Remontée d'un plongeur

q1- La pression environnante est plus importante dans l'eau qu'à l'air libre ($\Delta P = 1$ bar tous les 10 m).

Si on suppose que l'air dans les poumons du plongeur est en équilibre ~~mécanique~~ avec le fluide extérieur, des poumons remplis d'air provenant des bouteilles vont se dilater lors de la remontée rapide du plongeur sous l'effet d'une baisse de pression : Il y a risque de déchirure des poumons.

Rq : d'où la nécessité de respecter des paliers de décompression lors d'une remontée de plongée.

q2- On sait que la pression varie avec la profondeur h selon :

$$P(h) = P_0 + \mu g h$$

$$\Rightarrow \quad \underline{P(h) \simeq 1{,}98 \times 10^{5} \text{ Pa}}.$$

En supposant que l'air dans les poumons se comporte comme un gaz parfait ; $P(h) \cdot V(h) = nRT$ avec "n" la quantité de matière d'air dans les poumons. On suppose celle-ci constante lors de la remontée si le plongeur n'expire pas, donc : $nRT = P_0 V_0$ où V_0 est le volume en surface des poumons.

Ainsi :

$$P_0 \cdot V_0 = P(h) \cdot V(h) \qquad \text{avec } V(h) = 3 \text{ L}.$$

$$\Leftrightarrow \quad V_0 = \frac{P(h) \cdot V(h)}{P_0}.$$

A.N. : $\underline{V_0 \simeq 5{,}94 \text{ L}}$.

Les poumons doivent donc doubler de volume pour supporter la remontée, ce qui est impossible !

À propos d'iceberg

q1- La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}$

q2- On suppose que la résultante des forces de pression liées à l'air est négligeable par rapport à celle liée à l'eau :

$$\begin{cases} \vec{\Pi}_{air} = -\rho_{air} V_{em} \vec{g} \\ \vec{\Pi}_{eau} = -\rho_e V_{im} \vec{g} \end{cases}$$

et $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{air} + \vec{\Pi}_{eau} \simeq \vec{\Pi}_{eau}$ car $\rho_{air} \ll \rho_e$.

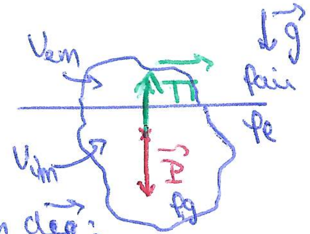
Ainsi :

$$\boxed{\vec{\Pi} = -\rho_e V_{im} \vec{g}}$$

q3- Soit le système {iceberg}, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. À l'équilibre :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$$

avec $\begin{cases} \vec{\Pi} = -\rho_e V_{im} \vec{g} \\ \vec{P} = \rho_g (V_{im} + V_{em}) \vec{g} \end{cases}$



Ainsi, en projetant selon la direction de $\vec{g}$:

$$-\rho_e V_{im} g + \rho_g (V_{im} + V_{em}) g = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{im} = \frac{\rho_g}{\rho_e} V_{tot}}$$ avec $V_{tot} = V_{im} + V_{em}$.

A.N. : $V_{im} \simeq 0,9\, V_{tot}$.

La partie immergée de l'iceberg représente 90% de son volume total : seuls 10% de l'iceberg sont visibles en surface !

q4- La masse totale de glace est :

$$m = \rho_g \cdot V_{tot} = \rho_g \cdot \frac{\rho_e}{\rho_g} V_{im} = \rho_e V_{im}$$

à l'aide de q3.

Lorsque toute la glace fond, on récupère un volume d'eau liquide V_{final} égal à :

$$\boxed{V_{final} = \frac{m}{\rho_e} = V_{im}}$$

Toute la masse de glace fondue ne fait donc pas varier le niveau de l'eau. Le même phénomène s'observe pour la fonte d'un glaçon dans un verre d'eau

Equilibre polytropique

On pose $T(z) = T_0(1-\alpha z)$ pour $z \in [0; 10\,km]$.
et $\alpha = \dfrac{1}{z_0}$ avec $z_0 \simeq 33$ km.

q4- Un développement similaire au cours permet d'écrire :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)\,g = -\frac{M_e\, g}{RT_0(1-\alpha z)}\cdot P(z).$$

soit :

$$\boxed{\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{H(1-\alpha z)}P(z) = 0}$$

Pour intégrer cette expression, on utilise la méthode de séparation des variables :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{P(z)}{H(1-\alpha z)}$$

$$\Rightarrow \frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{dz}{H(1-\alpha z)}$$

$$\Rightarrow \left[\ln(P(z))\right]_{P_0}^{P(z)} = \left[\ln(1-\alpha z)\times\frac{1}{\alpha H}\right]_0^z$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \ln(1-\alpha z)\times\frac{z_0}{H} \quad \text{car } \alpha = \frac{1}{z_0}.$$

Ainsi :

$$\underline{P(z) = P_0(1-\alpha z)^{z_0/H} = P_0(1-\alpha z)^{\beta}}$$

avec $\beta = \dfrac{z_0}{H}$.

