

# Dynamique et énergétique

## Équilibrage des solides en rotation

PSI - MP : Lycée Rabelais

### Position du problème

Dans de nombreux systèmes techniques, des pièces sont en rotation (roue de voiture, réacteur d'avion, vilebrequin, etc...). Une mauvaise répartition de la masse autour de l'axe de rotation peut provoquer des vibrations importantes voir même des ruptures.

Pour éviter ces problèmes, il est nécessaire que l'ensemble en rotation soit *équilibré* afin que les actions mécaniques dans les liaisons soient de direction constante. La résolution de ce problème est l'objectif de ce complément de cours.

Le support de cet étude est un banc d'équilibrage *FACOM* présent dans la plupart des garages. Cet appareil permet de placer des masselottes, de masse judicieusement choisie, sur la jante afin d'équilibrer la roue.



FIGURE 1 – Machine d'équilibrage *FACOM*

L'équilibreuse est constituée d'un arbre 1 guidé en rotation par une liaison pivot avec le bâti d'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Cette liaison est équipée de capteurs afin de permettre l'enregistrement des composantes de la résultante et du moment de la liaison.

Le repère  $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti 0 ( $\vec{y}_0$  est la verticale ascendante).

Le repère  $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à l'arbre 1. On pose  $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  et  $\vec{x}_0 = \vec{x}_1$  avec  $\dot{\theta} = cste$ . Cela signifie que, durant l'essai, on fait tourner la roue à vitesse de rotation constante.

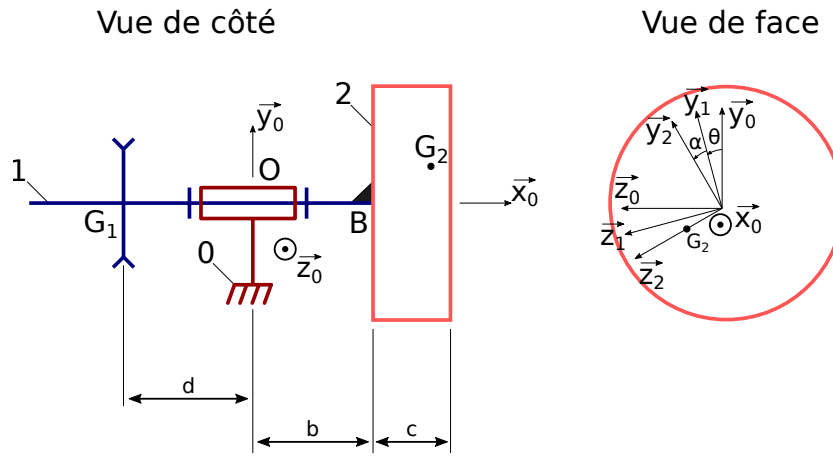


FIGURE 2 – Modèle associé

L'arbre 1 est entraîné en rotation par une poulie fixée au centre d'inertie  $G_1$  de l'arbre 1. Le torseur d'action mécanique de la courroie sur la poulie est de la forme :

$$\{\text{courroie} \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{cases}_{G_1}$$

L'arbre 1 est de masse négligeable comparativement à la roue étudiée.

La roue 2, que l'on souhaite équilibrer, est encastrée sur l'arbre 1. Le repère  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à cette roue 2 avec un angle constant  $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  avec  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ . Cependant, **cet angle est inconnu**. La roue 2, de masse  $m_2$ , a pour centre d'inertie  $G_2$  dont la position est paramétrée de la manière suivante :  $\vec{BG}_2 = h \vec{x}_0 + a \vec{z}_2$ .  **$h$  et  $a$  sont des inconnues : cela signifie qu'on ne connaît pas la position du centre d'inertie de la roue.** La matrice d'inertie en  $B$  de la roue 2 dans la base  $R_2$  est la suivante :

$$I_B(2) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_2}$$

## Conditions d'équilibrage de la roue

*Une roue est dite équilibrée si sa rotation, à vitesse constante, n'entraîne pas de vibration. Cela signifie que, dans ces conditions, les composantes des actions mécaniques de liaison sont constantes dans le temps.*

**Question 1 :** Donner le torseur de l'action de liaison de 0 sur 1.

**Question 2 :** Montrer que l'écriture du principe fondamental de la dynamique associé à l'isolement de l'ensemble  $\{1, 2\}$  mène au système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcll} 0 & + & X_{01} & + & 0 & = & 0 \\ -m_2 \cdot g & + & Y_{01} & + & 0 & = & m_2 \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha + \theta) \\ 0 & + & Z_{01} & + & 0 & = & -m_2 \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) \\ a \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha + \theta) & + & 0 & + & C_m & = & 0 \\ 0 & + & M_{01} & + & 0 & = & F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha + \theta) + E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) + b \cdot a \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) \\ -(b+h) \cdot m_2 \cdot g & + & N_{01} & + & 0 & = & -F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha + \theta) + E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha + \theta) + b \cdot a \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha + \theta) \end{array}$$

**Question 3 :** En déduire les conditions d'équilibrage.

# Exploitation d'une mesure d'équilibrage

Les capteurs associés à la liaison pivot donnent les résultats suivants :

