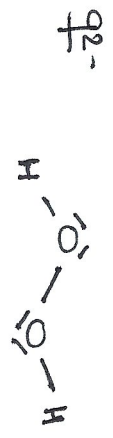
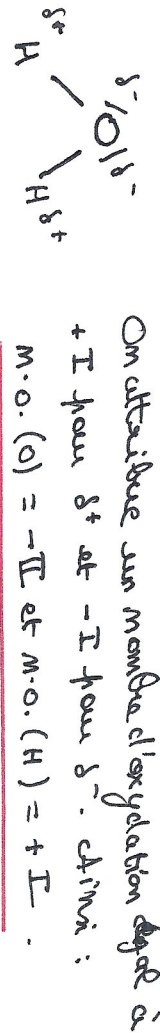


Étude de complexe de chrome CrO5 (Mines PSI 2023)

Étudier les structures

Q1- L'oxygène est plus électro-négatif que l'hydrogène : la liaison O-H est polarisée, une charge partielle négative apparaît sur O et une charge partielle positive sur H.

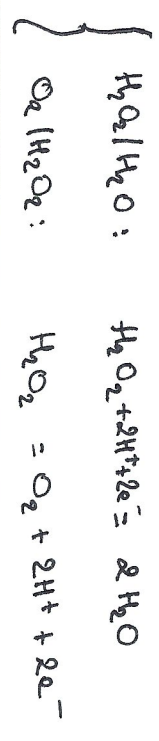


La liaison O-O étant non polarisée, on trouve cette fois-ci :  $m.o.(O) = -I$  et  $m.o.(H) = +I$ .

Formule de Lewis de  $O_2$  :  $\leq O = O \leq$

Une liaison double est plus courte qu'une liaison simple du fait des interactions plus fortes entre atomes de la liaison.

Q3- Complexes oxydant | voir les chocs liés à  $H_2O_2$  :



$2H_2O_2(aq) = 2H_2O(l) + O_2(g)$

Q4- On écrit l'égalité des probabilités à l'équilibre :

$$E^{\circ}(H_2O_2 / H_2O) = E^{\circ}(O_2 / H_2O_2)$$

$$\Rightarrow E^{\circ}(H_2O_2 / H_2O) + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[H_2O_2][H^+]^2}{(O_2)^2 [H_2O]^4} \right) = E^{\circ}(O_2 / H_2O_2) + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[O_2][H^+]^2}{[H_2O_2][O_2]} \right)$$

$$\Rightarrow \log \left( \frac{[O_2][H^+]^2}{[H_2O_2][O_2]} \right) = \frac{E^{\circ}(H_2O_2 / H_2O) - E^{\circ}(O_2 / H_2O_2)}{0,03}$$

A.N. :  $\log(K^{\circ}) = \frac{1,71 - 0,69}{0,03} = 36$

$\Rightarrow K^{\circ} = 10^{36}$

$K^{\circ} \gg 1$  : la réaction de dimutation du peroxyde d'hydrogène est favorisée thermodynamiquement. Mais si la solution n'est pas concentrée, c'est que la cinétique que la réaction est lente.

Q5- La lumière joue presque des réactions photochimiques, notamment les, sur certains dans la lumière naturelle. Elle va donc jouer un rôle de limiter son influence.

Rq : cette réaction est celle de la rupture de la liaison O-O, résultant en des radicaux  $H-O^{\bullet}$  et  $O^{\bullet}$ .





La force de l'hydrogène est introduit en "égos excess": plus sa concentration est élevée, plus la force de conversion de  $H_2O_2$  en  $GO_2$  est importante car l'équilibre de réaction se déplace dans le sens direct quand la concentration d'un réactif augmente.