De plus : $\mu(z) = -\dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{dP(z)}{dz}$

$$= -\frac{1}{g}\cdot\beta P_0(1-\alpha z)^{\beta-1} * (-\alpha)$$

Or : $\dfrac{\alpha\beta P_0}{g} = \dfrac{z_0 \cdot P_0}{z_0 g H} = \dfrac{M_e}{RT_0}\times P_0$.

Or, selon la question Q1 : $\mu(z) = \dfrac{M_e}{RT_0}P(z)$

donc $\mu_0 = \mu(0) = \dfrac{M_e}{RT_0}P(0) = \dfrac{M_e P_0}{RT_0} = \dfrac{\alpha\beta P_0}{g}$.

Ainsi :

$$\boxed{\mu(z) = \mu_0(1-\alpha z)^{\beta-1}}$$

Rq : avec $\mu(z) = \dfrac{M_e P(z)}{RT_0}$ (q1.) on obtient directement $\mu(0) = \mu_0 = \dfrac{M_e P_0}{RT_0}$.

q5- $z_{50\%}^{poly}$ est telle que :

$$P(z_{50\%}^{poly}) = \frac{P_0}{2}.$$

Or : $P(z_{50\%}^{poly}) = P_0(1-\alpha z_{50\%}^{poly})^{\beta} = \dfrac{P_0}{2}$

$$\Rightarrow 1-\alpha z_{50\%}^{poly} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\beta}$$

$$\Leftrightarrow \underline{z_{50\%}^{poly} = \frac{1}{\alpha}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\beta}\right] = z_0\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{H/z_0}\right]}.$$

A.N :

$$\underline{z_{50\%}^{poly} \simeq 5,4\ \text{km} < z_{50\%}^{iso}}.$$

La pression diminuant plus rapidement avec l'altitude dans ce modèle, ~~ce~~ ce résultat était prévisible.
($P(z) = \mu(z)\dfrac{RT(z)}{M_e}$ avec $\mu(z)$ et $T(z)$ deux fonctions décroissantes selon z, à comparer à $P_{iso}(z) = \mu(z)\dfrac{RT_0}{M_e}$ où seule $\mu(z)$ décroît de façon similaire avec $P(z)$ à basse altitude).

Q6. On sait que : $\beta = \frac{30}{H} \simeq \frac{33}{8,5} \simeq 3,9$.

De plus :

$$T = 288,14 - 6,94z = 288,14\left(1 - \frac{6,94}{288,14} z\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad T = 288,14\left(1 - \frac{z}{41,5}\right)$$

On retrouve, à 20% près, l'expression :

$$T(z) = T_0(1 - \alpha z) = T_0\left(1 - \frac{z}{30}\right).$$

- En posant $(1-\alpha z) = \frac{T}{T_0}$, on obtient :

$$P(z) = P_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\beta}$$

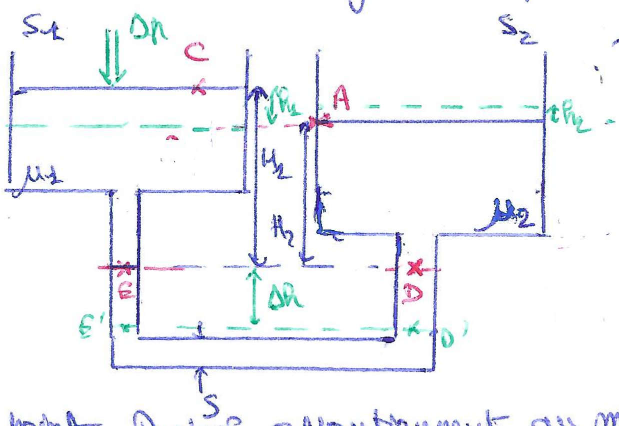
L'allure de $P(z)$ est donc compatible avec le modèle polytropique

$$P(z) = 1,01 \left(\frac{T}{288,08}\right)^{5,26}$$

Les coefficients sont cependant très différents (e.r > 25%) des valeurs attendues théoriquement. Le modèle de l'atmosphère polytropique est donc encore perfectible pour correspondre aux données expérimentales.

