

Chapitre VII

Statique des fluides

Pré-requis

- Mécanique classique (référentiel, forces, expression des forces classiques).

Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Particule de fluide.	Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante
Pression.	Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface. Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}P$.
Éléments de statique des fluides.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.

Introduction

La mécanique des fluides traite des phénomènes physiques rencontrés au sein des fluides (liquide et gaz dans ce chapitre). Elle se base sur la mécanique du point (mécanique

newtonienne), afin de décrire le mouvement d'un fluide en écoulement.

Dans ce chapitre, nous étudions le cas d'un fluide au repos, ou statique. Nous définissons les grandeurs qui caractérisent un fluide, ainsi que l'échelle adaptée à l'analyse d'un fluide. Enfin, nous développons et appliquons la relation fondamentale de la statique des fluides à des dispositifs particuliers ou des situations courantes.

VII.1 Modèle de la particule de fluide

VII.1.1 Notion de fluide

Définition : fluide

Lorsque les distances entre particules sont grandes devant D , on parle de **gaz**. Lorsque ces distances sont comparables à D , on parle de **liquide** (présence d'interactions de VAN DER WAALS : le liquide possède un volume propre, contrairement au gaz).

Au-delà du point critique, où sous certaines conditions de T et P , le fluide peut se retrouver dans un état différent des deux états précédemment cités : on parle alors d'état fluide. C'est le cas des fluides supercritiques, par exemple.

VII.1.2 Notion d'échelle

Comme dans le cas des chapitres sur la diffusion (de particule ou thermique), il est possible de traiter des problèmes d'écoulement de fluide à différentes échelles :

- l'échelle macroscopique (\simeq taille du récipient qui contient le fluide)
- l'échelle mésoscopique (\simeq libre parcours moyen ℓ des particules de fluide)
- l'échelle microscopique (\simeq taille caractéristique des particules)

Nous adopterons l'échelle mésoscopique, pour laquelle nous pouvons considérer les grandeurs caractéristiques du fluide (T , P , $n...$) comme continues.

Attention : cette échelle dépend du fluide considéré, notamment du libre parcours moyen ℓ des particules dans ce fluide ! À 300 K sous 1 bar, dans un gaz : $\ell \simeq 10^{-7}$ m, et l'échelle mésoscopique possède une taille caractéristique d'environ 0,1 mm (donc $\ll L$ et $\gg \ell$). Dans un liquide : $\ell \simeq 10^{-10}$ m, dans un récipient de taille $L = 10$ cm, et la taille caractéristique de l'échelle descend à $1 \mu\text{m}$ (donc $\ll L$ et $\gg \ell$)

VII.1.3 Particule fluide

Pour décrire à cette échelle un fluide, on définit un volume particulier nommé **particule de fluide**.

Définition : particule de fluide

À cette échelle, la particule fluide renferme un grand nombre de particules discrètes, mais elle reste très petite devant la taille du système. Ceci permet de définir un équilibre thermodynamique local : pression et température sont constantes dans la particule de fluide¹. Ainsi, si cette particule possède pour centre M , on peut définir les grandeurs $P(M)$ et $T(M)$; ces grandeurs sont continues à l'échelle macroscopique.

Définition : masse volumique d'un fluide

Notez bien que cette grandeur est définie localement, c'est-à-dire autour du point M . Elle est donc susceptible d'être différente d'un point à l'autre du fluide à l'échelle macroscopique (notion de champ scalaire).

VII.1.4 Fluide incompressible

Définition : fluide incompressible

Les liquides sont de manière générale des fluides incompressibles. Au contraire, un fluide **compressible** possède une masse volumique $\mu(M, t)$ variable d'un point à un autre du fluide (cas des gaz).

Exemples de masses volumiques :

- Fluide incompressible : eau à 298 K et sous 1 bar :
- Fluide compressible : air, à 293 K (20°C) et sous 1 bar :

VII.2 Forces dans un fluide au repos

VII.2.1 Définitions

On considère le fluide décrit dans un référentiel galiléen. Pour décrire le mouvement du fluide, il est nécessaire de faire le bilan des forces s'exerçant sur ce fluide. Cependant, du fait du choix arbitraire de la particule de fluide, non unique, nous ne pouvons pas simplement reprendre les forces décrivant le mouvement d'un point matériel.

1. cf. équilibre thermodynamique local, ch. diffusion thermique

Nous définissons donc **les forces par unité de volume**, ou forces volumiques (forces à distance) et **les forces par unité de surface**, ou forces surfaciques (forces de contact) afin de généraliser le bilan des forces à n'importe quelle particule fluide.

Schéma d'une particule de fluide et notations adoptées

VII.2.2 Forces volumiques

Une force \vec{F} résultant d'une action à distance, donc pouvant s'appliquer à tous les points d'un volume de fluide, peut être redéfinie comme une force volumique.

Définition : force volumique

Remarque : La dérivée s'exerce dans les 3 coordonnées de l'espace : une force volumique est un champ vectoriel, application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

Exercice : déterminer les forces volumiques associées aux actions à distance suivantes :

- force de pesanteur : $\vec{F}_g = m\vec{g}$ à l'échelle macroscopique, donc pour la particule fluide de masse δm :
- force électrostatique : $\vec{F}_e = q\vec{E}$ pour une charge q . Pour une particule de fluide contenant une charge élémentaire δq , en définissant la densité volumique de charges $\rho(M, t) = \frac{\delta q}{d\tau}$:

VII.2.3 Force de contact : la pression

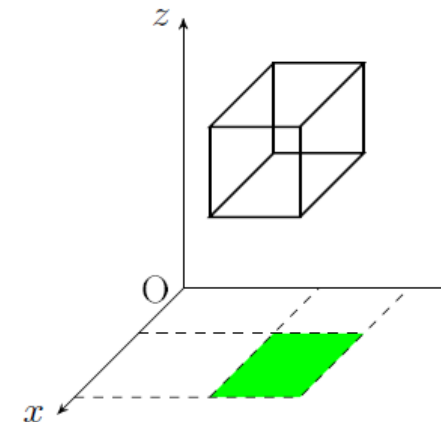
Les forces de pression sont issues d'actions de courtes portées, les chocs entre molécules liées à des interactions de type VAN DER WAALS (attraction, répulsion).

Définition : force de pression

La force de pression est une force **normale** à la surface sur laquelle elle s'applique (démonstration par raison de symétrie ; mêmes arguments que lors de l'établissement de la pression cinétique des gaz).

VII.2.4 Résultante des forces de pression sur une particule de fluide

Afin de déterminer la résultante des forces de pression sur une particule de fluide, nous considérons celle-ci parallélépipédique ; nous allons déterminer les forces de pression sur chacune des faces de la particule :



Face	$dS\vec{n}$	$P(M)dS\vec{n}$
avant		
arrière		
gauche		
droite		
supérieure		
inférieure		

Calcul de la force de pression résultante :

Définition : force volumique de pression

Pour un objet délimité par une surface fermée entourée de la pression uniforme P_0 , la résultante des forces de pression est nulle ($\vec{\text{grad}}P$ nul, donc \vec{f}_p nulle et \vec{F}_p aussi).

VII.3 Relation fondamentale de la statique des fluides

VII.3.1 Expression générale

Relation fondamentale de la statique des fluides sous forme locale

Pour un fluide au repos dans un référentiel supposé galiléen, en l'absence de forces extérieures autres que la pesanteur et la force de pression volumique s'exerçant sur le fluide, on peut écrire :

$$-\vec{\nabla}P + \mu\vec{g} = \vec{0}$$

avec μ la masse volumique du fluide. Cette relation est la relation fondamentale de la statique des fluides (RFS), **sous forme locale**.

Démonstration :

VII.3.2 Cas d'un fluide incompressible

RFS pour un fluide incompressible

Dans le cas où le fluide est incompressible, la relation fondamentale de la statique des fluides devient, sous forme globale :

$$\Delta P + \mu g \Delta z = 0$$

avec Δz la hauteur de colonne de fluide.

Démonstration :

Remarque importante : la pression d'un fluide est identique à la même hauteur z .

Applications

a - Évolution de la pression dans l'eau

Exercice : déterminer la variation de pression que subit un plongeur sous-marin lorsqu'il parcourt 10 mètres à la verticale de la surface.

b - Baromètre de Torricelli

On étudie le baromètre de TORRICELLI dont la conception est la suivante : un tube, rempli de mercure (masse volumique $\mu_{Hg} = 13,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, est retourné sur une cuve, contenant également du mercure. La pression à la surface du mercure dans la cuve est $P_0 = 1 \text{ bar}$, et le tube est suffisamment grand pour observer un vide partiel se former au-dessus de la surface de mercure une fois retourné.

Schéma du baromètre de Torricelli

Questions : déterminer la hauteur atteinte par la colonne de mercure dans le tube. Pourquoi choisir du mercure et non de l'eau liquide pour réaliser cette expérience ?

VII.3.3 Cas de l'atmosphère isotherme

Contrairement aux liquides, les gaz sont rarement incompressibles. La variation de μ avec la pression P doit être prise en compte si l'on veut déterminer le champ de pression au sein d'un gaz.

Exercice : Démontrer que pour une atmosphère constituée d'un gaz parfait de masse molaire M , et supposée isotherme, la pression $P(z)$ suit la loi suivante en fonction de l'altitude z :

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

où $P(0)$ est la pression au niveau de la mer ($z = 0$).

Définition : Théorème d'ARCHIMÈDE

Dans un référentiel galiléen, un objet solide immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une poussée égale au poids de volume de fluide déplacé et orientée suivant l'opposée de la gravité. Son point d'application est le centre de gravité du fluide déplacé. Pour un objet solide de volume V_{objet} immergé dans un fluide de masse volumique μ_{fluide} :

$$\vec{\Pi}_A = -m_{\text{fluide}}\vec{g} = -\mu_{\text{fluide}}V_{\text{objet}}\vec{g}$$

Démonstration :

Dans un référentiel \mathcal{R} donné, la poussée d'ARCHIMÈDE est la résultante des forces de pression exercée sur un objet immobile dans \mathcal{R} , par l'ensemble des fluides au repos qui l'entoure.

Pour déterminer cette force, considérons les deux schémas suivants :

Application numérique : Dans le cas de l'air, $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et $T = 273 \text{ K}$, donc $H \simeq 8 \text{ km}$. Ce modèle simple (gaz parfait + isotherme) est satisfaisant jusqu'à environ 100 km d'altitude (malgré le fait que la température varie dans cet intervalle de hauteur).

Le raisonnement peut être étendu à **tout fluide compressible** en équilibre isotherme : la pression ne dépend que de l'altitude z .

VII.4 Calculs de la résultante des forces de pression

VII.4.1 Cas particulier : la poussée d'Archimède

La pression n'étant pas uniforme au sein d'un fluide (pression plus élevée quand l'altitude diminue), les forces de pression sont plus importantes sur la face inférieure du corps immergé que sur sa face supérieure. Il existe donc une force qui "porte" l'objet ; cette force est la poussée d'ARCHIMÈDE, notée $\vec{\Pi}_A$.

VII.4.2 Cas général

Afin de déterminer la résultante des forces de pression sur une particule de fluide parallélépipédique, nous avons calculé la force de pression élémentaire sur chaque face, et sommé toutes les contributions entre elles.

Ce raisonnement peut se généraliser en considérant tous les points N de la surface du fluide.

Définition : Résultante des forces de pression

L'ensemble \vec{F}_p des forces de pression qui s'exercent sur un objet est défini par :

$$\vec{F}_p = \iint_S -P(N)d\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ orthogonal à la surface en chaque point N , et dirigé vers l'extérieur de l'objet.

Cette expression est souvent difficile à calculer ; il faut alors trouver des manières de simplifier le problème.

