnement.  
Exprimer les conditions de basculement.  
Déterminer l'expression de la période d'oscillation.

**TP** : Mettre en œuvre un oscillateur de relaxation et analyser les spectres des signaux générés.

## Introduction

Les ALI peuvent être utilisés afin de faire du filtrage actif, de l'amplification de signal, mais aussi des opérations complexes comme des intégrations, dérivations, sommation de signaux. Sous certaines conditions, ils peuvent également être utilisés dans un montage pour générer des signaux périodiques : c'est le cas des oscillateurs quasi-sinusoidaux et des oscillateurs de relaxation que nous allons étudier dans ce chapitre.

## III.1 Oscillateur quasi-sinusoïdal

### III.1.1 Définition

#### Définition : oscillateur quasi-sinusoïdal

Un oscillateur quasi-sinusoïdal est un dispositif électronique constitué de :

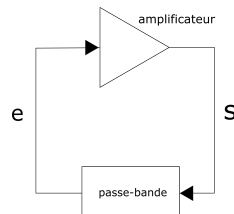
- **un système résonant** : un filtre passe-bande de facteur de qualité élevé pour assurer la stabilité de la fréquence de résonance ;
- **une source d'énergie** pour démarrer et entretenir les oscillations : c'est l'alimentation de l'ALI qui la fournit.

Ces deux parties sont connectées pour constituer un système bouclé.

Un **oscillateur quasi-sinusoïdal** produit une tension sinusoïdale sans avoir besoin de signal d'entrée.

On schématise généralement un système auto-oscillant comme un amplificateur bouclé sur un oscillateur, ici un filtre passe-bande :

#### Schématisation d'un oscillateur quasi-sinusoïdal :



Nous considérerons par la suite un filtre passe-bande d'ordre 2 dont la fonction de transfert s'écrit de manière générale :

$$\underline{B}(j\omega) = B_0 \frac{2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

*Remarque : n'importe quel système résonant (passe-bas ou passe-haut d'ordre 2, passe-bande...) peut-être utilisé pour réaliser un oscillateur.*

### III.1.2 Conditions d'auto-oscillations

#### Démarrage des oscillations : équation différentielle

Pour étudier les conditions sous lesquelles l'une des tensions du montage se met à osciller, il faut **établir l'équation différentielle modélisant ce système**. Nous utilisons pour cela la correspondance entre fonction de transfert d'un système et équation différentielle (cf. chapitre 1 : "Stabilité des systèmes linéaires").

**Exercice** : Soit un circuit amplificateur de fonction de transfert  $\underline{A}(j\omega) = A_0$  indépendante la pulsation du signal oscillant, bouclé sur un circuit résonnant de type passe-bande d'ordre 2. Établir l'équation différentielle portant sur le signal de sortie  $s(t)$  de l'amplificateur. En déduire que les oscillations démarrent dès que  $A_0 B_0 > 1$ . Déterminer la pulsation du signal oscillant correspondant.

**Réponse** : Partons de la fonction de transfert du passe-bande :

$$\underline{B}(j\omega) = \frac{e}{s} = B_0 \frac{2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

L'équation différentielle correspondante est donc :

$$e(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{de}{dt}(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2e}{dt^2}(t) = B_0 \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds}{dt}(t)$$

Or  $\underline{A} = A_0 = \frac{s}{e} \Rightarrow e(t) = \frac{s(t)}{A_0}$ . En injectant cette expression de  $e(t)$  dans l'équation différentielle, on obtient l'équation respectée par la tension  $s(t)$  :

$$s(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} (1 - A_0 B_0) \frac{ds}{dt}(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2}(t) = 0$$

Le système est instable lorsque les coefficients devant les fonctions  $s(t)$  et ses dérivées sont de signes différents, i.e.  $1 - A_0 B_0 < 0 \Rightarrow A_0 B_0 > 1$ .

**Cas limite** :  $A_0 B_0 = 1$ . Dans ce cas, le système est modélisé par l'équation d'un oscillateur harmonique :  $s(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2}(t) = 0$ . La pulsation des oscillations est donc  $\omega_0$ .

On remarque, en divisant l'équation différentielle sur  $s(t)$  par  $A_0$ , qu'on retrouve la même équation différentielle portant sur  $e(t)$  : les signaux  $e(t)$  et  $s(t)$  sont identiques.