945 - On voit que  $A = \rho \epsilon [GO_2]$  (cf. 943). L'énergie introduit

la force de conversion de  $H_2O_2$  ("forme initiale") en  $GO_2$  dans l'énergie

de  $q_{H_2}$  : 
$$\tau = \frac{[H_2O_2]_{conversion}}{[H_2O_2]_{initiale}} = \frac{x}{C_0}$$

On en déduit  $[GO_2] = x = \tau C_0$ , donc  $A = \rho \epsilon \tau C_0 = \rho \epsilon^* C_0$

en posant  $\epsilon^* = \epsilon \tau$ . La force de conversion maximale étant  $\tau = 1$ :

$$\epsilon_{\max} = \epsilon$$

Annexi :  $A = \rho \epsilon [GO_2] = \rho \epsilon_0 [GO_2]$

$$\begin{cases} A = \rho \epsilon^* C_0 = \rho \epsilon^* ([G] + [GO_2]) \text{ pour conversion de} \\ \text{éléments} \end{cases}$$

éléments.

Donc :  $\epsilon_0 [GO_2] = \epsilon^* ([G] + [GO_2])$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon^*}{\epsilon_0 - \epsilon^*} = \frac{[GO_2]}{[G]}$$

946 - Selon la balance d'éléments :  $[H_2O_2] = C_{H_2O_2} - 2x$

$$\Rightarrow [H_2O_2] = C_{H_2O_2} - 2\tau C_0 = C_{H_2O_2} - 2 \frac{\epsilon^*}{\epsilon_0} C_0$$

car  $\tau = \frac{\epsilon^*}{\epsilon_0}$  (cf. 945).

947 -  $\log\left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_0 - \epsilon^*}\right) = \log\left(\frac{[GO_2]}{[G]}\right)$

et  $K^0 = \frac{[GO_2]^3}{[G]^2 [H_2O_2]^2} = \frac{[GO_2]^3}{[G]^2} \cdot \frac{(C_0)^3}{[H_2O_2]^2 [H_2O_2]^2}$  car  $[H_2O_2] = C_0 - 2x$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{[GO_2]}{[G]}\right) = \log\left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_0 - \epsilon^*}\right) = \log(K^0) + \log\left(\frac{[H_2O_2]^2}{(C_0)^2}\right) + \log\left(\frac{[H_2O_2]}{C_0}\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_0 - \epsilon^*}\right) = 2 \log\left(\frac{[H_2O_2]}{C_0}\right) + \log(K^0) - \mu_H$$

avec  $\mu_H = -\log\left(\frac{[H_2O_2]}{C_0}\right)$ .  $K^0$  est une constante pour T

fixe : on en déduit que  $\log\left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_0 - \epsilon^*}\right)$  et  $\log\left(\frac{[H_2O_2]}{C_0}\right)$

ont des variations affines :

$$\log\left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_0 - \epsilon^*}\right) = a \log\left(\frac{[H_2O_2]}{C_0}\right) + b$$

avec  $a = 2$  et  $b = \log(K^0) - \mu_H$ .

Les points des deux droites sont proches de 2 : ceci confirme la stœchiométrie de la réaction ( $\alpha = 2$  molécules).

• L'ordonnée à l'origine augmente quand le  $\mu_H$  diminue : ceci est bien attendu sur les traces :

- pour  $\mu_H = -\log(0,01) = 2$  :  $b = 5,56$
- pour  $\mu_H = -\log(0,02) = 1,7$  :  $b' = 5,74$ .

On peut déduire  $K^0$  des valeurs de  $b$  et de  $b'$  :

$$\begin{cases} K^0 = 10^{b + \mu_H} = 10^{5,56 + 2} \approx 3,63 \times 10^7 \\ (K^0)' = 10^{b' + \mu_H'} = 10^{5,74 + 1,7} \approx 2,75 \times 10^7 \end{cases}$$

En ordre de grandeur :  $0(K^0) = 10^7$

918- Par définition :  $\Delta_r G^\circ = -RT \ln(K^\circ)$

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

$$\Delta_r \ln(K^\circ) = \frac{\Delta_r S^\circ}{R} - \frac{\Delta_r H^\circ}{RT}$$

On retrouve une expression de la forme :  $\ln(K^\circ) = \ln + \frac{a}{T}$

avec  $\ln = -8,7$  et  $a = 7,6 \times 10^3 \text{ K}^{-1}$ . On en déduit :

$$\begin{cases} \Delta_r S^\circ = \ln \times R \Rightarrow \Delta_r S^\circ = -8,7 \times 8,31 \approx -72,35 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r H^\circ = -a \times R \Rightarrow \Delta_r H^\circ = -7,6 \times 10^3 \times 8,31 \approx -63,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