Exemple : Barrage

Soit un barrage rectangulaire, de longueur L et de hauteur H , en contact avec l'air sur une de ses faces, et l'eau sur une autre de ses faces. On supposera le barrage immergé sur toute sa hauteur.

Question : Calculer la résultante des forces de pression dans ce cas.



La grandeur $\frac{1}{2}\mu gH$ a la dimension d'une pression : on l'appelle la **surpression**, c'est à dire la différence de pression avec la pression atmosphérique P_0 : $P_{surp} = P(N) - P_0$.

Mais où se situe le point d'application de la force de pression dans un tel exemple ?

VII.4.3 Point d'application des forces de pression**Définition : Point d'application de la résultante des forces de pression**

Le point d'application d'une force est le point A tel que le moment de la force en A est nul. Ici, pour l'ensemble des points N à la surface du fluide :

$$\iint_S A\vec{N} \wedge P(N)d\vec{S} = \vec{0}$$

On admet que le point d'application de la force de **surpression** est le même que celui de la force de **pression**.

Exemple du barrage : Montrer que le point d'application de la résultante des forces de pression s'exerçant sur le barrage est situé à $\frac{2H}{3}$ en-dessous du niveau de l'eau.

Chapitre VIII

Dynamique des fluides

Pré-requis

- statique des fluides (forces volumiques) ;
- notion de particule de fluide.

Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Champ eulérien des vitesses : vitesse de la particule de fluide.	Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique. Définir une ligne de courant, un tube de courant.
Dérivée particulaire du vecteur vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire du vecteur vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Citer et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$
Masse volumique μ , vecteur densité de courant de masse $\vec{j}_m = \mu \vec{v}$.	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Débit massique (ou débit de masse).	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu \vec{v}$ à travers une surface orientée.
Conservation de la masse.	Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Écoulement stationnaire.	Définir un écoulement stationnaire. Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
Écoulement incompressible et homogène.	Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme et relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. Exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.
Débit volumique.	Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de \vec{v} à travers une surface orientée.
Viscosité dynamique.	Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau. Citer la condition d'adhérence à l'interface fluide/solide.

Introduction

Nous avons défini précédemment les outils nécessaires à la description d'un fluide (utilisation de l'échelle macroscopique, notion de particule de fluide), appliqué à un fluide au repos : les forces volumiques qui s'exercent sur le fluide (poids, pression...) ne dépendent pas de la vitesse du fluide et se compensent.

Nous allons désormais appliquer ces concepts au cas d'un fluide en écoulement.

VIII.1 Vitesse d'un fluide en écoulement

VIII.1.1 Différentes vitesses

On s'intéresse à un fluide constitué de particules (atomes, molécules, ions) dans un référentiel \mathcal{R} lié au laboratoire et supposé galiléen.

Définition : Vitesse microscopique

Après chaque choc, \vec{v}_{micro} de la particule change de direction, de sens et de norme. La trajectoire d'une particule dans un fluide est donc **aléatoire** en l'absence de contrainte extérieure : c'est le mouvement brownien (cf. schéma de droite). Pour un fluide au repos, la moyenne des vitesses de chaque particule du fluide est nulle.

Une contrainte extérieure peut mettre en mouvement le fluide : on parle alors d'**écoulement**. Dans ce cas, la vitesse moyenne des particules devient non nulle : on ajoute au mouvement brownien un mouvement d'ensemble, dans la direction de l'écoulement.

Définition : Vitesse mésoscopique

Application : vitesse(s) du vent :

Donner les vitesses mésoscopique et microscopique d'un vent soufflant à 100 km.h^{-1} à une température de 10°C . On considèrera que l'air est constitué de particules diatomiques de masse molaire moyenne $29,0 \text{ g.mol}^{-1}$. On appliquera le théorème d'équipartition de l'énergie afin de déterminer v_{micro} (cf. pression cinétique des gaz).

Réponse :

VIII.1.2 Champ eulérien de vitesse

Il existe deux manières de décrire un fluide en écoulement.

Description lagrangienne d'un écoulement

Description eulérienne d'un écoulement

Tout champ scalaire ou vectoriel peut donc être associé à une description eulérienne du mouvement : c'est le cas de la densité de particules $n(M, t)$ dans le cadre de la diffusion de particules, ou de $\vec{j}_{th}(M, t)$ dans le cadre de la diffusion thermique.

Expression de l'accélération en description eulérienne : dérivée particulaire de la vitesse

Cette dernière expression est différente de celle rencontrée en description lagrangienne de l'écoulement, pour laquelle $\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M, t)$.

VIII.1.3 Lignes et tubes de courant

Lignes de courant

Définition : Ligne de courant

Mathématiquement, cette relation de colinéarité s'écrit : $\vec{v}(M, t) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$ pour un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ le long de la ligne de courant.

Avec $\vec{v}(M, t) = (v_x; v_y; v_z)$ et $d\vec{OM} = (dx; dy; dz)$, il vient les égalités suivantes :

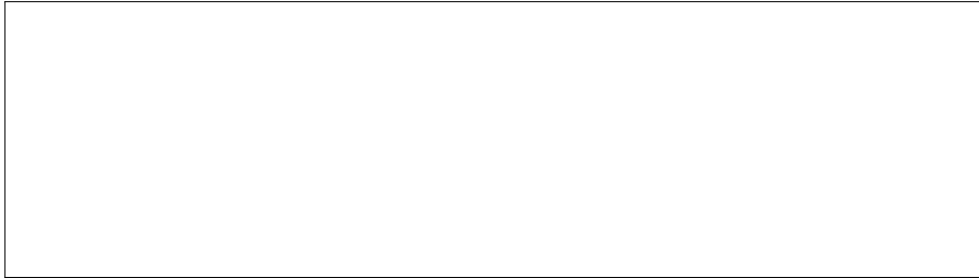
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Ceci permet de déterminer, après intégration, l'allure des lignes de champs pour un écoulement donné.

Application : déterminer l'accélération en tout point M et à tout instant t , ainsi que les allures des lignes de courant pour un écoulement dont le champ de vitesses est donné par :

$$v_x(x, y, z, t) = 0 \quad v_y(x, y, z, t) = 5y - 3z \quad v_z(x, y, z, t) = 3y - 5z$$

Réponse :



Dans un cas général, il ne faut pas confondre la trajectoire d'une particule de fluide et une ligne de courant : ces deux objets ne sont identiques que dans le cas d'un régime **stationnaire**.

Tubes de courant

Définition : Tube de courant



Carte de champ

Il est souvent utile de représenter le champ des vitesses en un certain nombre de points, en particulier lorsque le mouvement de fluide est plan. C'est le cas des cartes météorologiques, par exemple.

VIII.2 Lois de conservation

VIII.2.1 Vecteur densité de courant de masse

Comme pour tout phénomène de transport (diffusion de particule, diffusion thermique, convection...), on introduit un vecteur densité de courant associé à la grandeur physique transportée. La grandeur d'intérêt étant ici la masse, on définit le **vecteur densité de courant de masse** \vec{j}_m .

Définition : Vecteur densité de courant de masse



VIII.2.2 Débits massique et volumique

Nous avons déjà défini, dans les chapitres précédents, des débits d'énergie thermique (flux thermique) et de particules. De manière équivalente, on peut définir un flux de masse que l'on appelle le débit massique, noté D_m .

Définition : Débit massique

On considère une surface S orientée. On appelle débit massique D_m de fluide à travers S la quantité de masse de fluide qui traverse l'ensemble de la surface S par unité de temps. Cette grandeur est algébrique :

$$D_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot \vec{dS} = \iint_S \mu \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

Le débit massique s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$: c'est un flux de masse.

Dans certains cas, un **débit volumique** est plus intéressant à définir : il s'agit du volume de fluide s'écoulant à travers la surface S par unité de temps. Son expression est donnée par :

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

D_v s'exprime en $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$.

VIII.2.3 Équation de conservation de la masse

Cas unidimensionnel

Équation de conservation de la masse (cas unidimensionnel)

Soit un fluide de masse volumique $\mu(x, t)$, en écoulement caractérisé par un vecteur densité de courant de masse $\vec{j}_m(x, t)$. En l'absence de sources de masse, la masse de fluide se conserve ; l'équation traduisant cette conservation est :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_m}{\partial x}(x, t) = 0$$

Démonstration :

On effectue un bilan de masse dans un élément de fluide délimité par les surfaces dS en x et en $x + dx$, orientées dans le sens du vecteur densité de courant de masse. L'écoulement est supposé unidimensionnel et dirigé suivant les $x > 0$.

Schéma : Le volume de contrôle est donc un cylindre et la surface de contrôle, l'ensemble paroi latérale + surfaces dS .

Bilan de matière :

Cas général

Équation de conservation de la masse (cas général)

L'équation de conservation de la masse s'écrit, de manière générale :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0$$

Démonstration :

On considère cette fois un volume de contrôle V , non-infinésimal. Ce volume est délimité par une surface de contrôle S orientée vers l'extérieur du volume.

Équation globale de conservation de la masse :

Équation de conservation de la masse :

Attention : Dans tous les bilans physiques réalisés jusqu'à présent, nous avons choisi d'orienter les surfaces dans le sens des vecteurs densités de courant. Pour réaliser des bilans de manière générale (et donc, en utilisant le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI), il faut orienter la surface de contrôle vers l'**extérieur** du système.

VIII.3 Écoulements remarquables

VIII.3.1 Écoulement stationnaire

Définition : Écoulement stationnaire

Conservation du débit massique

Propriété : Conservation du débit massique

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le débit massique se conserve. Pour un écoulement présentant i arrivées et sorties de fluide :

$$\sum_i D_{m,i} = 0$$

Démonstration :

On considère un tube de courant délimité par les trois surfaces représentées sur le schéma ci-dessous :

Pour un écoulement stationnaire : $\oiint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = 0$. Nous devons décomposer le flux en 3 parties :

- flux à travers la surface $d\vec{S}_1$:

- flux à travers la surface $d\vec{S}_2$:

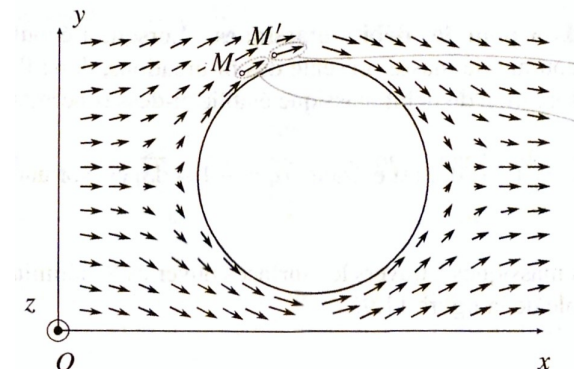
- flux à travers la surface latérale du tube de courant :

Bilan :

Remarque : On dit que le vecteur densité de courant est à **flux conservatif** dans un écoulement stationnaire. En effet, selon le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI : $\phi = \oiint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{j}_m) d\tau$ d'où, pour $\text{div}(\vec{j}_m) = 0$, $\phi = \text{constante}$.

Exploitation d'une carte de champ des vitesses d'un écoulement stationnaire

On considère un écoulement stationnaire autour d'un obstacle :



Exercice : Montrer que l'accélération d'une particule de fluide au point M est non nulle malgré le caractère stationnaire de l'écoulement.

Expression de l'accélération :

VIII.3.2 Écoulement incompressible et homogène

Définition

On parle d'écoulement homogène et incompressible lorsque la masse volumique du fluide est **constante**, c'est-à-dire :

- **indépendante du temps** ;
- **uniforme** (indépendante des coordonnées de l'espace).

$$\forall M, \forall t : \mu(M, t) = \text{constante}$$

Attention : vocabulaire ! Un **fluide** incompressible possède une masse volumique constante : l'écoulement d'un fluide incompressible est donc incompressible. Ceci n'est pas vrai pour un fluide compressible : son écoulement peut être ou non homogène et incompressible suivant les cas.