**Point méthode :** Pour obtenir la condition de démarrage des oscillations, il faut établir l'équation différentielle portant sur la tension au sein de l'oscillateur.

### Conclusion

Un oscillateur quasi-sinusoidal, constitué d'un passe-bande bouclé avec un amplificateur, oscille à la pulsation caractéristique du passe-bande dès que la condition d'oscillation  $A_0 B_0 > 1$  est assurée.

### Remarque importante : aspects énergétiques

Les oscillations ne viennent pas de nulle part. Elles sont générées sur du bruit dans le circuit, amplifiées par le montage amplificateur. L'énergie nécessaire pour leur génération et leur maintien est fournie par l'alimentation de l'ALI; cette énergie permet notamment de lutter contre les effets dissipatifs de résistances présentes dans le circuit.

### Démarrage des oscillations : critère de Barkhausen

Ce critère permet d'établir le cas limite de démarrage des auto-oscillations obtenu précédemment, en utilisant simplement les expressions des fonctions de transfert du filtre résonnant et du circuit amplificateur.

### Définition : Critère de BARKHAUSEN

Soit  $\underline{A}$  la fonction de transfert de l'amplificateur, de gain statique  $A_0$ , et  $\underline{B}$  la fonction de transfert du passe-bande d'ordre 2 de gain statique  $B_0$  et de pulsation propre  $\omega_0$ . Le critère de BARKHAUSEN indique que le bouclage de ces deux dispositifs fournit un signal de sortie  $s(t)$  de **pulsation**  $\omega_0$  qu'à la condition que  $\underline{A_0} \cdot \underline{B_0} = 1$ .

### Démonstration du critère de Barkhausen :

Le schéma global montré précédemment indique que :

- la fonction de transfert de l'amplificateur est :  $\underline{A}(j\omega) = \frac{s}{e}$
- la fonction de transfert du filtre passe-bande est :  $\underline{B}(j\omega) = \frac{e}{s}$

Ainsi :

$$\underline{A} = \frac{1}{\underline{B}} \Leftrightarrow \underline{A}\underline{B} = 1$$

Ce résultat est connu sous le nom de critère de BARKHAUSEN.

En supposant que l'ALI soit idéal (gain infini), le montage amplificateur possède un gain  $A_0$  réel (et supérieur à 1 en valeur absolue : amplification). En développant le gain  $\underline{B}$ , il vient :

$$\begin{aligned} A_0 \underline{B} &= 1 \\ \Rightarrow A_0 B_0 \frac{2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2j A_0 B_0 \xi \frac{\omega}{\omega_0} &= 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} (1 - A_0 B_0) &= 0 \end{aligned}$$

en regroupant les parties réelles et imaginaires entre elles. La seule solution possible est d'annuler à la fois la partie réelle et la partie imaginaire; le critère de BARKHAUSEN implique donc deux conditions :

- $\omega = \omega_0$
- $A_0 B_0 = 1$

La première condition implique que la pulsation du signal de sortie est **la pulsation de résonance du filtre passe-bande**.

La deuxième condition indique que le gain de la chaîne amplificatrice doit être égal à  $1/B_0$ . Le critère de démarrage  $A_0 B_0 > 1$  ne peut pas être démontré par le critère de BARKHAUSEN seul : on privilégiera l'établissement de cette condition grâce à l'équation différentielle portant sur  $e(t)$  ou  $s(t)$ .

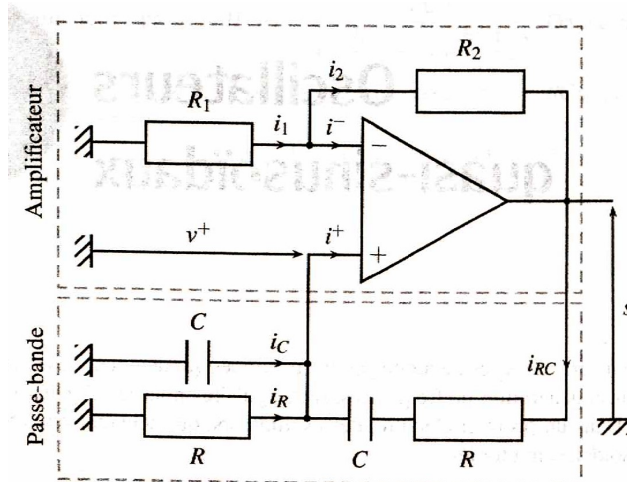
### III.1.3 Exemple : l'oscillateur de Wien

