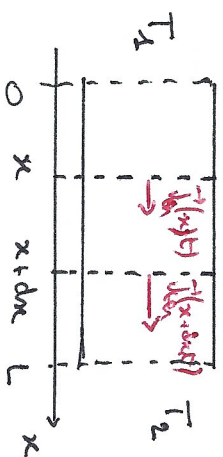


Production d'entropie par diffusion thermique

• La diffusion thermique est un processus d'échange d'énergie thermique irréversible. Cette irréversibilité se traduit par une création d'entropie.

• Soit un matériau indéformable au contact de deux thermostat de températures T_1 et T_2 . On suppose que la propagation de l'énergie thermique est unidimensionnelle selon son axe (Ox).



On considère une tranche de matériau au centre entre x et $x+dx$ et de volume $dv = A dx$ (A : section du matériau).

Par application du premier principe de la thermodynamique à ce milieu indéformable, la variation d'énergie interne dU entre deux instants t et $t+dt$ est liée à la quantité d'énergie

$$dU = \delta Q$$

transférée par cette thermique δQ par : $dU = \delta Q$. La température $T(x,t)$ est définie à l'équilibre thermodynamique local (ETL). Dans ce cas, la relation $dU = \delta Q$ peut s'écrire :

$$dU = T dS$$

avec dS la variation d'entropie du système lors du processus de diffusion thermique.

La relation précédente peut s'écrire :

$$du \cdot dt = T du \cdot dt \Rightarrow du = T ds$$

où $u(x,t)$ et $s(x,t)$ sont les grandeurs volumiques. À l'ETL, T est constante et nous donne donc :

$$du = T ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t}$$

Par ailleurs, $\delta Q = \phi(x,t) dt - \phi(x+dx, t) dt$
 $\Rightarrow \delta Q = - \frac{\partial j}{\partial x} A dx dt$

avec $\vec{j}(x,t)$ le vecteur densité de courant thermique et $\phi(x,t) = \int_A \vec{j}(x,t) \cdot d\vec{S} = j(x,t) A$ la puissance thermique chimique :

$$dU = \delta Q = - \frac{\partial j}{\partial x} A dx dt$$

$$\Rightarrow du = - \frac{\partial j}{\partial x} dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x} \quad (\text{équation de la continuité})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{1}{T} \frac{\partial j}{\partial x}$$

On voit bien d'entropie effluée dans la tranche de matériau par un flux d'entropie :

• Bilan temporel : $dS = s(x,t+dt) dt - s(x,t) dt = \frac{\partial s}{\partial t} dt dx$

• Bilan spatial : $dS = \frac{\phi(x,t)}{T(x,t)} dt - \frac{\phi(x+dx, t)}{T(x+dx, t)} dt + \sigma_s dt dx$

avec $\sigma_s(x,t)$ la source de production volumique d'entropie.

$$\Rightarrow dS = \left(\frac{j_{\text{ex}}(x,t)}{T(x,t)} - \frac{j_{\text{ex}}(x+dx,t)}{T(x+dx,t)} \right) A dx + \sigma_s dx = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{\text{ex}}}{T} \right) A dx + \sigma_s dx$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial x} A dx dt = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{\text{ex}}}{T} \right) A dx dt + \sigma_s A dx dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{\text{ex}}}{T} \right) + \sigma_s$$

(Forme locale des conditions aux limites)

Rq: σ_s étant un terme de création d'entropie (par unité de volume et de temps), il s'ajoute mécaniquement $\sigma_s \geq 0$:

- $\sigma_s > 0$ Non-équilibre
- $\sigma_s = 0$ à l'équilibre.

À l'aide de la relation $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{T} \frac{\partial j_{\text{ex}}}{\partial x}$:

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial j_{\text{ex}}}{\partial x} = -\frac{1}{T} \frac{\partial j_{\text{ex}}}{\partial x} - j_{\text{ex}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) + \sigma_s$$

$$\Rightarrow \sigma_s = j_{\text{ex}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right)$$

Par ailleurs, selon la loi de Fourier : $\vec{j}_{\text{ex}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$

Ainsi : $\sigma_s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \left(-\frac{1}{T^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x}$

$$\Rightarrow \sigma_s = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2$$

Bilan d'entropie intégré sur le temps :

Le bilan fort d'énergie par unité thermodynamique peut être écrit à l'échelle x et à l'instant t par :

$$Q(t) = \int_0^t \phi(x,t) dt' = \int_0^t -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} A dt'$$

noté, par unité de surface :

$$Q_s(t) = \frac{Q(t)}{A} = \int_0^t -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dt' \quad (\text{en } J \cdot m^{-2})$$

l'entropie échangée en x par unité de surface n'est donc :

$$S_e(t) = \frac{1}{A} \int_0^t \frac{\phi(x,t)}{T(x,t)} dt' = \int_0^t -\frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x} dt' \quad (J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2})$$

car $\phi(x,t) = j_{\text{ex}}(x,t) A = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) A$.

La densité d'entropie créée à l'échelle x (par unité de volume) est :

$$S_p(t) = \int_0^t \sigma_s dt' = \int_0^t \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dt' \quad (J \cdot K^{-1} \cdot m^{-3})$$

La conservation du profit de température permet donc de retrouver

Q_s , se et S_p à l'instant t .