Un **liquide** sera ainsi considéré comme un fluide incompressible, et son écoulement homogène et incompressible tant que la vitesse d'écoulement reste inférieure à la vitesse du son dans ce gaz (la perturbation potentiellement engendrée se déplacera suffisamment vite pour être négligée au bout d'une durée dt faible).

Propriétés

Conservation du débit volumique

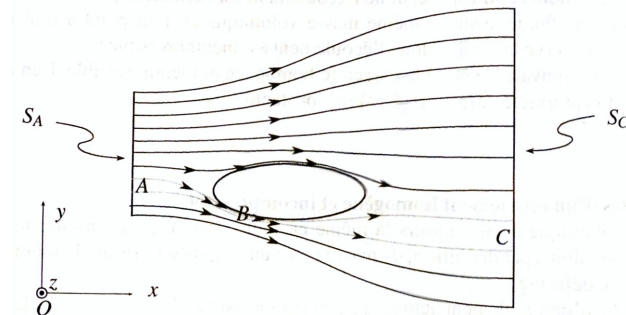
Dans le cas d'un écoulement homogène et incompressible, le débit volumique se conserve. Pour un écoulement présentant i arrivées et sorties de fluide :

$$\sum_i D_{v,i} = 0$$

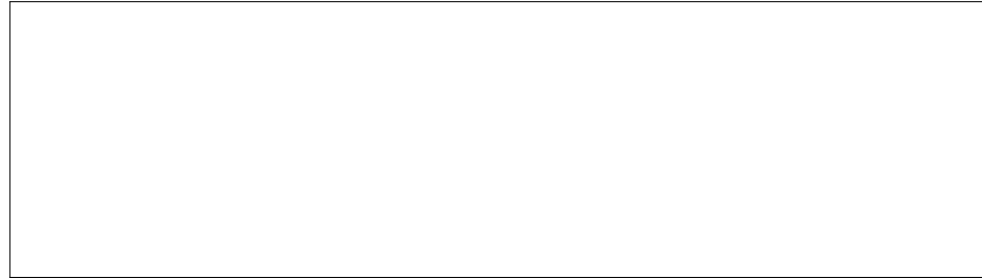
Pour un écoulement homogène et incompressible, le débit volumique entrant dans un volume de contrôle est donc égal au débit volumique sortant.

Démonstration :

Application : Soit le système décrit par la figure ci-dessous :



Exercice : montrer que le long du tube de courant liant A , B et C , on peut écrire : $S_A v_A = S_B v_B = S_C v_C$, avec S_i la surface du tube de courant autour du point i et v_i la vitesse de l'écoulement en ce point.



VIII.4 Actions de contact sur un fluide en écoulement

Nous avons jusqu'à présent étudié les forces s'exerçant sur un fluide statique. Nous étendons désormais cette étude au fluide en mouvement.

VIII.4.1 Forces surfaciques normales et tangentielles

Considérons la surface d'un système. En un point N de cette surface s'exerce une force de contact élémentaire $\overrightarrow{\delta F_S}$. De manière générale, cette force peut se décomposer en deux parties :

- une composante tangentielle $\overrightarrow{\delta F_{S,t}} = (\overrightarrow{\delta F_S} \cdot \vec{u}) \vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur unitaire tangent à la surface au point N ;
- une composante normale $\overrightarrow{\delta F_{S,n}} = (\overrightarrow{\delta F_S} \cdot \vec{n}) \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur unitaire orthogonal à la surface au point N .

VIII.4.2 Exemple de force normale : la force de pression

Tout comme dans un fluide au repos, les forces de pression qui s'exercent sur un fluide en écoulement sont des forces surfaciques **normales**. La force de pression élémentaire s'exerçant en un point N s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\delta F_S}(N, t) = -P(N, t) dS \vec{n}(N)$$

avec $\vec{n}(N)$ un vecteur normal à la surface au point N .

VIII.4.3 Exemple de force tangentielle : la viscosité

Mise en évidence expérimentale

Soit l'expérience suivante : un liquide inconnu est versé dans un récipient transparent monté sur un support tournant. Une bulle de colorant est formée par injection à l'aide d'une seringue. Le liquide est suffisamment "épais" pour que le colorant ne diffuse pas, ni ne tombe sous l'effet de la gravité.

Schéma de l'expérience :

Observations :

Interprétation

Conclusion

Construction de la force de viscosité : cas de l'écoulement de Couette plan

Reprenons l'exemple d'écoulement vu précédemment : on considère le fluide entre deux plaques, planes, parallèles, l'une fixe et l'autre mobile dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} supposé galiléen. L'écoulement est supposé **homogène et incompressible**. La distance entre les deux plaques est a . La plaque mobile est animée d'une vitesse \vec{v} constante, dirigée selon \vec{u}_z .

Schéma du dispositif

Nature de l'écoulement

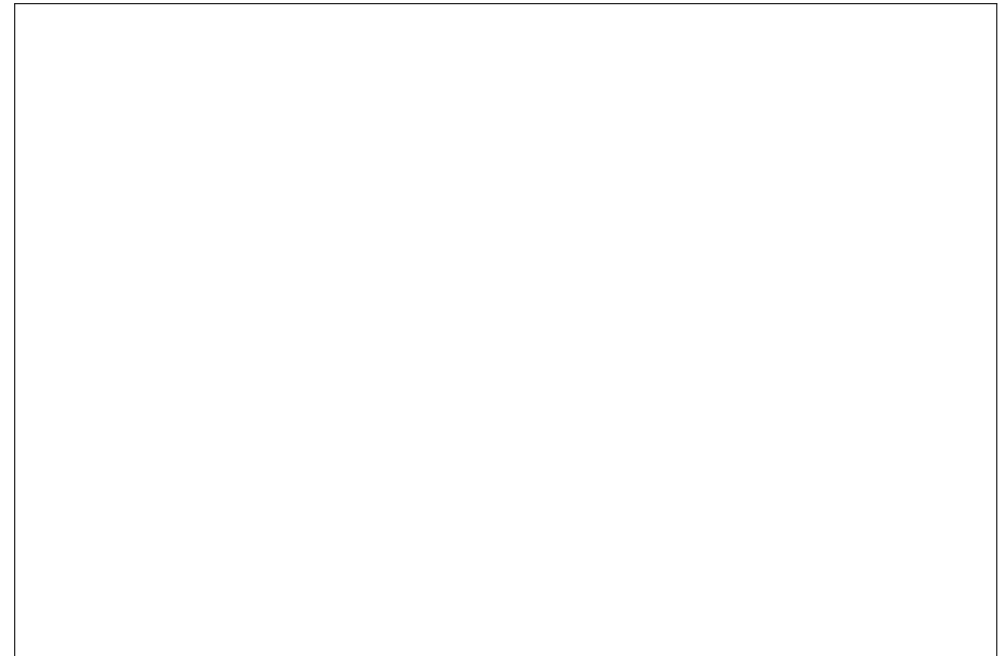
Le fluide est mis en mouvement du fait de la mobilité de la plaque du-dessus. L'écoulement est supposé homogène et incompressible, et en négligeant les effets de bord (plaques suffisamment longues), ce système décrit un **écoulement de Couette plan** (du nom de Maurice COUETTE, physicien français).

Expression du champ de vitesse

Établissement de la force de viscosité

Exercice : montrer que la force élémentaire de viscosité peut s'écrire :

$$\vec{dF} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial x} dy dz \vec{u}_z$$



Il s'agit de la force de viscosité. Elle s'interprète comme une force de frottement, donc **dissipative** : la viscosité entraîne des pertes de quantité de mouvement lors de l'écoulement. Le coefficient de proportionnalité η est défini ci-après.

Définition : Coefficient η

Cette relation est vérifiée pour les fluides qualifiés de **newtonien**, c'est à dire dont la viscosité ne dépend pas de la contrainte exercée sur le fluide.

Remarque 1 : la force de viscosité n'existe que parce-que le champ de vitesse du fluide n'est pas uniforme. Il s'agit donc d'une **force de cisaillement**.

Remarque 2 : la généralisation de cette expression est possible : en considérant la résultante de la force volumique de viscosité pour une particule de fluide située dans un volume $d\tau$:

$$\vec{f}_{visc}(M, t) = \eta \Delta(\vec{v})(M, t)$$

La démonstration est hors-programme.

Ordre de grandeur de η

Plus le fluide possède un coefficient η élevé, plus il est qualifié de visqueux. À titre d'exemple, voici certaines valeurs de η :

Fluide	air	eau	glycérine pure	huile
η (Pl)				

La viscosité varie selon les facteurs extérieurs : un gaz est plus visqueux quand la température augmente, contrairement à un liquide : η de l'eau liquide est divisé par 2 quand la température passe de 10°C à 50°C.

La pression a peu d'influence sur la viscosité des gaz, mais la viscosité des liquides augmente avec la pression.

VIII.4.4 Conditions aux limites

Afin de déterminer l'équation décrivant l'écoulement d'un fluide, il est nécessaire de résoudre une équation différentielle. Les conditions aux limites sont alors nécessaires pour résoudre entièrement le problème.

On considère un écoulement incompressible et homogène. Le fluide peut être en contact avec un solide (écoulement dans un tuyau), ce qui conduit à l'existence d'une interface solide/fluide, ou en contact avec un autre fluide (existence d'une interface fluide/fluide). Nous allons exprimer les conditions aux limites dans ces deux situations.

Interface solide/fluide

On suppose le solide imperméable au fluide. On définit la vitesse du fluide $\vec{v}(N_f, t)$ en un point N_f infiniment proche d'un point N_s à la surface du solide de vitesse $\vec{v}(N_s, t)$.

Propriété : Interface solide/fluide

Interface fluide/fluide

Considérons deux fluides, le fluide 1 (η_1) et le fluide 2 (η_2), non miscibles, en contact sur une surface S .

Propriété 1 : Interface fluide/fluide

Le champ de vitesse est continu en un point N de l'interface entre deux fluides :

$$\vec{v}_1(N_1, t) = \vec{v}_2(N_2, t)$$

où N_1 et N_2 sont deux points infiniment proches de N et situés respectivement dans les fluides 1 et 2.

Par ailleurs, en vertu des actions réciproques, la force de viscosité exercée par le fluide 1 sur le fluide 2 est l'opposée de la force de viscosité exercée par le fluide 2 sur le fluide 1.

Propriété 2 : Interface fluide/fluide

À l'interface entre deux fluides, la loi des actions réciproques implique que :

$$\eta_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial x}(N_1, t) = \eta_2 \frac{\partial v_{2z}}{\partial x}(N_2, t)$$

Remarque : cette dernière expression doit être adaptée à chaque exercice (composante de la vitesse différente de v_z , dépendance autre que selon x ...)

VIII.4.5 Applications

Champ de vitesse de l'écoulement de Couette plan

On considère l'écoulement plan décrit précédemment (un plan fixe, l'autre mobile). Cet écoulement est stationnaire, incompressible, de masse volumique μ et de viscosité η . On rappelle que le champ de vitesse s'écrit $\vec{v}(M, t) = v_z(x)\vec{u}_z$ et que la pression ne dépend que de (Ox) du fait de l'invariance de l'écoulement suivant (Oy) et (Oz) .

Exercice : On considère une particule de fluide d'épaisseur dx et de volume élémentaire $d\tau = dx dy dz$.

Q1. Représenter le dispositif décrit par un schéma.

Q2. Établir le bilan des forces s'appliquant sur le système particule de fluide.

