Physique - TD7 - Statique des fluides

1 Remontée d'un plongeur

Q1. En supposant que l'air contenu dans les poumons est à la température du corps ($37°\mathrm{C}$) et que son volume est de $3\,\mathrm{L}$ à $10\,\mathrm{m}$ de profondeur, calculer son volume à la surface. La pression à la surface est $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$, la masse volumique de l'eau est $\mu = 10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$. On prendra $g = 9,8\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

Q2. En déduire pourquoi, avant une remontée rapide vers la surface, les plongeurs sous-marins vident leur poumons de l'air qu'il contient.

2 À propos d'iceberg

On considère une masse de glace, de volume totale V_{tot}, flottant sur l'eau. On distingue les parties immergée et émergée, de volume respectif V_{im} et V_{em}. On note $\rho_l = 1,0.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ la masse volumique de l'eau liquide, $\rho_g = 0,9.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ celle de la glace.

Q1. Par quelle force est compensée, à l'équilibre, le poids ?

Q2. Montrer que sous une approximation que l'on explicitera, cette force s'exprime uniquement en fonction de ρ_l, V_{im} et $\overrightarrow{g}$.

Q3. Calculer la fraction de volume immergé : a-t-on raison de dire qu'un iceberg est majoritairement sous le niveau de l'eau ?

Q4. On suppose que cette masse de glace fond intégralement. Calculer le volume d'eau liquide ainsi créé, et montrer que cette fonte ne fait pas varier le niveau d'eau.

3 Modèle d'atmosphère polytropique

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme g, est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz, et de sens opposé.

On considère que l'atmosphère terrestre est constituée de gaz assimilés à des gaz parfaits. La constante des gaz parfaits est notée R. La masse molaire moyenne de l'air est notée M_e, sa pression P, se température T et sa masse volumique μ. On désigne par P_0, T_0 et μ_0 les valeurs de P, T et μ au niveau du sol (où $z = 0$).

Le modèle d'atmosphère isotherme étudié en cours ne prend pas en compte l'évolution du champ de température avec l'altitude. Aussi s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type $T = T_0(1 - \alpha z)$ où $\alpha = \dfrac{1}{z_0}$ est une constante positive. Cette approximation linéaire est en fait le développement au premier ordre en $\dfrac{z}{z_0}$ d'une expression plus précise. La valeur expérimentale $z_0 \simeq 33\,\mathrm{km}$ justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

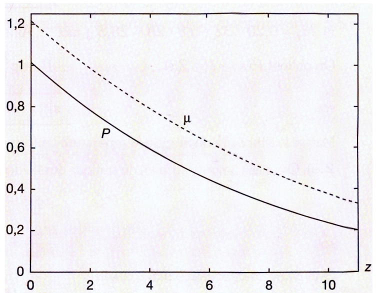
Q1. Montrer que l'on peut écrire $P(z) = P_0(1-\alpha z)^\beta$ et $\mu(z) = \mu_0(1-\alpha z)^{\beta-1}$, où l'on donnera l'expression de β en fonction de $H = \dfrac{RT_0}{M_e g}$ et de z_0.

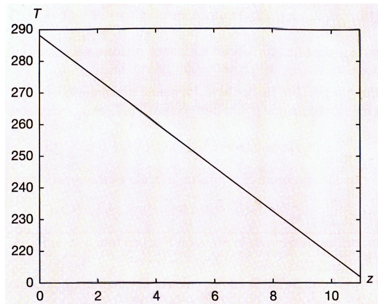
Q2. À quelle altitude $z_{50\%}^{poly}$ la pression est-elle égale à $P_0/2$? Dans le cas du modèle de l'atmosphère isotherme, la valeur obtenue est $z_{50\%}^{iso} \simeq 5,9\,\mathrm{km}$. Ce résultat était-il prévisible ?

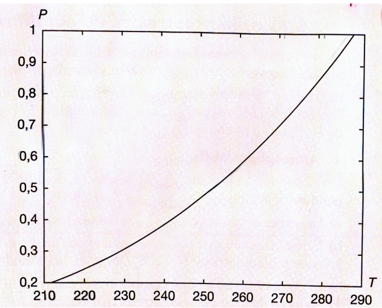
Q3. Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les trois figures suivantes. La pression est donnée en 10^5 Pa, la température en K, la densité en $\mathrm{kg.m^{-3}}$ et l'altitude en km. Un ajustement aux moindres carrés de ces données permet d'obtenir les relations :

$$T = 288,14 - 6,94z \quad \text{et} \quad P = 1,01(T/1288,08)^{5,26}$$

Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?