*Manip de cours : oscillateur de WIEN,  $R = R_1 = 1, \text{k}\Omega$ ,  $C = 470 \text{ nF}$  ou  $110 \text{ nF}$ ,  $R_2$  variable (de  $1 \Omega$  à  $10 \text{ k}\Omega$ )*

## Présentation

L'oscillateur de WIEN met en jeu un filtre passe-bande constitué de résistances et de capacités identiques, ainsi qu'un montage amplificateur non-inverseur. Ces deux éléments se retrouvent dans le schéma électrique du montage :

### Schéma électrique d'un oscillateur de Wien



On remarque que  $v^+$  est la tension d'entrée de l'étage amplificateur, de sortie  $s$ , qui elle-même est l'entrée de l'étage de filtrage, de sortie  $v^+$  : le système est bien bouclé, et aucune tension d'entrée issue d'une source externe existe.

**ATTENTION** : la tension  $s$  N'EST PAS la tension de sortie du montage global ! En effet, en régime établi, le signal est le même dans tout le circuit (oscillations quasi-sinusoidales en phase selon l'ARQS). Il n'y a donc pas de sortie définie.

Déterminons la fonction de transfert de chaque montage afin d'établir les conditions d'oscillation du montage global.

### Étage amplificateur :

On montre facilement, avec la loi des nœuds exprimée à l'aide des potentiels, que :

$$V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} S$$

Avec un amplificateur idéal fonctionnant dans son régime linéaire, on a  $v^+ = v^-$ ,

donc :

$$V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} S \Rightarrow A = \frac{S}{V^+} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$A > 1$ , donc l'étage est bien un amplificateur.

### Passe-bande :

Étant donné que  $i^+ = 0$ , nous devons appliquer la loi des nœuds exprimée à l'aide des potentiels sur la relation :  $i_R + i_C + i_{RC} = 0$ . Ainsi :

$$-\frac{V^+}{R} - pCV^+ + pC \frac{S - V^+}{1 + pRC} = 0$$

soit

$$\frac{pC}{1 + pRC} S = \left( \frac{1}{R} + pC + \frac{pC}{1 + pRC} \right) V^+$$

Ainsi, on trouve :

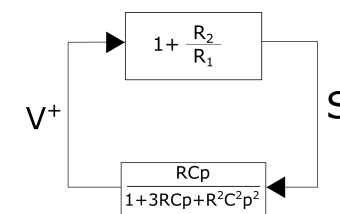
$$B(p) = \frac{V^+}{S} = \frac{pRC}{(1 + RCp)^2 + RCp} = \frac{pRC}{1 + 3pRC + (pRC)^2}$$

qui peut se réécrire sous la forme canonique :

$$B(p) = B_0 \frac{2\xi \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ,  $\xi = \frac{3}{2}$  et  $B_0 = \frac{1}{3}$

**Schéma-bloc** : Le schéma bloc du montage est donc :



**Conditions d'oscillation**

Si l'on applique les résultats généraux obtenus précédemment, le montage précédent ne se met à osciller que si  $A_0 B_0 > 1$ , c'est-à-dire

$$\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) > 1 \Leftrightarrow R_2 > 2R_1$$

Ainsi, dès  $R_2 > 2R_1$ , le système oscille à la pulsation  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ .

*Remarque* : on retrouve ce résultat en établissant l'équation différentielle portant par exemple sur  $v^+$  : en partant de la fonction de transfert du passe-bande :

$$B(p) = \frac{V^+}{S} = \frac{RCp}{1 + 3RCp + R^2C^2p^2}$$

soit  $(1 + 3RCp + R^2C^2p^2)V^+ = RCpS$ . L'équation différentielle correspondante est donc :

$$v^+(t) + 3RC \frac{dv^+(t)}{dt} + R^2C^2 \frac{d^2v^+(t)}{dt^2} = RC \frac{ds(t)}{dt}$$

En injectant la relation  $s(t) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v^+(t)$  dans l'équation différentielle, on obtient l'équation respectée par la tension  $v^+(t)$  :

$$R^2C^2 \frac{d^2v^+(t)}{dt^2} + RC \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{dv^+(t)}{dt} + v^+(t) = 0$$

Il faut donc, compte-tenu des coefficients, que la condition  $2 - \frac{R_2}{R_1} < 0$  soit respectée, c'est-à-dire  $R_2 > 2R_1$ . La condition d'oscillation  $R_2 = 2R_1$  n'est donc qu'une condition limite pour le démarrage des oscillations (système en équilibre instable).