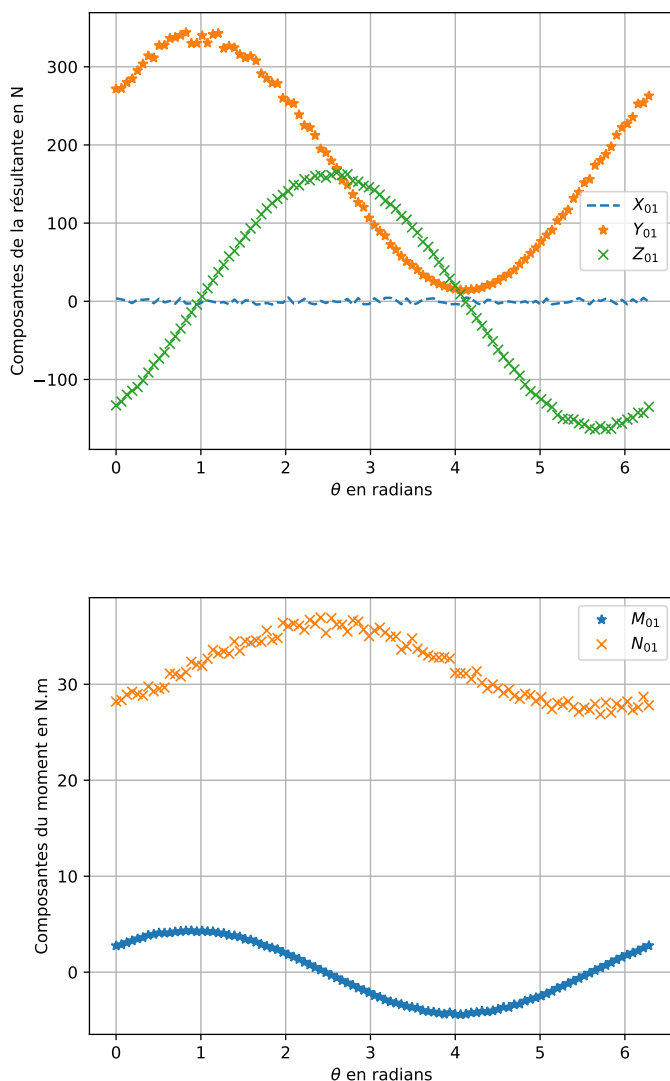


FIGURE 3 – Résultat expérimental obtenu sur une machine d'équilibrage FACOM

On donne également les valeurs suivantes :  $\dot{\theta} = 60 \text{ rad/s}$ ;  $m_2 = 18 \text{ kg}$  et  $b = 80 \text{ mm}$ .

**Question 4 :** Déterminer la méthode pour calculer les inconnues  $a$ ,  $\alpha$ ,  $E$  et  $F$  en fonction des relevés  $Z_{01}(0)$ ,  $Z_{01}(\pi/2)$ ,  $M_{01}(0)$  et  $M_{01}(\pi/2)$ . Vérifier que l'on obtient les valeurs suivantes :

$$\alpha = 34^\circ \quad a = 2,5 \text{ mm} \quad E = -3,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \quad F = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

## Équilibrage de la roue

La roue sera équilibrée avec deux masselottes 3 et 4, assimilables à deux points matériels  $M_3$  et  $M_4$  respectivement de masse  $m_3$  et  $m_4$  situées de part et d'autre de la jante, de telle sorte que :

$$\overrightarrow{BM_3} = r \overrightarrow{u_3} \text{ et } \overrightarrow{BM_4} = c \overrightarrow{x_0} + r \overrightarrow{u_4}, \text{ } r \text{ est le rayon de la jante et } \overrightarrow{u_i} \text{ est orienté par l'angle } \beta_i = (\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{u_i}).$$

Avec, compte-tenu de la géométrie de la roue :  $r = 190 \text{ mm}$  et  $c = 180 \text{ mm}$ .

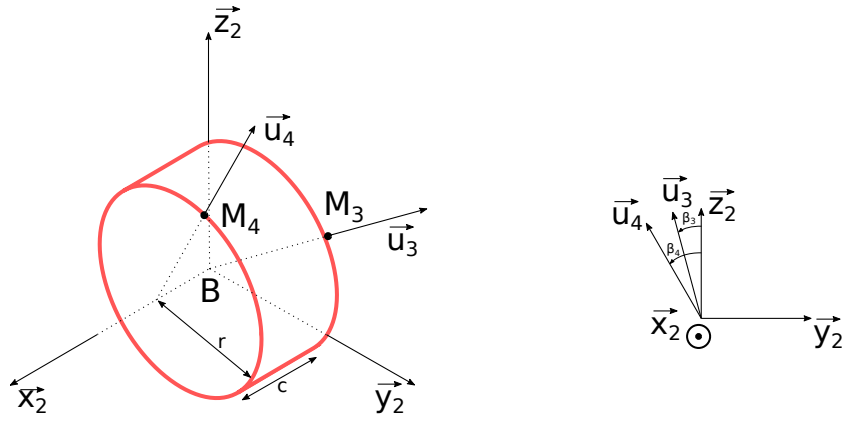


FIGURE 4 – Mise en place des masselottes

**Question 5 :** Donner les conditions d'équilibrage de la roue puis déterminer les équations que doivent respecter  $m_3$ ,  $m_4$ ,  $\beta_3$  et  $\beta_4$  afin d'équilibrer la roue.

**Question 6 :** En déduire les valeurs numériques de ces paramètres.