Valeurs numériques utiles :

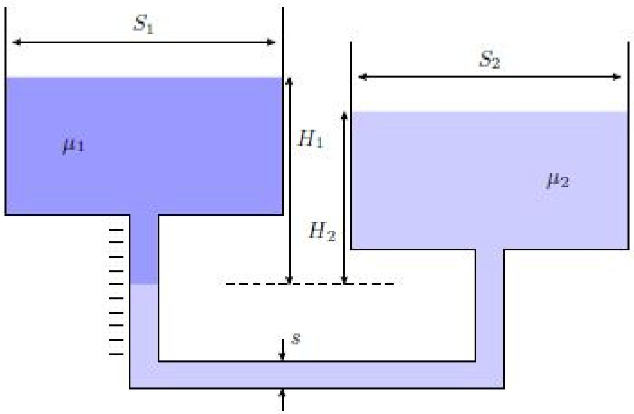
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$

- Accélération de la gravité à la surface de la Terre : $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$
- Masse atomique de l'oxygène : $M_O = 16.10^{-3}\,\mathrm{kg.mol^{-1}}$
- Masse atomique de l'azote : $M_N = 14.10^{-3}\,\mathrm{kg.mol^{-1}}$

4 Manomètre différentiel

Un manomètre différentiel est constitué de deux récipients cylindriques, de sections droites respectives S_1 et S_2, reliés par un tube de section intérieure s constante.

L'ensemble contient deux liquides non miscibles de masses volumiques μ_1 et μ_2.



Q1. Initialement, la pression au-dessus des deux liquides est la même et égale à P_0. Donner la relation entre H_1, H_2, μ_1 et μ_2.

Q2. On provoque au-dessus du liquide 1 une surpression Δp et la surface de séparation des deux liquides se déplace de Δh. Déterminer la sensibilité du manomètre donnée par $\dfrac{\Delta h}{\Delta p}$

Q3. A.N. : $\mu_1 = 998\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, $\mu_2 = 1024\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, $S_1 = S_2 = 100 \times s$

5 Cavitation

On cherche à évacuer l'eau stagnant au fond d'un puits, à une profondeur H par rapport au sol. On utilise pour cela une pompe, considérée ici, en première approximation, comme un tuyau à l'extrémité duquel il est possible de réaliser une dépression contrôlée. L'une des extrémités est à la surface de l'eau du puits, l'autre est au niveau du sol (au-dessus d'un seau).

Q1. Lorsque la pompe est prête à entrer en action, le tuyau est rempli d'eau.
Estimer, en ordre de grandeur, la différence de pression hydrostatique que doit imposer la pompe entre les deux extrémités du tuyau.

Q2. Estimer de même la différence de pression atmosphérique entre les deux extrémités de la pompe et justifier que l'on suppose par la suite la pression de l'air au fond du puits égale à la pression atmosphérique $P_{\mathrm{atm}} = 1\,\mathrm{atm}$.

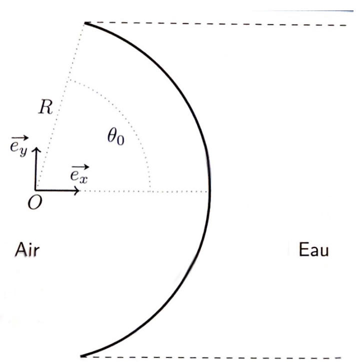
Q3. Exprimer la pression P_1 dans l'eau en haut du tuyau en fonction de H, P_{atm}, et des autres grandeurs adéquates.

Q4. Lorsque P_1 devient égale à la pression de vapeur saturante de l'eau P_{sat}, on observe un phénomène appelé **cavitation** : quel est-il ?

Q5. Sachant qu'à 20°C, la pression de vapeur saturante de l'eau est égale à 2,3 kPa, déterminer la profondeur H_{cav} de la surface de l'eau à partir de laquelle se produit le phénomène de cavitation.

6 Résistance d'un barrage circulaire (*)

On cherche à évaluer la résultante des forces de pression s'exerçant sur le barrage schématisé ci-contre. On le modélise comme une portion d'arc de cercle, de rayon $R = 300\,\mathrm{m}$, d'ouverture angulaire θ_0, et de hauteur $H = 100\,\mathrm{m}$. L'axe z est orienté vers le haut ($\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$) et son origine est telle que $z = 0$ au niveau de l'eau.



Q1. Sachant que la longueur du barrage est de $L = 200\,\mathrm{m}$, déterminer θ_0.

Q2. Montrer que la résultante des forces de pression est selon $\overrightarrow{e_x}$.

Q3. On néglige la variation de pression atmosphérique avec l'altitude : celle-ci reste égale à P_{atm}. Exprimer la résultante des forces de pression exercée par l'air sur le barrage sous forme intégrale puis montrer qu'elle est égale à :

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{air}\to\,\mathrm{barrage}} = 2R\sin(\theta_0)HP_{\mathrm{atm}}\overrightarrow{e_x}$$

Q4. Comment la pression varie-t-elle dans l'eau ? En adaptant le calcul précédent, déterminer l'expression de la résultante des forces de pression exercée par l'eau sur le barrage sous forme intégrale puis montrer qu'elle est égale à :

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{eau}\to\,\mathrm{barrage}} = -2R\sin(\theta_0)\left(HP_{\mathrm{atm}} + \frac{\rho g H^2}{2}\right)\overrightarrow{e_x}$$

Q5. Évaluer numériquement la résultante de toutes les forces de pression s'exerçant sur le barrage. Par quoi est-elle compensée à l'équilibre ?