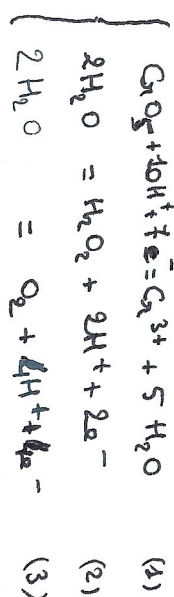
$\Delta_r H^\circ < 0$  : la réaction est exothermique.

### Évolution des redoxions acides conjugués de $\text{GO}_2$

919- Le nombre d'oxydation du chlore passe de III dans  $\text{GO}_2$  à +III dans  $\text{G}^{3+}$  : le chlore subit donc une réduction

d'eau n'oxyde en  $\text{H}_2\text{O}$  mais également en dioxygène  $\text{O}_2(\text{g})$ . La

deux équations de réaction consécutives sont :



où (3) est multipliée par 3 pour retrouver des proportions en  $\text{O}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$  de 1 pour 2x(4) + (1) :



de bromine : est donc d'oxydant et d'eau de réduction de la réaction.

920- En égalisant les deux expressions de  $\pi$  :

$$R_d [\text{GO}_2]_{\text{tot}} = R_d [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{GO}_2] + R_2 [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{GO}_2\text{H}^+]$$

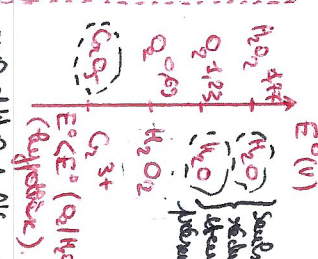
$$\Rightarrow R_d [\text{GO}_2] + R_d [\text{GO}_2\text{H}^+] = R_d [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{GO}_2] + R_2 [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{GO}_2\text{H}^+]$$

$$\Rightarrow (R_d - R_2 [\text{H}_3\text{O}^+]) [\text{GO}_2] = (R_2 [\text{H}_3\text{O}^+] - R_d) [\text{GO}_2\text{H}^+]$$

$$\text{Or } K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] [\text{GO}_2]}{[\text{GO}_2\text{H}^+]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \times (R_2 [\text{H}_3\text{O}^+] - R_d)}{R_d - R_2 [\text{H}_3\text{O}^+]}$$

$$\Rightarrow R_d K_a - K_a R_2 [\text{H}_3\text{O}^+] = R_2 [\text{H}_3\text{O}^+]^2 - R_d [\text{H}_3\text{O}^+]$$

$$\Rightarrow R_d = \frac{R_2 [\text{H}_3\text{O}^+]^2 + K_a R_2 [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+] + K_a}$$





Q21- On sécrète la réaction après de durée :



$$\Rightarrow P_d \left( 1 + \frac{K_a}{[H_3O^+]} \right) = K_a P_2 + k_2 [H_3O^+]$$

La représentation de la fonction  $P_d \times \left( 1 + \frac{K_a}{[H_3O^+]} \right)$  en fonction

de  $[H_3O^+]$  doit donner une droite :

• de pente  $k_2$

• d'ordonnée à l'origine  $P_d K_a$ .

Pour représenter cette fonction, il faut obtenir  $P_d$  par dérivation  
notamment de  $f(t)$  (donc de  $[H_3O^+]$ ).

Q22- On sait que  $\frac{d[GaO_5]_{tot}}{dt} = -P_d [GaO_5]_{tot}$

$$\Rightarrow [GaO_5]_{tot}(t) = e^{-P_d t} \times [GaO_5]_{tot}(0)$$

Le temps de demi-séparation est donné par :

$$[GaO_5]_{tot}(t_{1/2}) = \frac{[GaO_5]_{tot}(0)}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-P_d t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{P_d}$$

A.N.: pour  $f(t) = 2 : [H_3O^+] = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$

$$\text{et } P_d = \frac{1,1 \times 10^{-4} + 8 \times 0,13 \times 10^{-2}}{10^{-2} + 8} \approx 4,3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Donc  $t_{1/2} \approx 533$  s soit 8 min 53 s environ.