**III.1.4 Allure du signal de sortie****Allure générale****Allure des signaux  $s(t)$  et  $v^+(t)$  et de leurs spectres :**

Tant que le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  est proche de 1, les sorties  $s$  et  $v^+$  possèdent une allure proche d'une sinusoïde, de fréquence égale à la fréquence propre du filtre passe-bande. Leurs amplitudes diffèrent, avec une amplitude à saturation pour le signal  $s$  ( $s_{max} \simeq 15\text{V}$ ), mais pas pour le signal  $v^+$ , pour lequel l'amplitude maximale est inférieure à  $V_{sat}$ .

L'observation des tensions  $v^+$  et  $s$  à l'oscilloscope montre que ces deux signaux **ne sont plus sinusoïdaux** lorsque le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  s'éloigne de 1 : on observe une **distorsion harmonique**. L'analyse de la composition spectrale du signal  $s$  montre que plus le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  est grand, plus le spectre présente d'harmoniques : il y a **enrichissement spectral** ; des fréquences absentes dans le signal d'entrée sont présentes dans le signal de sortie.

**Conclusion** : explication du terme "quasi-sinusoïdal"

On retiendra de manière générale que lors d'un fonctionnement en saturation, le signal de sortie s'enrichit en fréquence ; la saturation introduit la non linéarité dans le système.

Les amplitudes des signaux  $s(t)$  et  $v^+(t)$  sont limitées par la saturation. Ce ne sont pas des sinusoïdes pures, car la saturation provoque un enrichissement spectral : on parle de signaux quasi-sinusoïdaux.

*représentations signaux sous différentes conditions :  $R_2/R_1$  proche de 1, puis de plus en plus éloigné.*

### Complément : Amplitude des oscillations

Lors du démarrage des oscillations, l'équation différentielle décrivant l'évolution de  $s$  dans le temps peut s'écrire (cf. équation conditions de géné) :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} - 2\xi(A_0 B_0 - 1)\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

soit, en posant  $\xi' = \xi(A_0 B_0 - 1)$  :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} - 2\xi'\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

$\xi'$  étant positive, les coefficients de l'équation différentielle ne sont pas tous du même signe : le système est donc instable. La solution  $s(t)$  est donc :

$$s(t) = S_0 e^{\xi'\omega_0 t} \cos(\sqrt{1 - \xi'^2}\omega_0 t + \phi)$$

Ainsi l'amplitude du signal de sortie croît exponentiellement. Cependant, son amplitude va être limitée par la tension de saturation  $\pm V_{sat}$  : ceci explique que l'amplitude du signal  $s(t)$  est limitée (cf. observation à l'oscilloscope).

#### Les non linéarités de l'ALI permettent de limiter l'amplitude des signaux générés par les oscillateurs quasi-sinusoïdaux

On peut noter que le signal  $v^+$  ne présente pas les mêmes caractéristiques que le signal  $s$  : son amplitude est plus faible (on peut vérifier sur l'exemple précédent, que  $v^+ = s \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{V_{sat}}{3} \simeq 5 \text{ V}$ ) ce qui implique un signal non saturé, donc plus sinusoïdal que  $s$ . Ceci est lié au fait que  $v^+$  est issu du filtre passe-bande, centré en  $\omega_0$ , et donc moins riche spectralement que  $s$  : il faut privilégier  $v^+$  si l'on cherche à observer un signal plus sinusoïdal.

## III.2 Oscillateurs de relaxation

Nous avons vu jusqu'à présent comment décrire un montage possédant un ALI, réel ou idéal, fonctionnant en régime linéaire. Que se passe-t-il plus concrètement si la rétroaction s'effectue cette fois sur la borne non inverseuse de l'ALI ?