Q3. Etablir l'équation différentielle que respecte le champ de vitesse $v(M, t)$. Montrer que le champ de vitesses prend alors l'expression :

$$\vec{v}_z(x) = \frac{v_0}{a} x \vec{u}_z$$

Réponse :

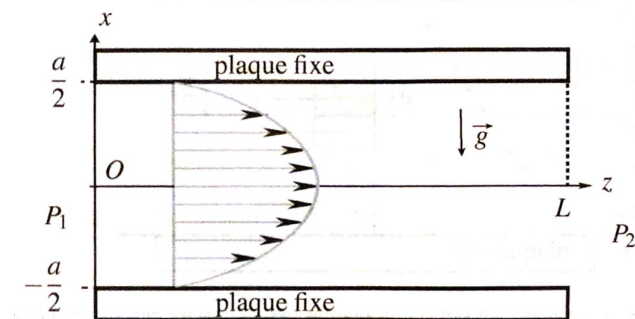


Champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille plan

L'écoulement de POISEUILLE plan est similaire à l'écoulement de Couette plan, sauf que :

- les deux plaques sont immobiles ;
- le fluide est mis en mouvement par une différence de pression entre l'amont et l'aval.

On suppose par ailleurs que l'écoulement est **laminaire** : le profil de vitesse est régulier et les lignes de courant bien définies. La différence de pression est dirigée selon l'axe (Oz) , qui est donc l'axe d'écoulement du fluide.

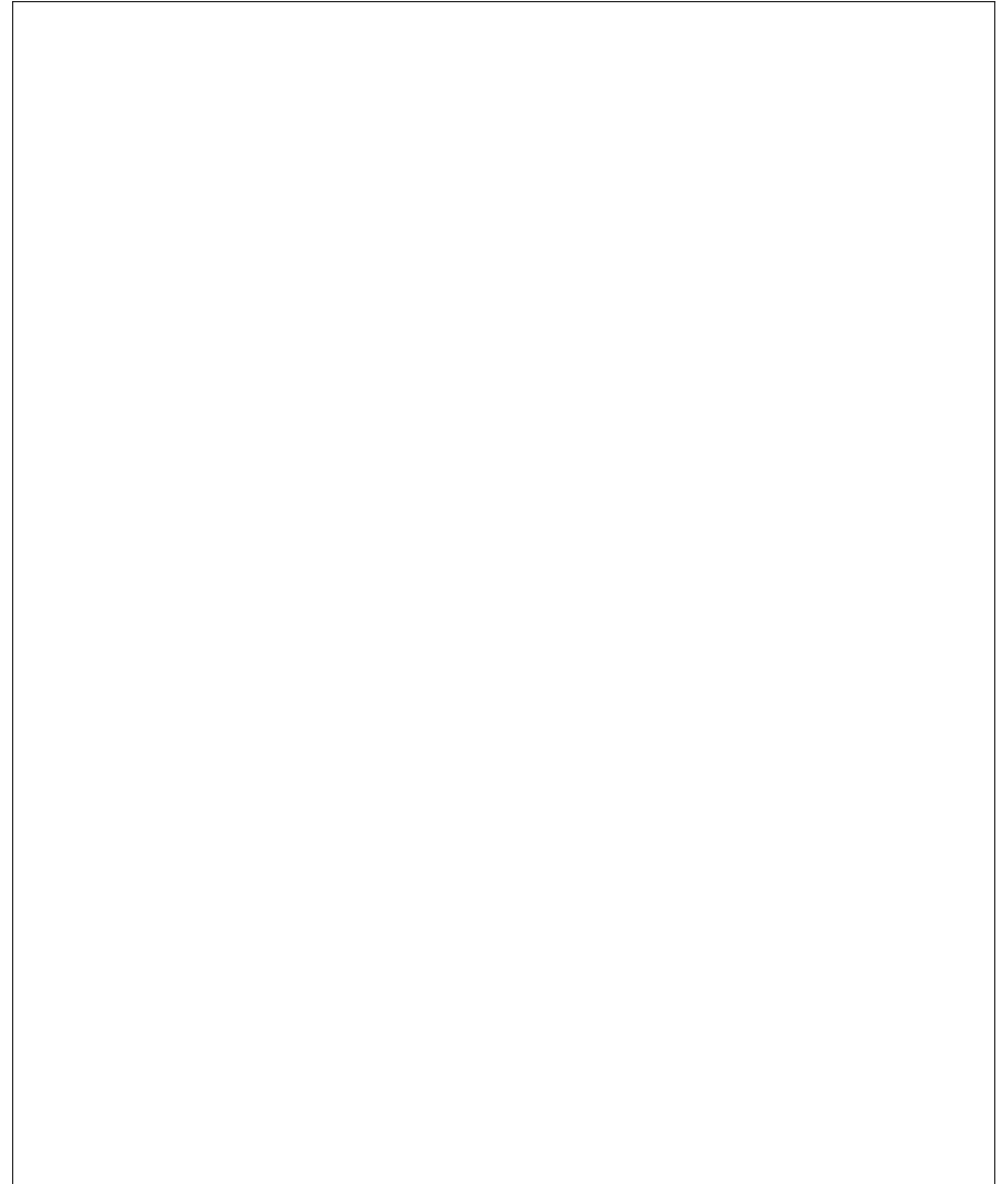


Attention : le système n'est plus invariant par translation selon l'axe (Oz) !

Exercice : Montrer que le profil de vitesse de l'écoulement de POISEUILLE plan est donné par :

$$\vec{v}_z(x) = \frac{P_2 - P_1}{8\eta L} (4x^2 - a^2) \vec{u}_z$$

Réponse :



Chapitre IX

Écoulements de fluide

Pré-requis

- Statique et dynamique des fluides ;
- Notion de particule de fluide.

Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Écoulement incompressible et homogène dans une conduite cylindrique	
Écoulements laminaire, turbulent.	Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent).
Vitesse débitante.	Relier le débit volumique à la vitesse débitante.

Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Nombre de REYNOLDS.	Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion. Interpréter le nombre de REYNOLDS comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Évaluer le nombre de REYNOLDS et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
Chute de pression dans une conduite horizontale. Résistance hydraulique.	Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de REYNOLDS, établir la loi de HAGEN-POISEUILLE et en déduire la résistance hydraulique. Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de REYNOLDS, pour un régime d'écoulement quelconque. Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.

Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Écoulement incompressible et homogène autour d'un obstacle	
<p>Force de traînée subie par une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme. Coefficient de traînée C_x; graphe de C_x en fonction du nombre de REYNOLDS.</p> <p>Notion de couche limite.</p>	<p>Associer une gamme de nombre de REYNOLDS à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.</p>
<p>Forces de traînée et de portance d'une aile d'avion à haut REYNOLDS.</p>	<p>Pour les écoulements à grand nombre de REYNOLDS décrire qualitativement la notion de couche limite.</p> <p>Définir et orienter les forces de portance et de traînée. Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence de l'écoulement.</p>

Introduction

Les écoulements de fluide dans les conduites cylindriques sont nombreux au quotidien : canalisations d'eau, de gaz, oléoducs... Nous étudierons dans ce chapitre le cas des écoulements incompressibles et homogènes dans ce type de géométrie, puis autour d'un obstacle de géométrie donnée.

IX.1 Écoulement homogène et incompressible dans une conduite cylindrique

IX.1.1 Vitesse débitante

Comme nous l'avons vu dans le précédent chapitre, le champ de vitesse d'un fluide en écoulement est modifié en présence des forces de viscosité : le fluide visqueux, au contact de deux parois fixes, possède une vitesse plus importante vers le centre de la conduite que vers l'extérieur, où elle est par définition nulle (cf. C.L. définies au précédent chapitre).

Ainsi, **il n'est pas possible de définir une vitesse uniforme** pour le fluide. Nous ne pouvons que définir sa vitesse moyenne, appelée aussi **vitesse débitante**.

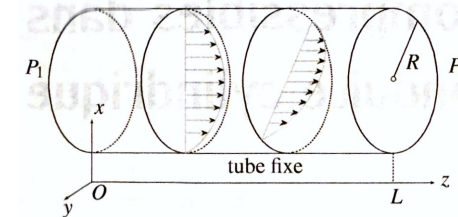
Définition : Vitesse débitante

Rappel : $D_v = \iint_{S_d} \vec{v}(M, t) \cdot dS$ où $\vec{v}(M, t)$ est défini localement.

ATTENTION ! La vitesse débitante **n'est pas** la valeur moyenne du champ de vitesse du fluide dans la conduite ! Le calcul passe nécessairement par la détermination du débit D_v .

Exemple : Soit le champ de vitesse d'un écoulement de POISEUILLE dans une conduite cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R :

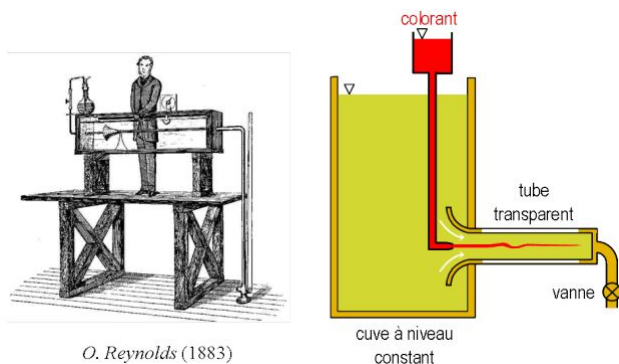
$$v_z(r) = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta L}$$



Montrer que la vitesse débitante s'exprime comme $U = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\eta L}$

IX.1.2 Écoulements laminaires et turbulents

Description : L'expérience de Reynolds (1883) consiste à suivre l'évolution du champ de vitesse d'un écoulement en le matérialisant à l'aide d'un colorant (KMnO_4). La vitesse de l'écoulement peut être modifiée par action d'une vanne en aval de l'écoulement ¹.



O. Reynolds (1883)

Le diamètre du tube est fixé.

Observations :

- Écoulement "lent" :
- Écoulement "rapide" :

Interprétations :

En plus du paramètre vitesse, REYNOLDS a identifié d'autres sources de modification du comportement d'un écoulement : la masse volumique et la viscosité du fluide interviennent également, ainsi que le diamètre du tube.

Remarque : ce comportement s'observe au quotidien : il suffit d'ouvrir un robinet pour s'en rendre compte ! Peu ouvert : écoulement laminaire, filet d'eau "droit". Très ouvert ; gouttes éjectées, bruit, eau "blanchie" car présence de bulles d'air en grande quantité : écoulement turbulent.

Afin de qualifier le régime de l'écoulement, le physicien SOMMERFELD a introduit en 1908 une grandeur sans dimension : le **nombre de Reynolds**, R_e .

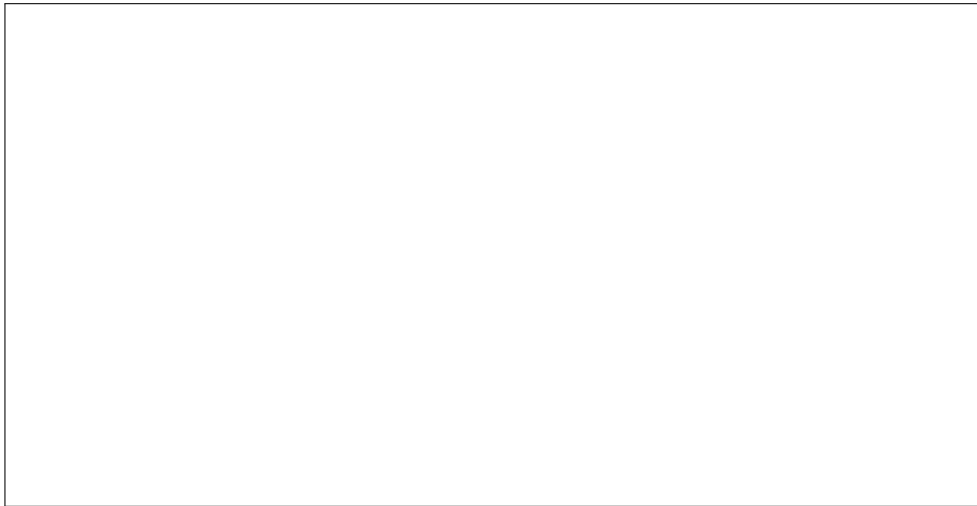
IX.1.3 Nombre de Reynolds

Construction par analyse dimensionnelle

Nous avons distingué quatre grandeurs possédant une influence sur le régime de l'écoulement : la vitesse débitante U du fluide, le diamètre D de la conduite, la masse volumique μ du fluide ainsi que sa viscosité η .

