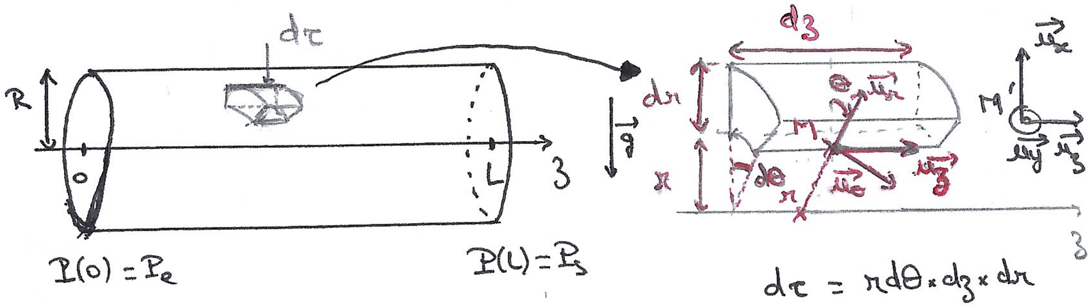
Complément : Écoulement de Poiseuille cylindrique

On reprend le calcul du champ de vitesse $\vec{v}(M,t)$ pour un écoulement de type Poiseuille cylindrique en considérant une particule de fluide de volume $d\tau = r\,d\theta\,dz\,dr$



- La particule de fluide est soumise :
  - à l'action de la pesanteur : $d\vec{P} = \rho \vec{g}\, d\tau$;
  - aux forces de pression : $d\vec{F_p} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)\, d\tau$;
  - aux forces de viscosité :
    - → face inférieure : $\overrightarrow{dF_{inf}} = -\eta \dfrac{\partial v}{\partial r}(r,z,t)\, r\,d\theta\,dz\, \vec{u_z}$
    - → face supérieure : $\overrightarrow{dF_{sup}} = \eta \dfrac{\partial v}{\partial r}(r+dr,z,t)(r+dr)\,d\theta\,dz\,\vec{u_z}$

Rq1 : le champ de vitesse $v(M,t)$ décroît quand r augmente :

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,t) < 0 .$$

Rq2 : Le champ de vitesse est indépendant de θ par invariance de l'écoulement par rotation autour de (Oz). Les lignes de courant sont dirigées selon $\vec{u_z}$ car l'écoulement est supposé laminaire :

$$\vec{v}(M,t) = v(r,z,t)\,\vec{u_z} .$$

- Par application du PFD sur la particule de fluide, dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$\rho \vec{a}(M,t) = d\vec{P} + d\vec{F_p} + \overrightarrow{dF_{inf}} + \overrightarrow{dF_{sup}}$$

Or l'écoulement est homogène et incompressible : $\text{div}(\vec{v}) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ donc v est indépendant de z. Le champ de vitesse est de plus indépendant du temps pour un écoulement stationnaire.

On en déduit qu'il est uniforme le long d'une ligne de courant :

$$\boxed{\vec{a}(M,t) = \vec{0}}$$

(Se démontre aussi par la dérivée particulaire : $\vec{a} = \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$).

Ainsi : $\rho \vec{g}\, d\tau - \overrightarrow{\text{grad}}(P)\, d\tau + \eta \left[r \dfrac{dv}{dr}(r) - (r+dr)\dfrac{dv}{dr}(r+dr) \right] d\theta\, dz\, \vec{u_z} = \vec{0}$

$\Rightarrow \rho \vec{g}\, d\tau - \overrightarrow{\text{grad}}(P)\, d\tau + \eta \dfrac{d}{dr}\left(r \dfrac{dv}{dr} \right) dr\, d\theta\, dz\, \vec{u_z} = \vec{0}$.

- Projection selon $\vec{u_x}$:

$$-\rho g\, d\tau - \frac{\partial P}{\partial x}\, d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g$$

$$\Rightarrow \quad P(x,z) = -\rho g x + K(z)$$

($K(z)$: fonction de z donc $\perp\!\!\!\perp x$).

Rq : . par projection selon $\vec{u_y}$: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P \perp\!\!\!\perp y$.

. $P \perp\!\!\!\perp t$ car l'écoulement est stationnaire.

• Projection selon $\vec{u_z}$:

$$-\frac{\partial P}{\partial z}\,d\tau - \eta\,\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) dr\,d\theta\,dz = 0 \qquad \text{avec } d\tau = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{dK}{dz}(z) - \eta \times \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = 0 \qquad (r \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \eta \times \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{dK}{dz}(z).$$

Le membre de gauche ne dépend que de r, celui de droite de z. Cette égalité n'est vérifiée que si les deux membres sont égaux à une même constante K_1 réelle. Ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dz} = -K_1 \Rightarrow K(z) = -K_1 z + K_2 & (K_2 : \text{cte } \mathbb{R}) \\ \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right) = -\dfrac{K_1}{\eta} r \Rightarrow \dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{K_1 r}{2\eta} + \dfrac{K_3}{r} & (K_3 : \text{cte } \mathbb{R}) \end{cases}$$

Ainsi : $$v(r) = -\frac{K_1 r^2}{4\eta} + K_3 \ln(r) + K_4 \qquad (K_4 : \text{cte } \mathbb{R}).$$

• Détermination des constantes :

. $P(x,0) = P_e \ \forall x$ et $P(x,L) = P_s \ \forall x$. Pour $x = 0$:

$$\begin{cases} \boxed{K(0) = K_2 = P_e} \quad \text{et} \\ K(L) = -K_1 . L + P_e = P_s \Rightarrow \boxed{K_1 = \dfrac{P_e - P_s}{L}} \end{cases}$$

Ainsi $$\boxed{P(x,z) = -\rho g x + \frac{P_e - P_s}{L} z + P_e}$$

• Le champ de vitesse ne peut pas diverger quand $r \to 0$.

Ainsi $\boxed{K_3 = 0}$. De plus, la paroi de la conduite étant immobile : $\boxed{v(R) = 0}$

Ainsi : $$-\frac{K_1 R^2}{4\eta} + K_4 = 0 \Rightarrow K_4 = \frac{K_1 R^2}{4\eta}$$

D'où :

$$v(r) = \frac{K_1}{4\eta}(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,\vec{u_z}}.$$

• Calcul du débit dans la canalisation :

$$D_v = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{dS} \qquad \vec{dS} = r\,dr\,d\theta\,\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{P_e - P_s}{4\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{(P_e - P_s).2\pi}{4\eta L} \times \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$\Rightarrow \boxed{D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P_e - P_s)}$$: loi de Hagen-Poiseuille