Manomètre différentiel

1 - Selon les lois de l'hydrostatique :



; $P(A) = P(C) = P_0$

- Les points D et E appartiennent au même fluide, donc :

$$P(E) = P(D)$$

Or : $\begin{cases} P(D) = P(A) + \mu_2 g H_2 \\ P(E) = P(C) + \mu_1 g H_1 \end{cases}$

Donc : $P(A) + \mu_2 g H_2 = P(C) + \mu_1 g H_1$.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mu_2 H_2 = \mu_1 H_1}$ car $P(A) = P(C) = P_0$.

2 - On applique une surpression Δp sur le liquide 1.

* Celui descend d'une hauteur h_1 correspondant à un déplacement de volume $V_1 = h_1 \cdot S_1$.
* L'interface descend alors de Δh telle que $s \cdot \Delta h = S_1 \cdot h_1$
$\Rightarrow \Delta h = \frac{S_1}{s} h_1$.
* Le niveau du liquide 2 monte de h_2 : $V_2 = h_2 \cdot S_2 = s\,\Delta h$.

Au final, l'égalité des pressions entre les nouveaux points E' et D' donne :

$$(P_0 + \Delta p) + \mu_1 g (H_1 - h_1 + \Delta h) = P_0 + \mu_2 g (H_2 + h_2 + \Delta h)$$

$\Leftrightarrow$ $\Delta p + \mu_1 g \Delta h = \mu_2 g h_2 + \mu_1 g h_1 + \mu_2 g \Delta h$

car $\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$.

Or : $h_1 = \frac{s}{S_1} \Delta h$ et $h_2 = \frac{s}{S_2} \Delta h$

Donc : $\Delta p = \left(\mu_1 g \frac{s}{S_1} + \mu_2 g \frac{s}{S_2} + (\mu_2 - \mu_1) g\right) \Delta h$.

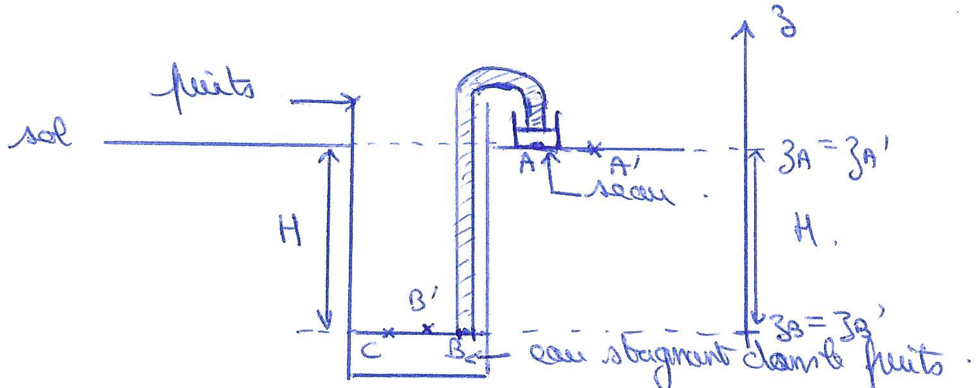
$$= \mu_1 g \Delta h \left[\frac{s}{S_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \times \frac{s}{S_2} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right)\right]$$

Ainsi : $\boxed{\frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{1}{\mu_1 g \left[\frac{s}{S_1} + \frac{s}{S_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right]}}$

A.N. : $\frac{\Delta h}{\Delta p} = 2{,}2 \text{ mm} \cdot Pa^{-1}$.

Cavitation

Q1 - Schéma de la situation :



On suppose que A est à l'extrémité du tuyau, si bien que $z_A - z_B = H$.

• Selon la relation fondamentale de la statique des fluides appliquée à l'eau dans le ~~tuyau~~ tuyau :

$$\boxed{\Delta P = P(B) - P(A) = \rho g H}$$

Rq : cette relation peut s'appliquer à l'eau dans le tuyau car AB forme une ligne de courant dans ce fluide.

On estime $o(H) \sim 10$ m en ordre de grandeur ; on pose $o(g) \sim 10\ m.s^{-2}$ et $o(\rho) = 10^3\ kg.m^{-3}$.