Exercice : À partir d'une analyse dimensionnelle portant sur les quatre grandeurs précédentes, construire le nombre sans dimension R_e sachant que celui-ci est inversement proportionnel à la viscosité η .

1. (référence : <http://res-nlp.univ-lemans.fr>)



Ceci définit le **nombre de Reynolds** de l'écoulement. Le choix de rendre Re inversement proportionnel à la viscosité est justifié par la suite.

IX.1.4 Interprétation physique du nombre de Reynolds

Transport de quantité de mouvement

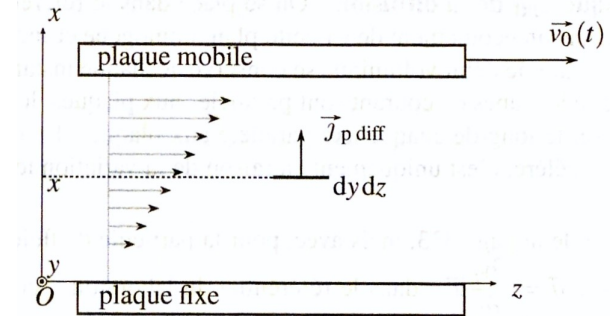
Lors d'un écoulement, les particules de fluide sont entraînées à une certaine vitesse. Elles transportent donc leur quantité de mouvement d'un point à l'autre de l'écoulement. Dans un fluide visqueux, ce transfert peut s'effectuer sous deux formes :

- par **convection** : la quantité de mouvement de la particule est transportée par l'écoulement lui-même ;
- par **diffusion** : c'est le cas déjà observé de la mise en mouvement des couches de fluide successives par effet d'entraînement. La quantité de mouvement diffuse alors de **manière orthogonale** à l'écoulement.

Pour illustrer ces deux phénomènes, reprenons l'exemple de l'écoulement de COUETTE plan.

Transport de quantité de mouvement par diffusion

On reprend le schéma de l'écoulement de Couette plan :



Exercice : En appliquant le PFD à une particule de fluide soumise aux forces de viscosité des deux particules situées en x et $x + dx$, montrer que le champ de vitesse respecte l'équation :

$$\mu \frac{\partial v_z}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$$

On reconnaît une équation de diffusion de la forme $\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$, avec $\nu = \frac{\eta}{\mu}$: il s'agit de la diffusion de la quantité de mouvement lors de l'écoulement d'un fluide visqueux. ν est nommé **coefficient de viscosité cinématique** du fluide. Il s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, comme tous les coefficients de diffusion.

Conclusion : Force de viscosité

Le temps caractéristique nécessaire pour assurer le transfert de quantité de mouvement dans le fluide sur une distance caractéristique L est donc :

$$\tau_{diff} \simeq \frac{L^2}{\nu} = \frac{\mu L^2}{\eta}$$

Transport de quantité de mouvement par convection

Le phénomène de convection s'effectue à la vitesse débitante du fluide U . Le transport de la quantité de mouvement par convection se fait donc également à cette vitesse. Le temps caractéristique de convection est donc :

$$\tau_{conv} = \frac{L}{U}$$

Conclusion

La diffusion tend à homogénéiser l'écoulement dans toute la conduite : c'est donc elle qui domine dans les écoulements laminaires. Au contraire, la convection, c'est-à-dire l'inertie du fluide, domine dans les écoulements turbulents.

Exercice : Déterminer la relation entre le nombre de REYNOLDS et les temps caractéristiques de diffusion et de convection de la quantité de mouvement.

Ainsi le nombre de REYNOLDS traduit l'importance relative des phénomènes de transport de quantité de mouvement dans un fluide : la diffusion et la convection.

Conclusion : Nombre de REYNOLDS et nature d'un écoulement :

On retiendra l'ordre de grandeur suivant : on considère que, **dans une conduite**, la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent s'effectue pour $Re \simeq 2000$. Cette limite n'est évidemment pas aussi abrupte dans la réalité.

Exemples : Déterminer les vitesses débitantes des fluides des écoulements suivants pour passer du régime d'écoulement laminaire au régime d'écoulement turbulent :

- eau à 20°C dans une conduite de diamètre 5 cm.
- eau à 20°C dans une conduite de diamètre 1 cm.
- air à 20°C dans une conduite de diamètre 5 cm.

Données : η_{air} à 20°C : $1,8 \cdot 10^{-5}$ Pl.

IX.1.5 Écoulements similaires

Nous avons vu qu'un écoulement peut être caractérisé par un seul nombre, le nombre de REYNOLDS. Ainsi, deux écoulements de fluides de nature différente (μ , η différents) peuvent posséder le même nombre de REYNOLDS si la dimension caractéristique de l'écoulement et/ou la vitesse débitante est bien ajustée. Ces deux écoulements sont appelés **écoulements similaires**.

Définition : Écoulements similaires

L'utilité est immédiate : pour réaliser des tests d'écoulement sur des profilés comme les ailes d'avion, il n'est pas nécessaire de construire une maquette à taille réelle : en

reproduisant l'aile à l'échelle 1/100, on peut simuler l'écoulement en multipliant la vitesse débitante par 100 par rapport aux conditions réelles ; ou alors, changer l'air par de l'eau ($\frac{\nu_{air}}{\nu_{eau}} = 15$) et diviser U par 15, expérimentalement avantageux car les grandes vitesses sont difficiles à mettre en œuvre au laboratoire.

Remarque : le comportement d'un écoulement ne dépend pas que de R_e : de nombreux autres nombres adimensionnés existent. Le passage d'un fluide à l'autre, d'une vitesse à une autre, peut entraîner d'autres phénomènes non désirés (cavitation, diffusion thermique...).

IX.1.6 Chute de pression dans une conduite horizontale

Loi de Hagen-Poiseuille

On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse μ et de viscosité dynamique η . Le fluide s'écoule dans une conduite cylindrique horizontale d'axe (Oz) , de rayon R et de longueur L . On suppose R suffisamment faible pour pouvoir négliger l'influence de l'altitude sur la pression. La pression en entrée de la conduite est P_e , celle en sortie est P_s .

Allure du champ de vitesses $\vec{v}(M)$:

On suppose le **régime laminaire** : l'écoulement se fait donc selon \vec{u}_z . La conduite étant par ailleurs cylindrique, le champ de vitesses est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) : il est donc indépendant de θ .

On recherche donc le profil des vitesses sous la forme $\vec{v}(M) = v(r, z)\vec{u}_z$. L'écoulement étant homogène et incompressible, $\text{div}\vec{v} = 0$. On obtient ainsi : $\frac{\partial v(r, z)}{\partial z} = 0$, donc v est indépendante de z . Ainsi :

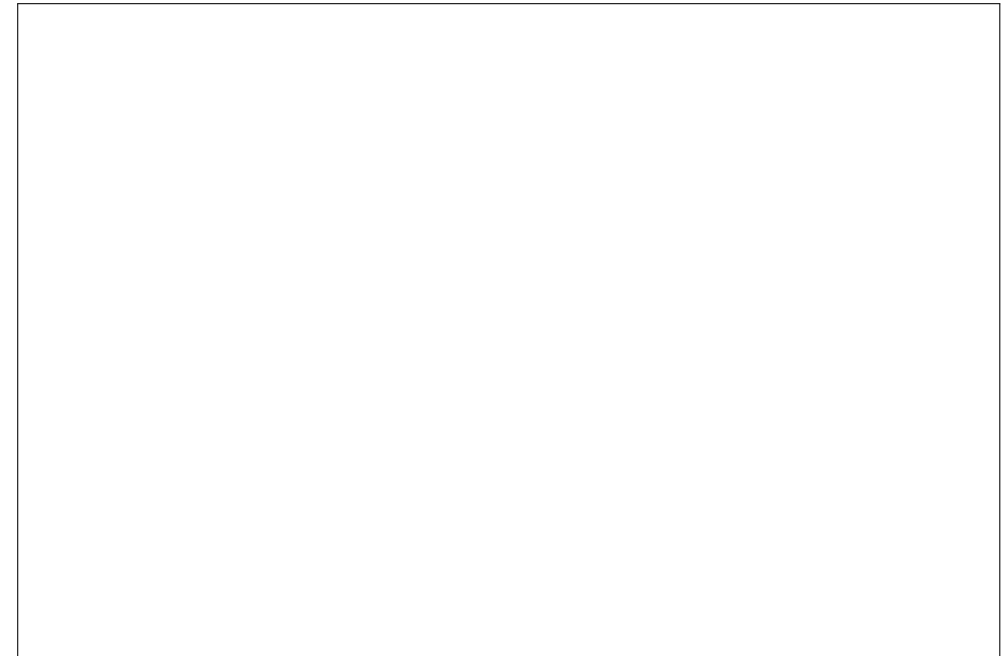
$$\vec{v}(M, t) = v(r)\vec{u}_z$$

Exercice : À partir d'un bilan des forces macroscopiques sur un cylindre de fluide de rayon $r < R$, montrer que le champ de vitesses est de la forme :

$$\vec{v}(M) = \frac{(P_e - P_s)(R^2 - r^2)}{4\eta L} \vec{u}_z$$

En déduire que le débit volumique D_v s'écrit :

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_e - P_s) \quad \text{Loi de Hagen-Poiseuille}$$



Le débit volumique D_v est donc directement proportionnel à l'écart de pression $\Delta P = P_e - P_s$. Il varie par ailleurs comme le rayon de la conduite à la puissance 4.

Notion de résistance hydraulique

On observe que la différence de pression ΔP s'accompagne d'un débit volumique D_v . Il est alors possible de faire une analogie avec l'électricité :

Électricité	Mécanique des fluides
Différence de potentiel (V)	Différence de pression (Pa)
Courant (A)	Débit volumique ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)
$\Delta V_{1 \rightarrow 2} = RI_{1 \rightarrow 2}$	$\Delta P_{1 \rightarrow 2} = R_{\text{hyd}} D_{v, 1 \rightarrow 2}$

Définition : Résistance hydraulique

Tout comme en électricité, il est possible d'associer les résistances hydrauliques :

- ajout des résistances lorsque les conduites sont "en série", donc supportant un même débit volumique.
- somme des inverses des résistances lorsque les conduites, **distinctes**, sont en parallèle, donc soumises à la même différence de pression.

Perte de charge**Mise en évidence d'une perte de charge : chute de pression dans un écoulement de Poiseuille cylindrique**

Un tuyau principal, horizontal, d'axe (Oz) , de rayon R , est parcouru par un liquide de masse volumique μ , et de viscosité η , avec un débit volumique D_v constant dans le temps. Ce tuyau principal est percé de plusieurs trous sur sa partie supérieure, comme le montre la figure précédente. Quatre tubes verticaux sont reliés à ces quatre orifices.

Schéma de l'expérience :

Observations :

Interprétation : Montrer que la différence de hauteur $\Delta h = h_i - h_j$ entre les niveaux d'eau des tubes i et j est liée à la distance $\Delta z = z_j - z_i$ entre ces tubes selon la

$$\text{relation : } \mu g(h_i - h_j) = \frac{8\eta(z_j - z_i)}{\pi R^4} D_v$$

Résistance équivalente : Montrer que le système se comporte comme la mise en série de trois résistances hydrauliques dont on précisera l'expression.

IX.2 Écoulement externe homogène et incompressible autour d'un obstacle

Contrairement à la partie précédente, nous étudions l'écoulement autour d'un obstacle et non plus à l'intérieur d'un milieu donné (conduite cylindrique). Deux types d'obstacle seront considérés ici : la sphère solide et indéformable, et le profil d'aile d'avion.