## Commutation de matrices par une fonction (ENS Brest 2020)

### 1- Commutation de matrices par dérivation

Q1- Soit de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$  :  $f'(t) = -D \cos(t)$

avec  $f$  vecteur dérivé de cosinus par dérivation en  $m^{-2} \cdot D^{-1}$  ;

$m$  : dérivé particulière en  $m^{-3}$  ;

$D$  : coefficient de dérivation en  $m^2 \cdot D^{-2}$  .

$\cos(t)$  représente la dérivation dans le temps de  $\sin(t)$ . Et si je dérive  $\sin$  en  $m^{-4}$  .

La commutation en matrices,  $c(\vec{r}, t)$ , s'obtient à partir de  $m(\vec{r}, t)$

et la constante d'intégration  $c_0$  ( $m \cdot D^{-1}$ ) :  $c(\vec{r}, t) = \frac{m(\vec{r}, t)}{D}$

On définit  $f(\vec{r}, t) = \frac{f(\vec{r}, t)}{D}$  . Ainsi :  $f(\vec{r}, t) = -D \cos(t)$

Q2- L'absorption des matrices de Fourier de moments cristallins, de système  $f(\vec{r}, t)$  de deux composés dans un réseau cristallin pour la région  $r$  et  $t$  est invariant par rotation selon son angle  $\theta$  et  $\varphi$  :

$$f(r, t) = f(r', t')$$

Si nous supposons la présence de diffusion isotrope,  $f$  est indépendant de  $t$  :

$$f(r, t) = f(r')$$

Enfin, la commutation ne dépend que de  $r$  et non de  $\theta$  et  $\varphi$  :

$$f = -D \cos(c) = -D \frac{dc}{dr} \cos$$

$f$  m'a donc qu'une composante selon  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{f} = f(\vec{r}) \vec{e}_r$$

Q3- En régime stationnaire, et en l'absence de source de production de neutrons, la réaction de la conservation de neutrons dans le système selon  $t$  et  $t+dt$  est nulle :

$$d(SN) = SN(t+dt) - SN(t) = 0$$

$$\text{Or } d(SN) = \phi_0(r+dt) dt - \phi_0(r) dt = 0$$

$$\Rightarrow \phi_0(r+dt) = \phi_0(r) \text{ avec } \phi_0 \text{ une constante}$$

La dérivée constante  $A$  module neutrons par unité de volume et par unité de temps. Pour une dérivée sphérique de rayon  $R$ , j'intègre la densité  $dt$ , la quantité de neutrons conserve est :

$$S_{volume} = A \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot dt$$

Elle est égale à la quantité de neutrons contenu en  $\mathbb{R}$  :

$$S_{volume} = \phi_0 dt$$

$$\text{Ainsi : } \phi_0 dt = A \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 dt$$

$$\Rightarrow \phi_0 = A \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{Q4- } \phi_0 \text{ s'écrit : } \phi_0 = \int_{S_{vol}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ avec } d\vec{S} = dS \vec{e}_r$$

Comme  $\vec{j}(\vec{r})$  est uniforme sur la surface de rayon  $r$  donné, on en déduit :

$$\phi_0 = \int_{S_{vol}} j(\vec{r}) dS = j(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2$$

Q5- Par dérivation de la loi de Fick :

$$j(\vec{r}) = -D \frac{dc}{dr}$$

$$\text{Donc : } \frac{dc}{dr} = -\frac{\phi_0}{4\pi r^2} \Rightarrow c(r) = \frac{\phi_0}{4\pi D r} + A$$

avec  $A$  une constante réelle. Or dans  $c(r) = c_0 = A$ , donc :



$$c(r) = \frac{\Phi_0}{4\pi DR} + c_{\infty}$$

q6- Pour la jûe des cas, la concentration de multimeres à la surface de la bactérie simplifie que  $c(R) = 0$ . Donc :

$$\frac{\Phi_0}{4\pi DR} + c_{\infty} = 0 \Rightarrow \Phi_0 = -4\pi DR c_{\infty}$$