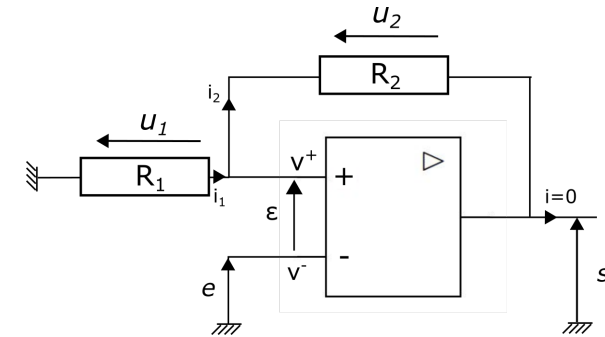
### III.2.1 Comparateur à hystérésis

Lorsque le bouclage de l'amplificateur opérationnel s'effectue sur la borne "+", nous avons vu que le système électronique résultant était instable. Le signal de sortie est saturé et ne prend que deux valeurs :  $\pm V_{sat}$ . Ce comportement, hautement non linéaire, va être exploité pour détailler le fonctionnement du comparateur à hystérésis décrit au chapitre précédent.

### Comparateur "négatif"

On reprend le montage du comparateur à hystérésis déjà présenté :

#### Schéma du comparateur à hystérésis "négatif" :



On a déjà noté que ce montage était instable. Pour étudier l'allure du signal de sortie, il faut respecter les 3 étapes suivantes :

1. le calcul de  $\epsilon = v^+ - v^-$  ;
2. l'écriture de la condition pour avoir  $s = +V_{sat}$  ou  $s = -V_{sat}$  ;
3. la représentation de  $s(t)$  suivant la valeur de  $e(t)$ .

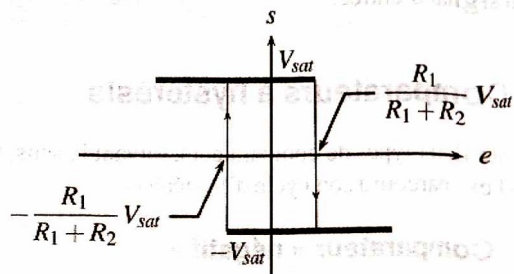
On rappelle que, avec la loi des mailles exprimées en termes de potentiels, :  $v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$ . Par ailleurs :  $\epsilon = v^+ - v^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s - e$

**Conditions pour lesquels  $s = \pm V_{sat}$  :** Déterminons les conditions sur  $e$  pour observer les deux valeurs de  $s$  :

- $\epsilon > 0$ , donc  $s = +V_{sat}$  :  $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} - e > 0$  donc  $e < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$
- $\epsilon < 0$ , donc  $s = -V_{sat}$  :  $-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} - e < 0$  donc  $e > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$

En représentant  $s$  en fonction de  $e$ , on obtient donc le graphe suivant :

**Représentation  $s = s(e)$  :**



**Définition : cycle d'hystérésis**

Cette figure caractéristique porte le nom de **cycle d'hystérésis** : la valeur de  $s$  n'est pas la même pour certaines valeurs de  $e$  suivant "l'histoire" du signal.

**Sens de parcours du cycle**

Pour décrire le sens de parcours du cycle d'hystérésis, il faut se rappeler des conditions pour lesquelles  $s = \pm V_{sat}$ .

On suppose que la tension d'entrée initiale est telle que  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ .

**Tant que**  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  :  
La sortie reste à  $-V_{sat}$

**Pour**  $e < -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  :

La sortie passe de  $-V_{sat}$  à  $+V_{sat}$  et reste à  $+V_{sat}$  tant que  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$

**Pour**  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  :

La sortie passe de  $+V_{sat}$  à  $-V_{sat}$

Partons d'une tension initiale  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ . Tant que  $e$  reste supérieure à  $-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ , la sortie reste à  $-V_{sat}$ . Une fois cette valeur atteinte,  $e$  passe par 0 et la tension bascule :  $s = +V_{sat}$ . On dit que la **commutatrice** de gauche est

parcourue de bas en haut.

La tension  $e$  est cette fois inférieure à  $-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  ; la tension  $s$  est donc égale à  $+V_{sat}$ . Lorsqu'on augmente la tension  $e$ , il faut attendre d'atteindre la valeur  $e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  pour observer de nouveau le basculement, de  $+V_{sat}$  à  $-V_{sat}$  : la **commutatrice** de droite est parcourue de haut en bas. Ces droites verticales ne peuvent être parcourues que dans un sens (contrairement aux droites horizontales, parcourues dans les deux sens).