IX.2.1 Notion de couche limite

Définition

Schémas pour différents nombre de Reynolds :

Définition : Couche limite

La couche limite présente une structure différente suivant la valeur du nombre de REYNOLDS R_e de l'écoulement :

- R_e faible :

- R_e grand :

Conclusion :

Puisque la variation de vitesse n'est importante que dans la couche limite, c'est dans cette zone de l'espace que **l'effet de la viscosité se fait le plus ressentir**. La vitesse au-delà de la couche limite est peu impactée par l'obstacle : **les effets de la viscosité se font moins sentir et la vitesse est homogène**.

Épaisseur de la couche limite

L'épaisseur de la couche limite peut être estimée par :

$$\delta \simeq \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

avec L la taille caractéristique de l'obstacle et Re le nombre de REYNOLDS de l'écoulement.

Démonstration :

Exemple :

Déterminer l'épaisseur de la couche limite pour une voiture de taille caractéristique 2 mètres au contact d'un vent de 30 m.s^{-1} .

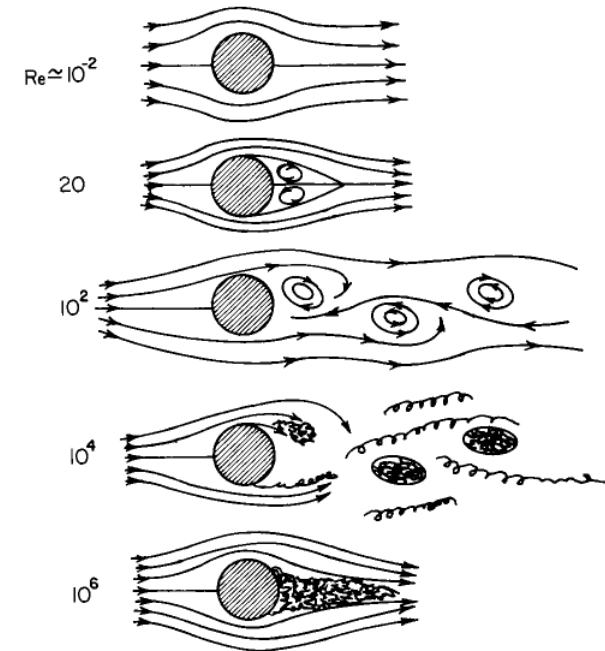
Remarque : L'épaisseur de la couche limite est souvent très faible devant la taille de l'obstacle. Mais **attention** : les phénomènes qui s'y déroulent sont loin d'être négligeables ! (dissipation thermique, cavitation...).

IX.2.2 Exemple d'écoulement autour d'un obstacle : Écoulement autour d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds

Forme de l'écoulement

L'observation de l'écoulement autour d'une sphère montre différents régimes en fonction du nombre de REYNOLDS.

Représentations schématiques de l'écoulement autour d'une sphère pour différents nombres de Reynolds



- Pour $Re \ll 1$:

- Pour $Re \sim 20$:

- Pour $Re \sim 100$:
- Pour $Re > 1000$:
- Pour $Re \sim 3 \cdot 10^5$:

Force de traînée subie par une sphère

Considérons une sphère immobile dans un fluide de masse volumique μ et de viscosité η . On attache à la sphère un référentiel \mathcal{R} .

Lorsque le fluide est au repos, nous avons vu que les seules forces qui s'exercent sur la sphère sont **son poids** et **la résultante des forces de pression** du fluide sur la sphère; celle-ci se résume à la poussée d'ARCHIMÈDE dans le cas statique.

Lorsque le fluide est en écoulement à une vitesse donnée, il faut rajouter à ces forces les **forces de cisaillement liées à la viscosité du fluide**. Par ailleurs, la résultante des forces de pression est **modifiée par rapport au cas statique**, le champ de pression étant modifié du fait de la présence de la couche limite autour de la sphère.

Définition : Force de traînée

On appelle **force de traînée**, notée \vec{F}_{tr} , la résultante des forces de pression et de cisaillement **dans la direction de l'écoulement**, en ne considérant que les forces de pression liées à l'écoulement.

Cette dernière phrase signifie qu'il ne faut pas prendre en compte, dans l'expression de la force de traînée, les forces de pression engendrées par la différence d'altitude dans l'écoulement.

Expression de la force de traînée

Il n'existe pas de loi analytique générale pour exprimer la force de traînée subie par une sphère. Pour pouvoir comparer les résultats obtenus de différentes expériences dans différentes conditions d'écoulement (fluides, vitesse d'écoulement, taille de l'obstacle...), il est nécessaire de définir **un paramètre adimensionné**.

Dans le cas de l'écoulement autour d'un obstacle, outre le nombre de REYNOLDS qui caractérise le type d'écoulement, on définit un nouveau nombre, lié à la force de traînée : **le coefficient de traînée**.

Définition : Coefficient de traînée

Soit un écoulement incompressible et homogène, de masse volumique μ et de vitesse v_∞ loin de l'obstacle. Celui-ci possède une section droite S . Le **coefficient de traînée** est le nombre sans dimension défini par :

$$C_x = \frac{\|\vec{F}_{tr}\|}{\frac{1}{2}\mu v_\infty^2 S}$$

où \vec{F}_{tr} est la force de traînée exercée par l'écoulement sur la sphère.

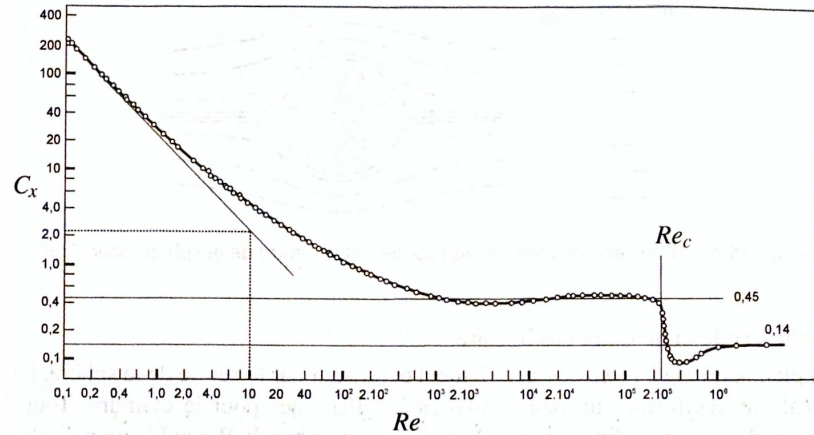
Construction du coefficient de traînée

Remarque 1 : S est la section droite de la sphère : on l'appelle le **maître-couple**

Remarque 2 : la grandeur $\frac{1}{2}\mu v_\infty^2 D_v = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 v_\infty S$ est la puissance cinétique d'un écoulement de section S et de vitesse v_∞ . Cette expression - d'origine physique (puissance cinétique volumique) - justifie l'utilisation du facteur 1/2 dans l'expression de C_x .

C_x et nombre de Reynolds

Le graphe suivant montre l'évolution du coefficient de traînée C_x avec le nombre de REYNOLDS Re pour une sphère lisse :



Ce graphique, représenté en échelle log-log, possède l'avantage de regrouper **un très grand nombre de données pour une géométrie particulière**, et peut être utilisé pour évaluer la force de traînée sur **un obstacle assimilé à une sphère**.

Zones du graphique remarquables :

- $Re < 1$:
- $1 < Re < 2.10^3$:
- $2.10^3 < Re < 2.10^5$:

- $Re > 2.10^5$:

Force de Stokes

Exercice : Montrer que, pour $Re < 1$, la force de traînée prend la forme suivante :

$$\vec{F}_{tr} = -6\pi\eta R\vec{v}_s$$

Conclusion : Le coefficient de traînée peut être défini pour tout objet. Les recherches en aérodynamisme visent à diminuer sa valeur (véhicules, skieur/cyclistes, ...). De façon générale, l'allure de $C_x(Re)$ est sensiblement la même pour tous les objets (variation en $1/Re$ pour les faibles valeurs de Re , invariance pour les fortes valeurs de Re). On pourra noter que les écoulements de la vie quotidienne sont généralement turbulents.

IX.2.3 Portance et traînée d'une aile d'avion

Description d'une aile d'avion

L'écoulement d'un fluide autour d'une aile d'avion se décrit de la même manière que celui autour d'une sphère. Cependant, l'aile d'avion n'est pas symétrique comme la sphère : plusieurs caractéristiques doivent être décrites avant d'étudier l'écoulement à proprement parler.

Schémas d'une aile d'avion :

La **flèche maximale** f est la plus grande distance entre la corde et le squelette. Le rapport f/L est la **courbure relative** (ou cambrure).

L'**envergure de l'aile** est la longueur du bord de fuite L_{env} . On considérera par la suite que $L \ll L_{env}$. Par ailleurs, tout écoulement sera décrit dans le référentiel de l'aile ; l'écoulement a donc une vitesse v_∞ par rapport à l'aile, loin de celle-ci.

L'**angle d'incidence de l'écoulement sur l'aile** est l'angle i formé par la direction de l'écoulement et celle de la corde de l'aile.

Finalement, à partir de ces données, le calcul du nombre de REYNOLDS pour une aile d'avion est donné par :

$$R_e = \frac{\mu v_\infty L}{\eta}$$

avec L la longueur de la corde.

Pour déterminer le coefficient de traînée C_x , il faut connaître la surface de référence de l'aile d'avion. **Celle-ci n'est pas le maître-couple**, contrairement à la sphère, car cette surface dépend de l'angle d'incidence i dans le cas de l'aile d'avion. On choisit alors comme surface : $S = L \times L_{env}$. Cette surface est celle utilisée dans le calcul de C_x .

Force de traînée et force de portance

Définition : Forces de traînée et de portance d'une aile d'avion

Une aile dont la corde est inclinée de l'angle d'incidence i par rapport à v_∞ subit :

- la **force de traînée** \vec{F}_{tr} est la résultante des forces de contact de l'air sur l'aile, **parallèlement à l'écoulement** ;
- la **force de portance** \vec{F}_{por} est la résultante des forces de contact de l'air sur l'aile, **perpendiculairement à l'écoulement**.

Représentations des forces de traînée et de portance sur un profil d'aile d'avion :

On définit les termes suivants :

- **extrados** :
- **intrados** :
- **bord de fuite** :
- **bord d'attaque** :
- **la corde** :
- **le squelette** ou ligne moyenne :

L'**épaisseur maximale** e est la distance maximale entre l'intrados et l'extrados (dans la direction orthogonale à la corde). Le rapport e/L est l'**épaisseur relative** (comprise entre 5% et 20%).

Il est important de remarquer que **la force de portance n'est pas toujours verticale** : elle est **perpendiculaire** à v_∞ , qui n'est horizontale que dans certaines phases de vol particulières, mais ni au décollage, ni à l'atterrissage.

Elle a pour origine **la différence de pression entre l'extrados et l'intrados** : l'extrados est en surpression négative, l'intrados en surpression positive, provoquant une poussée vers le haut (ou vers le bas, suivant l'inclinaison de l'aile).

Tout comme dans le cas de la sphère, on définit les **coefficients de traînée** et de **portance** C_x et C_z .

Définition : Coefficients de traînée et de portance d'une aile d'avion

Les coefficients de traînée C_x et de portance C_z sont définis par :

$$C_x = \frac{\|\vec{F}_{tr}\|}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S} \quad \text{et} \quad C_z = \frac{\|\vec{F}_{por}\|}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S}$$

avec $\vec{F}_{por} = \vec{F}_{tot} \cdot \vec{n}$, où \vec{n} est le vecteur unitaire orthogonal à la direction de l'écoulement.