On en déduit :  $J^* = \frac{4\pi R^2}{3} = -4\pi DR c_{\infty}$

$$\Rightarrow J^* = -\frac{3D c_{\infty}}{R^2} \quad (\text{Eq: } J^* < 0 \text{ car il s'agit d'une consommation de multimeres})$$

q7- donc  $J^* = -40 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $R = 1 \mu\text{m}$ , et obtient :

$$c_{\infty} = -\frac{J^* R^2}{3D}$$

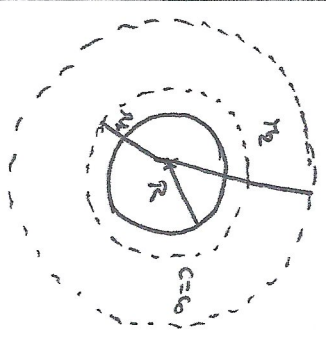
$$\Rightarrow c_{\infty} = + \frac{40 \times 10^{-18}}{3 \times 10^{-9}} \approx 3,3 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

Δ)  $D = 10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , donc  $10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

q9: la même méthode s'applique car  $\pi = 480 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . La concentration molaire multimeres. Pour que la bactérie survive est donc :

$$c_{\infty, \text{m}} = \pi c_{\infty} \approx 600 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}$$

## 2 - Homogénéisation de multimeres et phages



$R < r_1 < r_2$  : diffusion,  $D$   
 $r_1 \leq r_1 \leq r_2$  :  $c = c_0 = \text{constante}$   
 $r_1 > r_2$  : diffusion,  $D$ .

$$\Rightarrow c(r) = + \frac{\Phi_0}{4\pi DR} + B \quad \text{avec } B \text{ une constante arbitraire.}$$

On suppose que la concentration est continue en  $r_1$  et  $r_2$  :

$$\begin{cases} c(r_2^-) = c(r_2^+) \Rightarrow \frac{\Phi_0}{4\pi D r_2} + B = c_0 \\ c(r_1^-) = c(r_1^+) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Phi_0}{4\pi D r_1} + B = c_0 \\ c_0 = \frac{\Phi_0}{4\pi D r_2} + c_{\infty} \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi :  $B = c_0 - \frac{\Phi_0}{4\pi D r_2} = \frac{\Phi_0}{4\pi D} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + c_{\infty}$

On en déduit :

$$c(r) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{4\pi D} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + c_{\infty} & \text{pour } R < r_1 < r_2 \\ \frac{\Phi_0}{4\pi D r_1} + c_{\infty} & \text{pour } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \frac{\Phi_0}{4\pi D r} + c_{\infty} & \text{pour } r \geq r_2 \end{cases}$$

• Pour  $r_1 > r_2$ ,  $c(r)$  simplifie la relation obtenue en q5 :-

$$c(r) = \frac{\Phi_0}{4\pi D r} + c_{\infty}$$

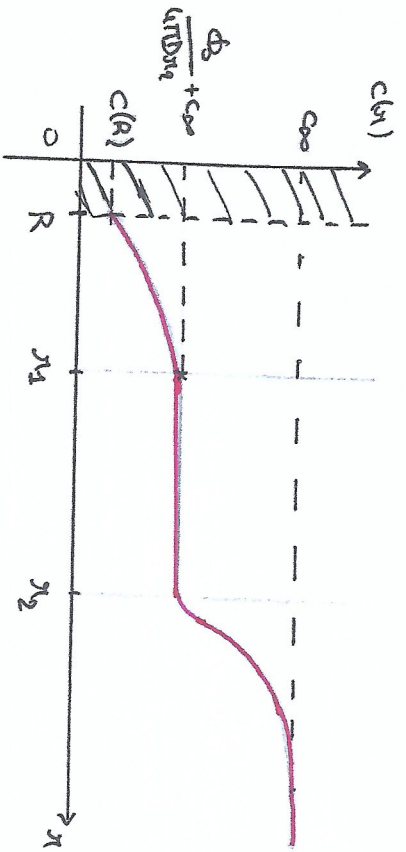
• Pour  $r_1 \leq r \leq r_2$  :  $c(r) = c_0$

• Pour  $R < r < r_1$  : la même

avant toujours s'applique,  $\Phi_0 = 4\pi R^2$ .