Ainsi, en cas d'alimentation par une tension sinusoïdale, on observe que le cycle est parcouru dans le sens opposé au sens trigonométrique, d'où le nom de "comparateur à hystérésis négatif".

**Effet mémoire**

**Définition : effet mémoire**

La tension de sortie est "bloquée" à  $\pm V_{sat}$  tant que  $e$  ne sort pas de l'intervalle  $\left[-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}; \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}\right]$ . On parle alors de **fonction mémoire**.

**Exercice : Comparateur à hystérésis "positif"**

On reprend l'étude précédente, en injectant  $e$  dans la borne "+" de l'AO. La tension  $v^-$  est donc nulle.

- Q1.** Tracer le cycle d'hystérésis de ce montage. Donner l'intervalle de valeurs de  $e$  pour lequel la fonction mémoire de ce montage est observé.
- Q2.** Déterminer le sens de parcours des commutatrices.
- Q3.** Justifier l'appellation "comparateur à hystérésis positif".

**Réponses :**

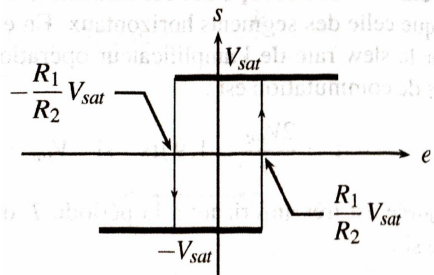
**Q1.** En inversant les rôles de  $v^+$  et  $v^-$  dans les expressions précédentes, on trouve que :

$$\epsilon = \frac{R_2 e + R_1 s}{R_1 + R_2} - 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} - \epsilon > 0, \text{ donc } s = +V_{sat} : \frac{R_2 e + R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} > 0 \text{ donc } e > -\frac{R_1}{R_2} V_{sat} \\ - \epsilon < 0, \text{ donc } s = -V_{sat} : \frac{R_2 e - R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} < 0 \text{ donc } e < \frac{R_1}{R_2} V_{sat} \end{aligned}$$

Le cycle est donc le suivant :



et l'intervalle pour lequel on observe la fonction mémoire est  $e \in \left[ -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}; \frac{R_1}{R_2} V_{sat} \right]$ .

**Q2.** L'étude précédente peut être reprise en changeant les valeurs de commutation : on part de  $e < -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$  par valeur croissante.  $s$  reste alors égale à  $-V_{sat}$ , jusqu'à ce que  $e = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$  où il y a passage de  $-V_{sat}$  à  $+V_{sat}$  (commutation de bas en haute). L'inverse s'observe pour le commutateur de gauche (haute en bas).

**Q3.** Le cycle d'hystérésis est décrit dans le sens trigonométrique : il s'agit donc d'un montage "comparateur à hystérésis positif" (repérable par  $e$  injectée par borne +)

### Reconnaître un comparateur à hystérésis

#### À retenir : structure du comparateur à hystérésis

Un comparateur à hystérésis se reconnaît par **son bouclage purement résistif** sur la voie non inverseuse de l'ALI.

### Complément important : comparateur simple

#### Schéma d'un comparateur simple

Que se passe-t-il en cas d'absence de rétroaction de l'ALI? Dans ce cas, l'équation différentielle qui décrit l'évolution du système est directement obtenue par la fonction de transfert propre de l'ALI :

$$\frac{S(p)}{\epsilon(p)} = \frac{A_0}{1 + \tau p}$$

$$\text{soit } \tau \frac{ds}{dt} + s = A_0 e \epsilon$$

Si on suppose  $\epsilon = \epsilon_0$  constant, la solution de cette équation est  $s(t) = C e^{-t/\tau} + A_0 \epsilon_0$ , ce qui tend vers  $A_0 \epsilon_0$  au bout de  $5\tau$  environ (régime permanent). Du fait de la valeur de  $A_0$  ( $\simeq 10^5$ ),  $s(t)$  arrive à  $+V_{sat}$  dès que  $\epsilon_0 > 100 \mu\text{V}$ , ce qui est toujours vérifié en pratique. De même,  $s(t) = -V_{sat}$  pour  $\epsilon_0 < -100 \mu\text{V}$ .