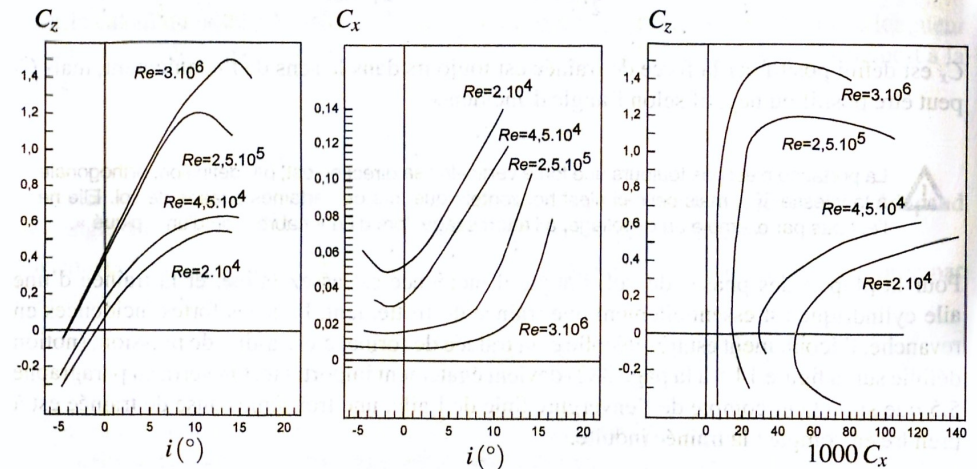
On définit par ailleurs la finesse f_0 d'un profil d'aile :

$$f_0 = \frac{C_z}{C_x} = \frac{F_{por}}{F_{tr}}$$

Exploitation des courbes de portance et de traînée

La portance et la traînée sont représentées pour chaque angle d'incidence, et à chaque nombre de REYNOLDS associé à l'écoulement. En effet, l'angle d'incidence a directement un impact sur les deux grandeurs : plus il est important, plus la portance est grande (jusqu'à une certaine limite, à partir de laquelle on observe le **décrochage**), et plus la traînée aussi (surface exposée à l'écoulement plus importante).

Lorsque Re augmente, C_z augmente et C_x diminue. Ce dernier point est en accord avec l'étude de l'écoulement autour d'une sphère.



Remarque : les courbes présentées ici² sont celles d'un profil d'aile NACA 4412 (4% de cambrure, à 40% de la corde, et d'épaisseur relative 12%).

La dernière courbe est appelée **polaire** ou **polaire d'Eiffel** : elle représente C_z en fonction de C_x , pour différentes valeurs d'incidence. Elle permet d'obtenir simplement la finesse f_0 de l'aile. Un point quelconque de la courbe est repéré par l'angle α tel que $\tan \alpha = f_0$.



Chapitre X

Bilans macroscopiques

Pré-requis

- statique et dynamique des fluides ;
- thermodynamique (premier principe industriel) ;
- mécanique classique (quantité de mouvement, moment cinétique).

Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle de l'écoulement parfait : adiabatique, réversible, non visqueux. Relation de Bernoulli. Effet Venturi.	Utiliser le modèle de l'écoulement parfait pour un écoulement à haut REYNOLDS en dehors de la couche limite. Énoncer et appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène. Décrire l'effet Venturi. Décrire les applications : tube de Pitot, débitmètre.
Pertes de charge régulière dans une conduite. Diagramme de MOODY	Relier qualitativement la perte de charge à une dissipation d'énergie mécanique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Bilan macroscopique d'énergie mécanique.	Effectuer un bilan d'énergie sur une installation industrielle (pompe, turbine...) Utiliser le fait admis que la puissance des actions intérieures est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.
Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique	
Loi de la quantité de mouvement pour un système fermé. Loi du moment cinétique pour un système fermé.	Effectuer l'inventaire des forces extérieures. Effectuer un bilan de quantité de mouvement. Effectuer un bilan de moment cinétique.

Introduction

Ce chapitre présente une manière générale d'effectuer des bilans de grandeurs physiques dans des systèmes ouverts, où par définition énergie et particules peuvent s'échanger. Il s'inscrit dans ce sens à la fois comme la fin du cours sur la mécanique des fluides, et la suite du cours de première année sur les machines thermiques.

X.1 Bilans thermodynamiques d'énergie et d'entropie

Ce bilan a déjà abordé dans le chapitre consacré aux principes de la thermodynamique. Les points importants sont les suivants :

- Pour un système thermodynamique **fermé**, les premiers et second principes de la thermodynamique s'écrivent, pour une transformation élémentaire entre deux instants t et $t + dt$:

$$dU + dE_c + dE_p = \delta W_p + \delta Q + \delta W_a \quad \text{et} \quad dS = \delta S_{ech} + \delta S_{cr}$$

où U et S sont les énergie interne et entropie du système, E_c et E_p les énergies cinétique macroscopique et potentielle, δW_p l'énergie échangée par le travail des forces de pression, δQ l'énergie échangée par transfert thermique, δW_a le travail des forces "autres" (frottements, électrique...), δS_{ech} et δS_{cr} les entropies échangée et créée lors de la transformation.

- Pour un système thermodynamique **ouvert**, i.e. présentant un écoulement, il est nécessaire de prendre en compte les échanges d'énergie associés aux transferts de masse à l'entrée et à la sortie du système. On établit alors le premier principe de la thermodynamique en système ouvert en régime stationnaire, ou premier principe industriel :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q$$

où h est l'enthalpie massique du système et w_u est le travail utile massique, i.e. l'énergie échangée avec un dispositif (hélice, turbine, pompe...) entre deux instants t et $t + dt$. Toutes les grandeurs de cette expression sont massiques : $e_c(t) = \frac{1}{2}v(t)^2$, $e_p(t) = gz(t)$ avec $v(t)$ la vitesse du système et $z(t)$ son altitude.

- Pour un tel système, le second principe prend la forme :

$$\Delta s = s_{ech} + s_{cr}$$

où toutes les grandeurs sont de nouveau massiques.

- Dans le cas où N entrées et M sorties sont présentes, chacune avec un débit massique D_m , ces principes prennent une forme plus générale (P : puissance) :

$$\sum_i^N D_{me,i} (h_i + e_{c,i} + e_{p,i}) = \sum_j^M D_{ms,j} (h_j + e_{c,j} + e_{p,j}) + P_u + P_{th}$$

$$\sum_i^N D_{me,i} s_i = \sum_j^M D_{ms,j} s_j + \frac{\delta S_e}{dt} + \frac{\delta S_c}{dt}$$

X.2 Bilans d'énergie dans le cas d'un écoulement parfait de fluide

X.2.1 Modèle de l'écoulement parfait

Jusqu'à présent, nous avons étudié les écoulements de fluide dans une situation assez générale prenant en compte la **viscosité** du fluide. Nous avons alors discuté de l'existence d'une force dissipative, apparentée à une force de frottements fluides (cf. force de traînée).

Cette section a pour but de traduire **de manière énergétiquement** l'écoulement d'un fluide. Cependant, l'existence de forces dissipatives empêche l'existence d'une loi de conservation de l'énergie au sein du fluide. C'est pour cela que nous allons étudier un écoulement plus simple que précédemment : l'écoulement parfait.

Définition : Écoulement parfait

Critique du modèle

Cet écoulement est avant tout un modèle ; il peut cependant servir de première approche pour décrire un écoulement quelconque, grâce aux calculs simples qu'il permet. Ainsi, les conditions aux limites sont simplifiées : il n'y a plus d'adhérence aux parois (pas de viscosité), donc la seule condition est que le champ de vitesse soit tangent à la paroi (ligne de courant parallèle à la paroi). Dans le cas d'une conduite cylindrique, le champ de vitesses d'un tel écoulement est **uniforme** dans une section droite du cylindre.

De manière générale, un écoulement peut être considéré comme parfait dans les zones de l'écoulement où le champ de vitesse ne varie pas : c'est le cas en dehors de la **couche limite** lors de l'écoulement autour d'un obstacle.

Enfin, on peut remarquer qu'un écoulement de viscosité négligeable correspond à un écoulement à **nombre de Reynolds élevé**.

X.2.2 Relation de Bernoulli

Définition : Relation de BERNOULLI

Soit un fluide de masse volumique μ et soumis à la seule force de pesanteur. Si l'écoulement de ce fluide est **parfait, stationnaire, incompressible** et **homogène** alors, **le long d'une ligne de courant** :

$$\Delta \left(P + \frac{1}{2} \mu v^2 + \mu g z \right) = 0$$

Démonstration :

Chaque terme de cette relation a un nom :

- $P + \frac{1}{2} \mu v^2 + \mu g z$ est la **pression totale** ;
- $P + \mu g z$ est la **pression motrice** ;
- $\frac{1}{2} \mu v^2$ est la **pression dynamique**.

Exercice : vitesse d'un jet en sortie de réservoir

On suppose un réservoir rempli d'eau sur une hauteur h . La surface libre dans le réservoir est de grande section S et au contact de l'air. Un trou de petite section s est percé sur la paroi latérale du réservoir. En supposant la variation du niveau d'eau négligeable lors de l'écoulement par la section s , déterminer la vitesse du fluide en un point de cette section.



X.2.3 Applications

Effet Venturi

Effet Venturi

Pour un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible, la pression dans l'écoulement diminue lorsque les tubes de champ rétrécissent.

Exemple : Écoulement dans une canalisation cylindre de section variable

On considère un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible dans une conduite présentant un rétrécissement local, la section passant de S_1 à S_2 , avec $S_2 < S_1$, puis revenant à S_1 , comme le montre la figure ci-dessous.

- Caractère **parfait** de l'écoulement :
- Caractère **incompressible et homogène** :

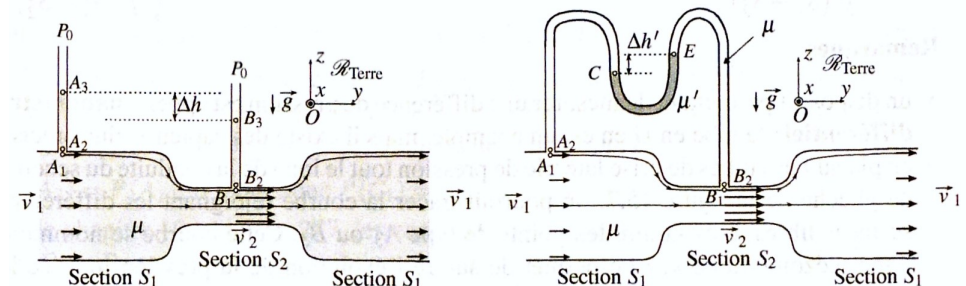
- Relation de BERNOULLI :

Conclusion :

Exemple d'application : outre le débitmètre Venturi (cf. ci-dessous), une des manifestations les plus impressionnantes de cet effet est l'effet COANDA : un écoulement de fluide autour d'un obstacle convexe (bombé) provoque une dépression au niveau de l'obstacle du fait du rapprochement des lignes de courant. Ainsi l'obstacle se déplace dans le fluide de manière contre-intuitive : au lieu de se faire "souffler", il se rapproche du cœur de l'écoulement. On l'observe notamment pour l'écoulement d'air autour d'une aile d'avion (portance), le versement du thé d'une théière ou de l'eau d'une bouilloire ou d'un verre...