On a donc toujours :  $\frac{dc}{dr} = -\frac{\Phi_0}{4\pi D r^2}$

Représentation géométrique (non vuie d'échelle):



$\Delta$   $\phi < 0$  par définition. La concentration en nutriment est plus faible proche de la bactérie que loin d'elle, ce qui est attendu (consommation de nutriment par la bactérie).

q3- Au jour,  $c(R) = 0$ . Or  $c(R) = \frac{\phi_0}{4\pi D} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right) + c_{00}$ , donc :

$$c(R) = 0 \Leftrightarrow \phi_0 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right) = -c_{00} \cdot 4\pi D$$

$$\Leftrightarrow \phi_0 = - \frac{c_{00} \cdot 4\pi D}{\frac{1}{R} + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}}$$

Annex:  $\mathcal{A}_1^* \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \phi_0 \Rightarrow \mathcal{A}_1^* = - \frac{3c_{00} D}{R^3 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right)}$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_2^* = \frac{\mathcal{A}_1^*}{1 + R \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right)}$$

avec  $\mathcal{A}_1^* = - \frac{3Dc_{00}}{R^2}$  (cf. q6.)

q4- La longueur caractéristique de diffusion dans la zone  $R < x_1 < x_2$  est :  $\ell^2 = \frac{L^2}{D} = \frac{(x_1 - R)^2}{D}$ , on peut alors pour distance caractéristique de diffusion la distance  $x_1 - R$ .

• Cette distance est caractéristique pour une molécule de vitesse  $\bar{v}$  dans une durée  $t_{\text{moy}} = \frac{x_1 - R}{\bar{v}}$ . En considérant son déplacement en régime permanent :

$$\frac{(x_1 - R)^2}{D} = \frac{x_1 - R}{\bar{v}}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = R + \frac{D}{\bar{v}}$$

d'augmentation relative de  $\mathcal{A}^*$  est donnée par :

$$E = \frac{\mathcal{A}_2^* - \mathcal{A}_1^*}{\mathcal{A}_1^*}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mathcal{A}_1^* \left( 1 + R \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right) \right)^{-1} - \mathcal{A}_1^*}{\mathcal{A}_1^*}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{1 + R \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right)} - 1$$

$$\Rightarrow E = \frac{R \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right)}{1 + R \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right)}$$

q4- On cherche  $x_1$  tel que  $E = 0,10$ . Or :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{R \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right)} - 1$$

$$\Rightarrow R \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right) = \left( \frac{1}{E} - 1 \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{R} * \frac{E}{1+E} \Rightarrow x_1 = \left( \frac{1}{x_0} + \frac{1}{R} * \frac{E}{1+E} \right)^{-1}$$

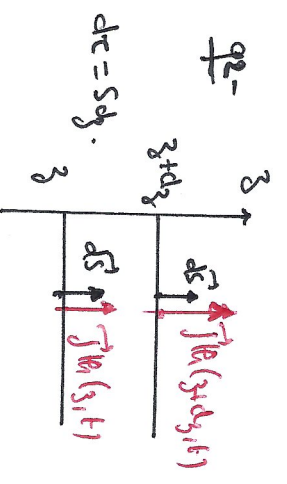


Stockage de chaleur radiatifs (E3A PSI 2023)

q2 - loi de Fourier :  $\vec{j}_H = -\lambda \text{grad}(T)$

- $\vec{j}_H$  : vecteur densité de courant thermique;  $\|\vec{j}_H\|$  en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
- $\lambda$  : conductivité thermique, en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T(z,t)$  : température de l'argile en  $z$ , à l'instant  $t$ , en  $\text{K}$ .