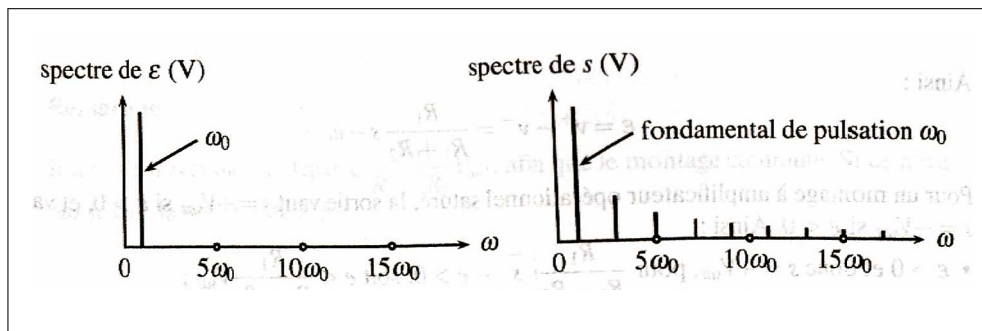
**On en déduit qu'un ALI sans rétroaction est un système instable : il sature.**

Pour une entrée  $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$  branchée sur l'entrée non inverseuse de l'ALI, et la borne "-" mise à la masse, on trouve la loi entrée-sortie du comparateur simple :

- $s = +V_{sat}$  pour  $\epsilon > 0$  ;
- $s = -V_{sat}$  pour  $\epsilon < 0$ .

#### Allure des signaux $e(t)$ et $s(t)$ et de leurs spectres :

Le signal sinusoïdal se transforme donc en signal créneau d'amplitude  $\pm V_{sat}$ . Ceci signifie que le comparateur simple joue également le rôle **d'enrichisseur spectral** : il y a génération d'harmoniques au passage du comparateur simple.



Ceci prouve bien **qu'un système non linéaire enrichi le spectre du signal de sortie de fréquences absentes du signal d'entrée.**

### III.2.2 Générateur de signaux

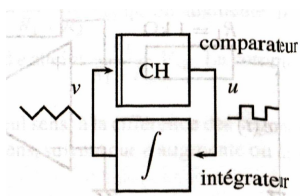
#### Description

Un comparateur à hystérésis permet de générer un signal pouvant varier brutalement d'une valeur de tension à une autre, à partir du moment où la tension d'entrée est suffisamment haute ou basse.

Afin d'obtenir des oscillations, il est nécessaire de coupler le comparateur à hystérésis à un **intégrateur**, ce qui permet de générer un **signal triangulaire à partir du signal carré du comparateur.**

#### Schéma-bloc de l'oscillateur de relaxation

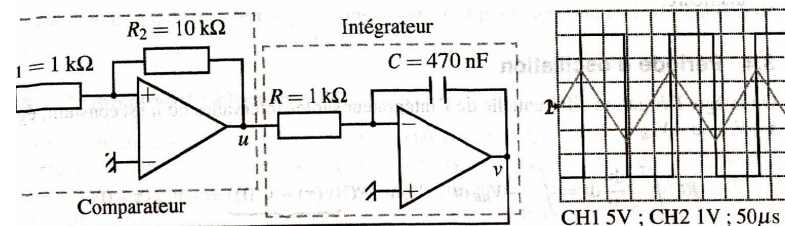
Le schéma bloc résumant ce bouclage est donné ci-dessous :



#### Générateur de signaux : exemple

Nous allons étudier le comportement du montage ci-dessous, l'un des générateurs les plus simples basés sur ce principe :

#### Schéma électrique de l'ensemble comparateur-intégrateur



#### Séquences de fonctionnement

#### Équation différentielle :

La fonction de transfert qui régit l'intégrateur est :

$$H(p) = \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{-1}{RCp}$$

(se démontre facilement en considérant ALI idéal :  $v^+ = v^- = 0$ ). L'équation différentielle est donc :  $RC \frac{dv}{dt} = -u$

#### Expressions de $v(t)$ :

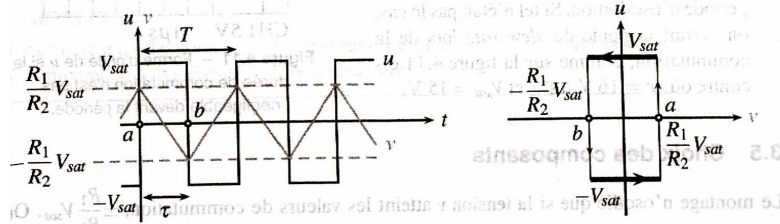
Pour décrire le fonctionnement de ce dispositif, nous commençons par supposer que la commutation de  $-V_{sat}$  à  $+V_{sat}$  vient d'être faite.