Ainsi : $o(\Delta P) \sim 10^5$ Pa soit 1 bar.

Q2 - On définit les points de l'atmosphère A' et B' tels que $z_{A'} - z_{B'} = H$. En assimilant l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29{,}0\ g.mol^{-1}$, on montre que, pour T_0 = cte (cf cours → modèle de l'atmosphère isotherme) :

$$P(z) = P_{atm} e^{-z\frac{Mg}{RT_0}} \text{, soit } P(-H) = P_{atm} e^{H.\frac{Mg}{RT_0}}$$

Avec : $o(H) \simeq 10$ m, $o(g) \sim 10\ m.s^{-2}$ et $o(\rho_{air}) \simeq 1\ kg.m^{-3}$, $o(T_0) \sim 300$ K

A.N. : $\Delta P' = P(-H) - P(0) \Rightarrow \boxed{o(\Delta P') = 10^2\ \text{Pa} \ll P_{atm}}$.

On peut donc considérer que la pression de l'air au fond du puits est égal à la pression atmosphérique.

Q3 - On sait que $\Delta P > 0$ ($P(B) > P(A)$). On néglige la hauteur de la margelle du puits : nous pouvons écrire :

$$P(A) = P_1.$$

Ainsi :

$$P_1 = P(B) - \rho g H.$$

L'eau du puits ~~est~~ en C est soumise à P_{atm} ; ainsi :

$$P(C) = P(B) = P_{atm}.$$

Donc :

$$\boxed{P_1 = P_{atm} - \rho g H.}$$

Q4 - Pour $P_1 = P_{sat}$, on atteind l'équilibre liquide-vapeur de l'eau : il se forme des bulles de gaz constituées de vapeur d'eau. C'est la cavitation.

Q5 - On donne $P_{sat} = 2{,}3 \times 10^3$ Pa. Ainsi :

$$\boxed{H_{cav} = \frac{P_{atm} - P_{sat}}{\rho g}}$$

A.N. : $\boxed{H_{cav} \simeq 10{,}1\ m}$

avec $\begin{cases} P_{atm} = 1\ atm = 1{,}01325 \times 10^5\ Pa. \\ \rho = 10^3\ kg.m^{-3} \\ g = 9{,}81\ m.s^{-2}. \end{cases}$

Résistance d'un barrage circulaire

Q1- La longueur du barrage est donnée par :

$$L = R.2\theta_0.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta_0 = \frac{L}{2R}}.$$

A.N. : $\theta_0 = \frac{1}{3}$ rad

$$\Rightarrow \theta_0 = \frac{180}{3\pi} \simeq 19{,}1°.$$

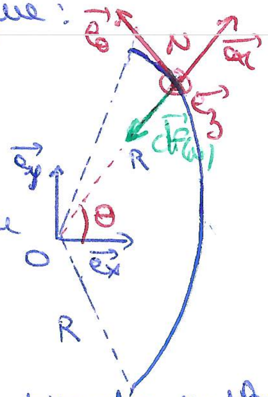
Rappel :

$L = R\theta$ (longueur d'un arc de cercle).

Si $\theta = 2\pi$: L = périmètre du cercle de rayon R.

Q2- Soit un point N du barrage ; on définit les vecteurs polaires $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \dfrac{\vec{ON}}{\|\vec{ON}\|} \\ \vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_z}. \end{cases}$$



La force élémentaire de pression de l'eau en N est donc :

$$\vec{d^2F_{eau}}(N) = -P_{eau}(N)\, \vec{d^2S_{eau}}$$

avec $\vec{d^2S} = d^2S\, \vec{e_r}$. La pression étant identique dans un plan horizontal, $P(N) = P(z)$ et : $d^2\vec{F}_{eau}(N) = d^2\vec{F}_{eau}(\theta, z) = -P_{eau}(z)\, d^2S \vec{e_r}$

Or : $d^2S = R\,d\theta . dz$, donc $\vec{d^2F_{eau}}(\theta, z) = -P_{eau}(z) . R\,d\theta\,dz\, \vec{e_r}$.

De plus : $\vec{e_r} = \cos\theta\, \vec{e_x} + \sin\theta\, \vec{e_y}$.

Donc :

$$\vec{d^2F_{eau}}(\theta, z) = -P_{eau}(z) R\,d\theta\,dz\, [\cos\theta\, \vec{e_x} + \sin\theta\, \vec{e_y}].$$

La force $\vec{d^2F_{eau}}(\theta, z)$ est donc dans le plan (Oxy).