La loi de Fourier est une loi phénoménologique indiquant que l'énergie thermique se déplace dans le sens des températures décroissantes dans un phénomène de diffusion.



Le système {échange d'énergie} est un tel ensemble est immobile : selon le premier principe de la thermodynamique,  $dU = \delta Q$ .

•  $dU = U(z,t+dt) - U(z,t) = \rho dV \frac{\partial U}{\partial t}(z,t) dt$  avec  $U(z,t)$  : énergie interne macroscopique.

•  $\delta Q = \Phi(z,t) dt - \Phi(z+d_0,t)$  (la source de chaleur provient de l'argile).

$\Rightarrow \delta Q = \left( \int_{S(z)} \vec{j}_H(z,t) \cdot d\vec{S} \right) - \left( \int_{S(z+d_0)} \vec{j}_H(z+d_0,t) \cdot d\vec{S} \right) dt$

$\vec{j}_H(z,t)$  écart uniforme sur la surface de côté  $S$ :

$\delta Q = (\vec{j}_H(z,t) - \vec{j}_H(z+d_0,t)) S dt$

$\Rightarrow \delta Q = - \frac{\partial}{\partial z} (j_H(z,t) S) dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dt$  (Fourier).

Comme  $\frac{\partial U}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t}(z,t)$ , on en déduit :

$\rho c \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dt = \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz dt$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = D_a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

avec  $D_a = \frac{\lambda}{\rho c \lambda}$ , exprimée en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Dans la condition limite :  $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$  car  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ .

q3 -  $T(z=0,t) = T_{\text{ext}}$  : on suppose que le contact "en ce lieu" est parfait et que il y a continuité du flux de température (absence de conduction-convection).

$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=-L} = - \frac{N B_0}{2 \lambda_a S} = \text{flux continué du flux}$

thermique à l'interface argile / céramique ( $z=-L$ ):

$\int_S \vec{j}_H(-L) \cdot d\vec{S} = \frac{N B_0}{2}$  avec  $\frac{N B_0}{2}$  la puissance dégagee par la  $N$  céramique (\*)

$\Rightarrow -\lambda_a \frac{dT}{dz}(z=-L) \cdot S = \frac{N B_0}{2}$

$\Rightarrow \frac{dT}{dz}(z=-L) = - \frac{N B_0}{2 \lambda_a S}$

(\*) L'unité maitre de la puissance totale est stream force vers la droite, à travers la deuxième interface céramique / argile.

94- En régime permanent :  $T(z) = A z + B$  ( $A, B$ : constantes)

On : 
$$\begin{cases} T(0) = T_{ext} \\ \frac{\partial T}{\partial z}(-L) = -\frac{NB}{2\lambda a S} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = T_{ext} \\ A = -\frac{NB}{2\lambda a S} \end{cases}$$

Admisi 
$$T(z) = T_{ext} - \frac{NB}{2\lambda a S} z \text{ et } T(-L) = T_{ext} + \frac{NB L}{2\lambda a S}$$

95- On donne  $T(-L) = T_{max}$ . On :

$$T_{max} = T_{ext} + \frac{NB L}{2\lambda a S}$$

$$\Rightarrow S = \frac{NB L}{2\lambda a (T_{max} - T_{ext})}$$

A.N.: 
$$S = \frac{3,6 \times 10^4 \times 2,0 \times 10^3 \times 5,0 \times 10^2}{2 \times 1,5 \times (100 - 13)} \approx 1,4 \times 10^8 \text{ m}^2$$

soit environ  $140 \text{ km}^2$ .

96- L'ensemble joue le rôle d'un demi-isolant thermique. Le coefficient  $T_{1/2}$  est de l'ordre de 31 années : au cours de ce laps de temps, on attend que la température radioactive soit approximativement diminuée, au moins de moitié, ce qui permet de diminuer également de moitié la surface d'enfouissement.

