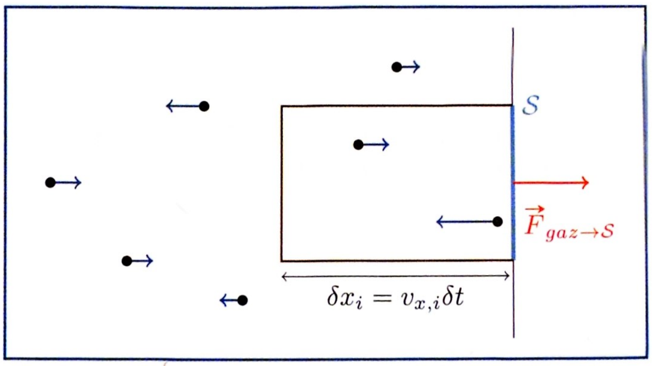
Pression cinétique des gaz

Soit un gaz enfermé dans une enceinte de volume V. On suppose que le gaz se comporte comme un **gaz parfait**, ce qui signifie que les particules constituant ce gaz :

- sont considérées **ponctuelles** ;
- **n'interagissent pas entre elles** : les trajectoires des particules sont supposées rectilignes.

Nous cherchons à déterminer la **force de pression** globale qu'exerce le gaz sur les parois de l'enceinte. On effectue l'hypothèse que cette force est associée aux chocs des particules contre les parois de l'enceinte.

On considère un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ de gaz, possédant une densité volumique de particules n. Ces particules sont toutes supposées identiques ; entre autres, leur masse m est la même. Leur trajectoire est rectiligne et dirigée selon un axe horizontal (Ox) :



On suppose que les particules possèdent une vitesse égale à la **vitesse quadratique** $u = \sqrt{\sum_i v_{x,i}^2}$, avec $v_{x,i}$ la vitesse de la particule i. Sa quantité de mouvement $\overrightarrow{p_0}$ vaut alors $m\overrightarrow{u}$.

1 - Variation de quantité de mouvement lors du choc contre la paroi

La force de pression qu'exerce une particule sur une surface S de la paroi de l'enceinte est proportionnelle à la variation de la quantité de mouvement de la particule avant le choc, $\overrightarrow{p_0}$, et après le choc, $\overrightarrow{p_1}$.

On suppose le choc élastique : la norme de la vitesse de la particule est conservée, seul change le sens de sa trajectoire. La quantité de mouvement de la particule après le choc contre la paroi s'écrit $\overrightarrow{p_1} = -m\overrightarrow{u}$.

La variation de quantité de mouvement due au choc est donc :

$$\Delta\overrightarrow{p}_{part} = \overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_0} = -2m\overrightarrow{u}$$

2 - Calcul de la force de pression

Pendant une durée élémentaire δt, seules les particules comprises dans le volume $\delta V = S.\delta x = Su\delta t$ et dont la vitesse est orientée vers la paroi entrent en collision avec celle-ci. Du fait du grand nombre de particules présentes dans le volume $\mathrm{d}\tau$, on considère une équirépartition des vitesses : la moitié des particules possèdent une trajectoire orientée vers la paroi, l'autre moitié s'éloigne de la paroi. Ainsi, le nombre de particules entrant **effectivement**en collision avec la paroi pendant la durée δt est :

$$\delta N = \frac{1}{2}n\delta V = \frac{1}{2}nSu\delta t$$

La force exercée par la paroi sur les particules est donc :

$$\overrightarrow{F}_{p\to part} = \frac{\Delta\overrightarrow{p}_{part}}{\delta t} = -2m.\frac{1}{2}nSu\overrightarrow{u} = -mnSu\overrightarrow{u}$$

Cette force est l'opposée de la force subit par la paroi, en vertu de la $3^{\text{ème}}$ loi de NEWTON (principe des actions réciproques) ; la force exercée **par les particules de gaz sur la paroi** est donc :

$$\overrightarrow{F}_{part \to p} = \overrightarrow{F} = mnSu\overrightarrow{u}$$

La pression P est définie comme le rapport de $\|\vec{F}\|$ sur la surface S, orientée vers l'extérieure de l'enceinte. Ainsi :

$$F = P.S = mnSu^2 \Rightarrow P = mnu^2$$

La généralisation de ce résultat en trois dimensions donne :

$$\boxed{P = \frac{1}{3}mnu^2}$$

3 - Démonstration de la relation des gaz parfaits

Selon le théorème d'équipartition de l'énergie, l'énergie cinétique moyenne d'une particule pouvant se déplacer dans les trois dimensions de l'espace dans un gaz de température moyenne T est :

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

avec k_B la constante de BOLTZMANN (remarque : $\frac{1}{2}k_B T$ par degré de liberté de la particule).

Or $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}mu^2$. En combinant ces deux expressions, on trouve la relation entre u et T :

$$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Ainsi, la nouvelle expression de P est :

$$P = \frac{1}{3}mnu^2 = \frac{1}{3}mn\frac{3k_B T}{m}$$

soit

$$\boxed{P = nk_B T}$$

Or : $n = \frac{N}{V}$ avec N le nombre de particules de gaz dans le volume V de ce gaz. En appelant n_g la quantité de matière de particules de gaz, on peut écrire : $N = n_g \mathcal{N}_a$, avec $\mathcal{N}_a$ la constante d'AVOGADRO. Finalement, en remplaçant dans l'expression de P, on trouve :

$$\boxed{PV = n_g \mathcal{N}_a . k_B T = n_g RT}$$

avec $R = \mathcal{N}_a . k_B$ la constante des gaz parfaits.