Équation de la diffusion

1 Expressions des opérateurs différentiels

Nous avons vu que les phénomènes de diffusion sont basés sur des lois phénoménologiques qui s'expriment suivant le **gradient** d'une grandeur donnée. Par exemple, dans le cas de la diffusion thermique, cette loi est la loi de FOURIER qui s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}T}$$

ou

$$\boxed{\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda\overrightarrow{\nabla}T}$$

avec $\overrightarrow{j_{th}}$ le vecteur densité de courant thermique et T le **champ de température** du système étudié.

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$, appelé "vecteur **nabla**", est un opérateur différentiel, dont l'expression dépend du système de coordonnées utilisé (cartésien, cylindrique, sphérique). On l'utilise pour exprimer le gradient d'un champ scalaire, la divergence d'un champ vectoriel ou le rotationnel d'un champ vectoriel.

1.1 Expressions du gradient

Soit f un champ scalaire s'exprimant suivant les coordonnées de base des systèmes cartésiens, cylindriques ou sphériques :

$$f = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \\ f(r,\theta,z) & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \\ f(r,\theta,\varphi) & \text{en coordonnées sphériques} \end{cases}$$

L'expression du gradient de f est donc :

$$\overrightarrow{\nabla}f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} & \text{en coordonnées sphériques} \end{cases}$$

où les vecteurs unitaires sont ceux des différents systèmes de coordonnées.

Signification physique : le gradient d'un champ scalaire f représente **la direction et le sens de variation** de cette grandeur dans l'espace. Il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

1.2 Expression de la divergence

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel ayant pour expressions :

$$\vec{A} = \begin{cases} A_x(x,y,z)\overrightarrow{u_x} + A_y(x,y,z)\overrightarrow{u_y} + A_z(x,y,z)\overrightarrow{u_z} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \\ A_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + A_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + A_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \\ A_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_\varphi} & \text{en coordonnées sphériques} \end{cases}$$

On appelle **divergence de** $\overrightarrow{A}$ la grandeur définie par :

$$\boxed{\mathrm{div}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}}$$

.

L'expression de la divergence en fonction de la base employée est :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} & \text{en coordonnées sphériques} \end{cases}$$

Signification physique : la divergence est associée à la notion de **flux** d'un champ vectoriel à travers une surface. On montre que le flux de $\overrightarrow{A}$ à travers une surface S fermée et orientée vaut la divergence de $\overrightarrow{A}$ dans tout le volume entouré par S : c'est le théorème de GREEN-OSTROGRADSKY :

$$\oiint_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \mathrm{div}(\overrightarrow{A})\mathrm{d}\tau$$

avec $\mathrm{d}\tau$ un volume élémentaire inclus dans le volume V entouré par la surface S.

1.3 Expression du rotationnel

Soit $\overrightarrow{A}$ le champ vectoriel défini précédemment. On appelle **rotationnel de** $\overrightarrow{A}$ la grandeur définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}} \wedge \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}}$$

L'expression du rotationnel en fonction de la base employée est :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial (A_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_\varphi} & \text{en coord. sphériques} \end{cases}$$

1.4 Expression de l'opérateur Laplacien

L'équation de la diffusion thermique s'écrit de manière générale, en l'absence de termes sources :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th}\Delta T}$$

Δ est nommé "opérateur **laplacien**". Il résulte de l'opération :

$$\boxed{\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \Delta}$$

Soit f le champ scalaire défini précédemment. L'expression de Δf suivant la base employée est donnée par :

$$\Delta f = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} & \text{en coordonnées sphériques} \end{cases}$$

2 Résolutions particulières de l'équation de la diffusion

2.1 Méthode des variables séparées

On considère le cas de la diffusion thermique décrite en coordonnées cartésiennes, selon la seule dimension spatiale x. Dans certains cas, l'équation de la diffusion thermique admet pour solution une fonction $T(x,t)$ de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + f(x)g(t)$$

avec $f(x)$ et $g(t)$ des fonctions de x et de t respectivement, de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur ensemble de définition.

L'équation de la diffusion donne alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) = f(x)g'(t)$$

et

$$D_{th}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D_{th}g(t)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = D_{th}g(t)f''(x)$$

Ainsi :

$$f(x)g'(t) = D_{th}g(t)f''(x) \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = D_{th}\frac{f''(x)}{f(x)}$$

Point mathématique : lorsque deux fonctions de variables indépendants sont égales, alors elles sont égales à la même constante

On nomme α cette constante. On peut donc écrire le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} g'(t) - \alpha g(t) = 0 \\ \\ f''(x) - \alpha f(x) = 0 \end{cases}$$

que l'on peut résoudre indépendamment l'une de l'autre. La solution $T(x,t)$ pourra alors être entièrement déterminée à l'aide des conditions aux limites et de la condition initiale.

2.2 Cas des fonctions périodiques

Lorsque les conditions aux limites sont **périodiques**, comme par exemple en imposant $T(0,t) = T(L,t) = T_0$ pour une barre en contact avec un thermostat de température T_0, on montre qu'une solution de l'équation de la diffusion peut s'écrire sous la forme :

$$T_n(x,t) = T_0 + B_0\exp(-an^2t)\sin(bnx)$$

avec B_0, a et b des constantes réelles, et $n \in \mathbb{N}^\star$.

Il existe donc une infinité de solutions au problème.

Puisque l'équation différentielle est linéaire, toute combinaison linéaire de solutions de l'équation est également solution de cette équation. La solution générale peut donc s'écrire :

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} B_n\exp(-an^2t)\sin(bnx)$$

avec $B_n \in \mathbb{R}$. Cette solution est un cas particulier de **série de Fourier**. Chaque solution T_n est appelée **fonction propre de l'équation**, ou **mode** en physique.