7 Résolution de problème : Barrage

Le barrage de GUERLÉDAN est un barrage hydroélectrique situé en France. Il est placé sur les eaux du BLAVET, il mesure 45 mètres de haut et sa largeur L vaut $206\,\mathrm{m}$. Il forme ainsi le lac de GUERLÉDAN, le plus grand des lacs bretons. Actuellement, de l'eau s'appuie sur une hauteur $H = 10\,\mathrm{m}$ sur une des faces du barrage.

Un défaut de conception peut conduire à une catastrophe. Ce barrage est prévu pour subir une résultante maximale des forces de pression égale à $2,0.10^9\,\mathrm{N}$. Cette limite est-elle respectée dans la situation actuelle ?

8 Résolution de problème : Mesure de la densité d'une huile

On souhaite déterminer expérimentalement la densité d'une huile d'olive. On dispose pour cela du matériel suivant :

- $1\,\mathrm{L}$ d'huile d'olive ;
- $1\,\mathrm{L}$ d'eau distillée ;
- un tube de verre en U de section $S = 1\,\mathrm{cm}^2$;
- un support pour maintenir le tube en U ;
- un réglet de 20 cm.

En utilisant le matériel à votre disposition, proposer un protocole expérimental permettant de répondre à la question. Donner également un ordre de grandeur de valeurs expérimentales obtenues.

Aides pour les exercices

Exercice 1

Q1. Hypothèse : air = gaz parfait ; $V_0 = 5.94\,\mathrm{L}$

Exercice 2

Q1. Poussée d'Archimède.

Q2. Hypothèse (à justifier) : seule la poussée d'Archimède due à l'eau est à prendre en compte : $\vec{\Pi} = -\rho_\ell V_{im}\vec{g}$

Q3. $V_{im} = \dfrac{\rho_g}{\rho_\ell} V_{tot} \simeq 0.9 V_{tot}$

Q4. Montrer que le volume d'eau liquide obtenue par fonte de la glace est égal au volume de glace immergé.

Exercice 3

Q1. Reprendre le raisonnement vu en cours pour l'atmosphère isotherme en posant $T = T_0(1 - \alpha z)$. $\beta = \dfrac{z_0}{H}$

Q2. $z_{50\%}^{poly} = \dfrac{1}{\alpha}\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right] \simeq 5.4\,\mathrm{km}$

Q3. Avec ces données, on trouve $z_0 = 41.5\,\mathrm{km}$ et $\beta = 5.26$: les allures sont retrouvées, les valeurs numériques sont éloignées du modèle.

Exercice 4

Q1. $\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$

Q2. $\dfrac{\Delta h}{\Delta p} = \dfrac{1}{\mu_1 g(\frac{s}{S_1} + \frac{s}{S_2}\frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1)}$

Q3. $\dfrac{\Delta h}{\Delta p} \simeq 2.2\,\mathrm{mm\,Pa}^{-1}$

Exercice 5

Q1. $\Delta P = \rho g H \simeq 1\,\mathrm{bar}$

Q2. Dans le cadre de l'atmosphère isotherme, pour une variation d'altitude d'environ 10 m : $o(\Delta P') = 1 \times 10^2\,\mathrm{Pa} \ll P_{\mathrm{atm}}$.

Q3. $P_1 = P_{\mathrm{atm}} - \rho g H$

Q4. Apparition de bulles de vapeur d'eau par changement de phase liquide/vapeur lorsque $P_1 = P_{\mathrm{sat}}$

Q5. $H_{\mathrm{cav}} \simeq 10.1\,\mathrm{m}$

Exercice 6

Q1. $\theta_0 = \dfrac{L}{2R} \simeq 19.1\,°$

Q2. Soit M et M' deux points symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$. Les forces de pression en ces points se compensent selon l'axe $\vec{e}_y$. Ceci est vrai pour tous les couples (M, M') de la surface du barrage, d'où le résultat (cf. corrigé pour raisonnement basé sur le calcul).

Q3. Force exercée sur la surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S} = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\vec{e}_r$: $\mathrm{d}\vec{F}_{air} = 2R\sin(\theta_0)P_{air}\mathrm{d}z\vec{e}_x$. Il faut ensuite intégrer ce résultat entre $z = -H$ et $z = 0$ pour retrouver le résultat.

Q4. $P_{eau}(z) = P_{atm} - \rho g z$ et $\mathrm{d}\vec{F}_{eau} = -2R\sin(\theta_0)P_{eau}(z)\mathrm{d}z\vec{e}_x$. En combinant ces expressions et par intégration entre $-H$ et 0, on retrouve le résultat.

Q5. $F \simeq 9.63 \times 10^9$ N, compensée par les réactions du support (sol, parois latérales...)

Exercice 7

Conseil : reprendre l'exemple du barrage plan vu en cours. Dans le cas actuel : $F = 1 \times 10^8$ N donc la limite est respectée.

Exercice 8

Conseil : représenter le tube en U avant et après ajout de l'huile. Repérer les trois interfaces (eau/air, huile/air, huile/eau) et déterminer leurs altitudes.