Dérivation partielle

1 Dérivée partielle d'ordre 1 d'une fonction de n variables

Soit f une fonction qui, à un couple de variables (x, y) associe $f(x, y)$. On définit la dérivée partielle de f en x, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, la fonction dérivée de f par rapport à x en gardant y constante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Dans le cas où la limite n'existe pas, on dit que la fonction f n'est pas partiellement dérivable par rapport à x en (x, y).

De même, la dérivée partielle de $f(x, y)$ en y est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Cela revient à dériver $f(x, y)$ par rapport à y en gardant x constante.

Dans le cas où la limite n'existe pas, on dit que la fonction f n'est pas partiellement dérivable par rapport à y en (x, y).

Cette définition s'étend aisément à toute fonction de n variables. La dérivée partielle de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ par rapport à x_n est obtenue en dérivant la fonction f par rapport à x_n en maintenant les $n - 1$ autres variables constantes.

Exemples : Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

Q1. dérivées partielles en x et en y de $f(x, y) = 3x + 2y$;

Q2. dérivées partielles en x et en y de $f(x, y) = 3x\sqrt{2y + 1}$;

Q3. dérivées partielles en x et en y de $f(x, y) = y^2 + 5y + 2$;

Q4. dérivées partielles en x, y et t de $f(x, y, t) = \frac{A}{x^2}\cos(\omega t - ky)$, où A, ω et k sont des constantes réelles.

Réponses :

Q1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2$

Q2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3\sqrt{2y + 1}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x}{\sqrt{2y + 1}}$;

Q3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 5$;

Q4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, t) = -\frac{2A}{x^3}\cos(\omega t - ky)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, t) = +k\frac{A}{x^2}\sin(\omega t - ky)$; $\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = -\omega\frac{A}{x^2}\sin(\omega t - ky)$

2 Dérivée partielle d'ordre k d'une fonction de n variables

Les dérivées partielles d'ordre k de la fonction f s'obtiennent en dérivant successivement k fois f.
On note, par exemple, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ la dérivée partielle d'ordre 2 de f en x, qui est équivalente à $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$.
Attention : les dérivations peuvent ne pas porter sur les mêmes variables ! Par exemple :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

Exemples : Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

Q1. dérivées partielles d'ordre 3 en x et en y de $f(x,y) = 4x^3 + 5y^2$;

Q2. dérivées partielles d'ordre 2 en x et en y de $f(x,y) = 3x\sqrt{2y+1}$; calculer également $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$;

Q3. dérivée partielle d'ordre 2 en x, y et t de $f(x,y,t) = \dfrac{A}{x^2}\cos(\omega t - ky)$, où A, ω et k sont des constantes réelles.

Réponses :

Q1. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 24$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 0$

Q2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{3x}{(2y+1)^{3/2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt{2y+1}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt{2y+1}} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

Q3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,t) = \dfrac{6A}{x^4}\cos(\omega t - ky)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,t) = -k^2\dfrac{A}{x^2}\cos(\omega t - ky)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,y,t) = -\omega^2\dfrac{A}{x^2}\cos(\omega t - ky)$

3 Différentielle d'une fonction de n variables

Si f est une fonction des deux variables x et y et de classe $\mathscr{C}^\infty$, la différentielle de f, notée $\mathrm{d}f$, s'écrit :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

En généralisant à n variables :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_{j\neq i}}\mathrm{d}x_i$$

où $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_{j\neq i}}$ signifie "dérivée partielle de f par rapport à x_i en considérant les variables x_j constantes".