97- 
$$R = \frac{\Delta T}{Nt}$$

98- En analysant l'équation de la diffusion on obtient

de grandeur : 
$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\Delta T}{\tau} \approx D_a \frac{\Delta T}{L^2}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L^2}{D_a}$$

avec  $D_a = \frac{\lambda a}{\rho a c_a}$

A.N.: 
$$D_a = \frac{1,5}{1,7 \times 10^3 \times 7 \times 10^3} \approx \frac{1,3 \times 10^{-6}}{\text{m}^2 \text{s}^{-1}}$$
  

$$\tau = \frac{(5 \times 10^3)^2}{1,3 \times 10^{-6}} \approx 1,9 \times 10^{14} \text{ s}$$

99- On compare la vitesse de diffusion pour un train d'accroissement :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z_n, t_i) \approx \frac{T(z_n, t_i) - T(z_{n-1}, t_i)}{R} = \frac{T_n^i - T_{n-1}^i}{R}$$

et 
$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) = \frac{\frac{\partial T}{\partial z}(z_{n+2}, t_i) - \frac{\partial T}{\partial z}(z_n, t_i)}{R}$$

$$\approx \frac{1}{R} (T(z_{n+2}, t_i) - T(z_n, t_i)) - \frac{1}{R} (T(z_n, t_i) - T(z_{n-2}, t_i))$$

$$\approx \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) \approx \frac{T(z_{n+2}, t_i) + T(z_{n-2}, t_i) - 2T(z_n, t_i)}{R^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) \approx \frac{T_{n+2}^i - 2T_n^i + T_{n-2}^i}{R^2}$$



910 - . La ligne 12 permet de s'assurer que  $x = \frac{P_{0k}}{R^2}$  est bien inférieur à 0,5 avant de calculer le Branch de température. Si  $x \geq 0,5$ , le programme s'arrête et renvoie une erreur, évitant un système numérique instable (donc une solution aberrante).

• Ligne 15 : la liste de listes  $T$  ne lit  $T[t][x]$  :  
 réellement d'indice "x" de la liste d'indice "t", autrement dit la valeur (divisée) de  $T(x,t)$ . Ainsi  $T[0][0]$  correspond à  $T(0,0)$  et  $T[0][1]$  à  $T(0,1)$  : c'est la ligne calculée à l'iteration de  $T$  à l'instant initial à l'interface entre les deux. C'est la distinction de la condition aux limites

$$\frac{\partial T}{\partial x}(-L,0) = -\frac{NB_0}{2\lambda_s} \text{ car } \frac{\partial T}{\partial x}(x=-L,0) \approx \frac{T(x_1,0) - T(x_0,0)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow T(x_0,0) = T(x_1,0) + \frac{NB_0}{2\lambda_s} \times L$$

De même, la ligne 20 est la distinction de la même condition aux limites mais à l'instant  $t+1$ .

$$911 - \boxed{T[t+1][x] = T[t][x] + \tau * (T[t][x+1] - 2T[t][x] + T[t][x-1])}$$

avec  $\tau = \frac{h \cdot \Delta x}{\rho c}$ . Rq:  $\Delta x = \text{lambda}_a / (500 \cdot \text{area})$   
 ligne 5 :  $\text{tau} = L^{1+2} / \Delta x$   
 ligne 8 :  $h = 3 \times \text{tau} / \Delta x$   
 ligne 9 :  $B = L / \Delta x$

912 - . On remarque que le Branch de température tend vers une fonction affine de  $y$  quand le temps augmente :

on trouve l'ordre obtenu on a :  $T(y) = Ay + B$  avec

$$B = T_{ext} = 13^\circ\text{C} \text{ et } A = -\frac{NB_0}{2\lambda_s} < 0. \text{ C'est le signe - pour les}$$

valeurs numériques :  $A = -\frac{36 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{2 \times 1,5 \times 1 \times 10^8} \approx -0,24 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\text{On pour } t = 3\tau : \frac{\Delta T}{\Delta y} \approx \frac{136 - 13}{-500} \approx -0,246 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}. \text{ On}$$

trouve à 2,5% la valeur de  $A$ .

• Critiques sur code :

- Les unités des grandeurs ne sont pas cohérentes ;
- La fonction de  $T$  pour un  $\Delta x$  ou  $\text{tau}$  n'est pas constante de ce qui se passe.