Débitmètre de Venturi

La différence de pression provoquée par le rétrécissement de la conduite est directement liée aux vitesses du fluide dans les deux sections en question, donc au débit volumique du fluide. Il est possible de remonter à sa valeur à l'aide d'un dispositif nommé **débitmètre de Venturi** :

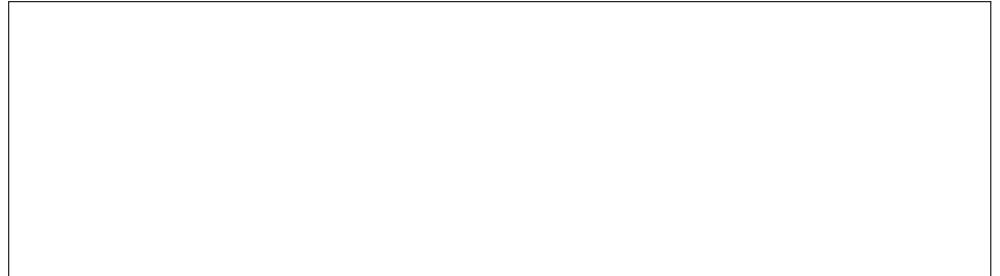


Remarque : ces schémas sont à connaître !

Le débitmètre de gauche est adapté aux liquides (cf. écoulement de POISEUILLE et pertes de charges), celui de droite est adapté aux gaz.

Exercice : On étudie le débitmètre de gauche. On suppose l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible. La masse volumique du fluide est notée μ . En appliquant la relation de BERNOULLI sur la ligne de courant allant de A_1 à B_1 , montrer que le débit volumique de l'écoulement est :

$$D_v = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}$$



Un tube pointu est percé de deux orifices :

- en B_1 , l'orifice fait face à l'écoulement. Le fluide (air) ne peut pas rentrer dans cet orifice du fait de la présence du liquide dans le tube en U ; le fluide entre C_1 et D_1 est donc statique. Le point B_1 est qualifié de **point d'arrêt** ;
- en B_2 , l'orifice est orienté perpendiculairement à l'écoulement (prise latérale de pression, comme pour le débitmètre de VENTURI).

Exercice : À l'aide de la relation de BERNOULLI appliquée sur la ligne ($A_1 B_1$) et d'hypothèses judicieuses, montrer que la vitesse de l'écoulement se déduit de la différence de hauteur Δh entre les surfaces libres du fluide présent dans le tube en U, selon la relation :

$$v = \sqrt{\frac{2\mu'g\Delta h}{\mu}}$$

X.2.4 Tube de Pitot

Le tube (ou sonde) de PITOT est un dispositif utilisé pour mesurer la vitesse d'un écoulement à partir d'une mesure de différence de pression (principe du **manomètre différentielle**). Son schéma (à connaître!) est donné ci-après :

X.3 Cas d'un écoulement réel : pertes de charge

X.3.1 Définition

En prenant en compte des phénomènes diffusifs comme la viscosité, la relation de BERNOULLI doit être modifiée : il y a perte d'énergie le long de la ligne de courant.

Définition : Charge d'un fluide

La charge est homogène à une distance z . La perte de charges correspond à la différence entre les valeurs des pressions totales entre deux points d'une ligne de courant, divisée par μg . On distingue deux types de charges :

- les charges **régulières** :
- les charges **singulières** :

X.3.2 Perte de charge régulière

On considère une conduite de longueur L et de diamètre D . Comme étudié précédemment, la perte de charges se manifeste par la diminution de pression lors d'un écoulement (cf. perte de charges en conduite cylindrique).

Dans un écoulement stationnaire, homogène et incompressible, on appelle **perte de charge régulière** entre deux points d'une même ligne de courant, la grandeur :

$$\frac{\Delta P_{tot,reg}}{\mu g} = \left(\frac{P_1}{\mu g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{P_2}{\mu g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right)$$

pour un écoulement se faisant du point 1 au point 2.

Pour caractériser ces pertes indépendamment de la nature de l'écoulement considéré, on définit un coefficient sans dimension nommé **coefficient de perte de charge régulière** et noté λ .

Définition : Coefficient de perte de charge régulière

Ce coefficient dépend à la fois du nombre de REYNOLDS de l'écoulement, mais aussi de la **rugosité** de la conduite. Un **diagramme de MOODY** permet de déterminer λ dans différentes conditions d'écoulement dans une conduite.

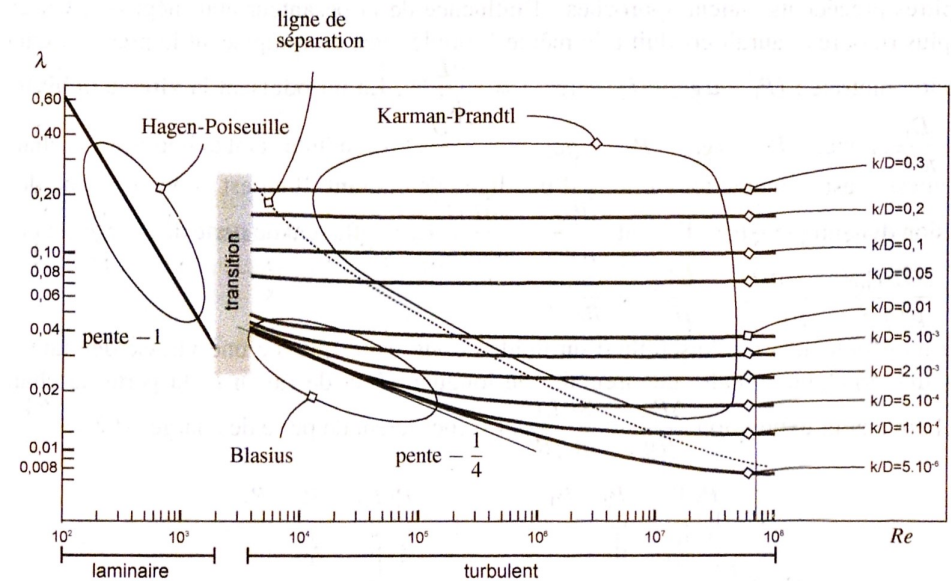


Diagramme de MOODY

Le rapport k/D définit la rugosité relative de la conduite (rugosité ramenée au diamètre de la conduite). Quelques valeurs courantes sont données ci-dessous :

Matériau	Acier soudé neuf	Acier soudé rouillé	Ciment brut	Cuivre	Verre
Rugosité (mm)	0.03 à 0.1	0.4	1 à 3	0.001	0.001

Plusieurs domaines peuvent être observés sur ce graphe :

- $R_e < 2000$:
- $2000 < R_e < 4000$:
- $4000 < R_e < 10^5$:
- à droite de la ligne pointillée (R_e élevé) :

Complément (hors-programme) : perte de charge singulière La perte de charge singulière $\frac{\Delta P_{tot,sing}}{\mu g}$ se produit en présence d'une singularité dans une conduite : coude, vanne, changement de section... On définit le **coefficient de perte de charge singulière** ζ , nombre sans dimension, pour caractériser ce phénomène :

$$\zeta = \frac{2\Delta P_{tot}}{\mu U^2}$$

Cette perte de charge est liée au changement brutal du profil de l'écoulement.

Remarque : dans le cas d'un changement de section, U est la vitesse débitante dans la **petite section**.

Cette grandeur ne possède pas d'expression particulière étant donnée la grande diversité des singularités. Elle se détermine donc numériquement ou à l'aide d'abaques.

X.4 Bilans macroscopiques d'énergie mécanique

Il s'agit du cas particulier où le fluide ne reçoit qu'un transfert d'énergie mécanique de la part du dispositif qu'il traverse, et pas de transfert thermique. Ce bilan est adapté aux dispositifs industriels comme les pompes ou les turbines.

Définition : Bilan de puissance mécanique

Exercice : On considère le jet d'eau vertical du lac de Genève, provoqué par une pompe permettant d'envoyer l'eau à une altitude $h = 140 \text{ m}$. Le débit volumique de la pompe est $D_v = 500 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$.

Estimer la puissance mécanique nécessaire que la pompe doit fournir pour réaliser ce jet.

X.5 Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique

Dans la suite, nous considérons les mêmes systèmes ouverts ou fermés Σ_0 , Σ_1 , Σ_2 et Σ^* définis précédemment.

X.5.1 Bilan de quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'une masse m animée d'une vitesse \vec{v} dans le référentiel \mathcal{R} est $\vec{p} = m\vec{v}$. On définit de même la quantité de mouvement d'un fluide intégrée sur les particules de fluide qui constituent l'écoulement :

$$\vec{p}(t) = \iiint_{\text{fluide}} \mu(M, t) \vec{v}(M, t) d\tau$$

où $d\tau$ est le volume d'une particule de fluide de masse volumique μ , au point M et à l'instant t . $\vec{v}(M, t)$ est le champ de vitesse de l'écoulement.

Si l'écoulement est soumis à un ensemble de forces extérieures $\vec{F}_{i,ext}$, le théorème de la résultante cinétique appliqué au système Σ^* dans \mathcal{R} s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}^*}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$$

Pour $dt \rightarrow 0$, ce bilan devient la **loi de la quantité de mouvement**.

Définition : Loi de la quantité de mouvement

Aucune relation générale n'est à retenir dans ce cas : il faut traiter chaque cas rencontré en exercice comme un cas particulier de cette loi.

Remarque importante : il est nécessaire de ne prendre en compte que les forces extérieures au système Σ^* . Par exemple, si l'on cherche à déterminer la force exercée par une hélice sur un écoulement, il faudra **exclude** l'hélice du système Σ^* , sinon cette force est une force intérieure au système et ne participe pas au bilan de quantité de mouvement.

Exemple : fusée à un réacteur

On prend pour premier exemple un système dit « de masse variable », c'est-à-dire un système qui éjecte de la matière ou bien en reçoit. L'exemple classique est celui de la fusée, qui se propulse "par réaction", c'est-à-dire grâce à l'éjection de gaz brûlés.

On effectue les hypothèses suivantes :

- la fusée est, avec son contenu, de masse m_0 à $t = 0$;
- on note $\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_z$ la vitesse de la fusée et de son contenu à l'instant t , en prenant $t = 0$ au moment où l'éjection des gaz démarre, et $v(0) = 0$;
- la fusée expulse des gaz par son propulseur avec un débit massique supposé constant D_m ;
- le gaz éjecté sort du propulseur avec une vitesse $\vec{u} = -u\vec{u}_z$, constante, par rapport au référentiel lié à la fusée ;
- on ne s'intéresse qu'à la phase de décollage, donc on suppose que le champ de pesanteur est uniforme : $\vec{g} = -g\vec{u}_z$;
- on travaille dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_{Terre} , que l'on considère galiléen.

Question : Déterminer l'évolution de \vec{v} au cours du temps.

X.5.2 Bilan de moment cinétique

De la même manière que pour la quantité de mouvement, nous redéfinissons le théorème du moment cinétique dans le cas d'un écoulement en système ouvert.

Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse \vec{v} dans le référentiel \mathcal{R} , par rapport à un point O fixé, est : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v})$.

On définit de même le moment cinétique d'un fluide, intégré sur les particules de fluide qui constituent l'écoulement :

$$\vec{L}_O(t) = \iiint_{\text{fluide}} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M, t) dm$$

avec $\vec{v}(M, t)$ est le champ de vitesse de l'écoulement.

Si O est un point fixe de \mathcal{R} , le théorème du moment cinétique appliqué au système Σ^* dans \mathcal{R} s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_O^*}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_O(\vec{F}_{i,ext})$$

Pour $dt \rightarrow 0$, l'expression devient **la loi du moment cinétique**.

Définition : Loi du moment cinétique

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe (Oz), on obtient la loi scalaire du moment cinétique :

$$\frac{L_{Oz}^*(t + dt) - L_{Oz}^*(t)}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{i,ext})$$

ATTENTION ! On sera amené à faire ce genre de bilan sur des dispositifs en régime permanent. Pour autant, on n'aura pas le plus souvent $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$. En effet, si le dispositif est en régime permanent, le système considéré, c'est-à-dire la portion de fluide en écoulement, ne l'est pas.

On fera également attention à ne pas appliquer le théorème de la résultante cinétique au système ouvert constitué de la fusée et de son contenu à l'instant t . Il est impératif de travailler en système fermé entre t et $t + dt$!