Pour  $u = +V_{sat}$ ,  $v(t) = -\frac{V_{sat}}{RC}t + cste$  : l'amplitude de la sortie diminue jusqu'à ce que  $v = -\frac{R_1}{R_2}V_{sat}$ , valeur à partir de laquelle le comparateur commute et  $u = -V_{sat}$ . On reprend alors le raisonnement précédent :  $v(t) = +\frac{V_{sat}}{RC}t + cste'$  jusqu'à  $v = \frac{R_1}{R_2}V_{sat}$  où la commutation à de nouveau lieu et  $u = +V_{sat}$ , etc.

Nous pouvons ainsi représenter les allures des tensions  $s(t)$  et  $v(t)$  :



### Représentations graphiques de $s(t)$ et $v(t)$ :



### Période d'oscillation de l'oscillateur de relaxation

**Exercice :** à partir des expressions précédentes de  $v(t)$ , montrer que la période des oscillations  $T$  est donnée par :

$$T = 4 \frac{R_1}{R_2} RC$$

Pour obtenir la période  $T$  des signaux  $u$  et  $v$ , nous allons intégrer l'équation différentielle sur la durée  $\tau$  pendant laquelle  $u = V_{sat}$  par exemple :

$$\int_0^\tau RC \frac{dv}{dt} dt = \int_0^\tau -V_{sat} dt$$

soit  $RC(v(\tau) - v(0)) = -V_{sat}\tau$ . Les valeurs de  $v(\tau)$  et  $v(0)$  sont lues sur le cycle d'hystérésis :  $v(\tau) = -\frac{R_1}{R_2}V_{sat}$  et  $v(0) = \frac{R_1}{R_2}V_{sat}$ . Ainsi :  $\tau = 2\frac{R_1}{R_2}RC$ .

Par ailleurs, en refaisant les calculs sur  $[\tau, T]$ , on trouve :  $T - \tau = 2\frac{R_1}{R_2}RC$  également.

Au final :

$$T = 4 \frac{R_1}{R_2} RC$$

et  $\tau$  correspond à la demi-période des signaux.

*Autre méthode :* On a supposé qu'à  $t=0$ ,  $u(0) = +V_{sat}$  et pour  $t \in [0, \tau]$ ,  $v(t) = \frac{-V_{sat}}{RC}t + cste$ . Ainsi :  $v(0) = cste = \frac{R_1}{R_2}V_{sat}$  et  $v(\tau) = \frac{-V_{sat}}{RC}\tau + cste = -\frac{R_1}{R_2}V_{sat}$ .

Ainsi :  $\frac{-V_{sat}}{RC}\tau + \frac{R_1}{R_2}V_{sat} = -\frac{R_1}{R_2}V_{sat} \Leftrightarrow \tau = 2\frac{R_1}{R_2}RC$ . On effectue le même

raisonnement pour  $t \in [\tau, T]$  et l'on trouve :  $T = 2\tau = 4\frac{R_1}{R_2}RC$ , qui est la période de l'oscillateur.

### Contraintes sur les composants

Pour s'assurer d'observer des oscillations, il faut que la tension  $v$  atteigne des valeurs de  $\pm \frac{R_1}{R_2}V_{sat}$ . Cependant,  $|v| < V_{sat}$  car  $v$  est la tension issue d'un ALI, donc nécessairement inférieure ou égale à la tension de saturation.

Au final, il faut donc respecter la condition :  $\frac{R_1}{R_2}V_{sat} < V_{sat} \Rightarrow R_1 < R_2$ .

### Conclusion générale

Il est possible d'employer des ALI afin d'obtenir des dispositifs oscillants. Voici les points essentiels à retenir :

- oscillateurs quasi-sinusoidaux : couplage amplificateur/passe-bande, critère de BARKHAUSEN, condition de démarrage des oscillations (système instable) ;
- oscillateurs de relaxation : couplage comparateur à hystérésis et intégrateur, obtention des oscillations, séquences de fonctionnement, période d'oscillation.