On intègre l'expression entre $-\theta_0$ et θ_0 :

$$\vec{dF_{eau}}(z) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d^2\vec{F}_{eau}(\theta, z) = -R\,dz \int_{-\theta_0}^{\theta_0} P_{eau}(z) \left[\cos\theta\, \vec{e_x} + \sin\theta\, \vec{e_y}\right] d\theta$$

Or, pour une altitude z donnée, $P_{eau}(z)$ est constante. Ainsi

$$\vec{dF_{eau}}(z) = -R P_{eau}(z) dz \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left[\cos\theta\, \vec{e_x} + \sin\theta\, \vec{e_y}\right] d\theta$$

$$= -R P_{eau}(z) dz \left[+\sin\theta\, \vec{e_x} - \cos\theta\, \vec{e_y}\right]_{-\theta_0}^{\theta_0}$$

$$= -R P_{eau}(z) dz \left[(\sin\theta_0 - \sin(-\theta_0))\vec{e_x} + (\cos(-\theta_0) - \cos(\theta_0))\vec{e_y}\right]$$

Or : $\cos(\theta_0) = \cos(-\theta_0)$ et $\sin(-\theta_0) = -\sin\theta_0$,

donc :

$$\vec{dF_{eau}}(z) = -R P_{eau}(z) dz \times 2\sin\theta_0\, \vec{e_x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{dF_{eau}}(z) = -2R\sin\theta_0\, P_{eau}(z)\, dz\, \vec{e_x}}. \quad (I)$$

Rq : un argument plus direct consiste à remarquer que le barrage est symétrique par rapport à l'axe (Ox). Ainsi les composantes $dF_y(N)$ se compensent 2 à 2 de part et d'autre de cet axe de symétrie.

De même, la force élémentaire de pression de l'air s'exprime, en N : $\vec{d^2F_{air}} = -P_{air}(z)\, \vec{d^2S_{air}}$

$$= +P_{air}(z)\, d^2S\, \vec{e_r}$$

car la surface est orientée vers l'extérieur du barrage, donc $-\vec{e_r}$ ici. Le raisonnement est identique à précédemment et l'on obtient :

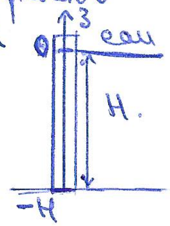
$$\boxed{\vec{dF_{air}}(z) = +2R\sin(\theta_0) P_{air}(z)\, dz\, \vec{e_x}}. \quad (II)$$

La résultante des force de pression s'écrit donc :

$$\overrightarrow{dF}(z) = \overrightarrow{dF_{eau}}(z) + \overrightarrow{dF_{air}}(z)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{dF}(z) = 2R\sin(\theta)\left(P_{air} - P_{eau}\right)dz\,\overrightarrow{e_x}}.$$

Q3- On intègre l'expression (II) de $-H$ à 0 en posant $P(z) = P_{atm}$:



$$\overrightarrow{F_{air}} = 2R\sin(\theta)\,P_{atm}\int_{-H}^{0} dz\,\overrightarrow{e_x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{F_{air}} = 2R\sin(\theta)\,H.P_{atm}\,\overrightarrow{e_x}}.$$

Q4- Selon la relation fondamentale de la statique des fluides, projetée selon l'axe (Oz) ascendant :

$$\frac{dP_{eau}}{dz} = -\rho g$$

On intègre entre 0 et z : $\underline{P_{eau}(z) = P(0) - \rho g z}$ avec $z \in [-H;0]$.

$$\Leftrightarrow \boxed{P_{eau}(z) = P_{atm} - \rho g z}$$

Ainsi, en intégrant l'expression (I) entre $-H$ et 0 :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{eau}} = -2R\sin(\theta)\int_{-H}^{0}\left[P_{atm} - \rho g z\right]dz\,\overrightarrow{e_x}}$$

Donc :

$$\underline{\overrightarrow{F_{eau}} = -2R\sin(\theta)\left[P_{atm}.H + \rho g\frac{H^2}{2}\right]\overrightarrow{e_x}}$$

Q5- La résultante des forces de pression est donc :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_{eau}} + \overrightarrow{F_{air}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{F} = -R\sin(\theta).\rho g H^2\,\overrightarrow{e_x}}$$

En norme : $F = \|\overrightarrow{F}\| = R\sin(\theta).\rho g H^2$.

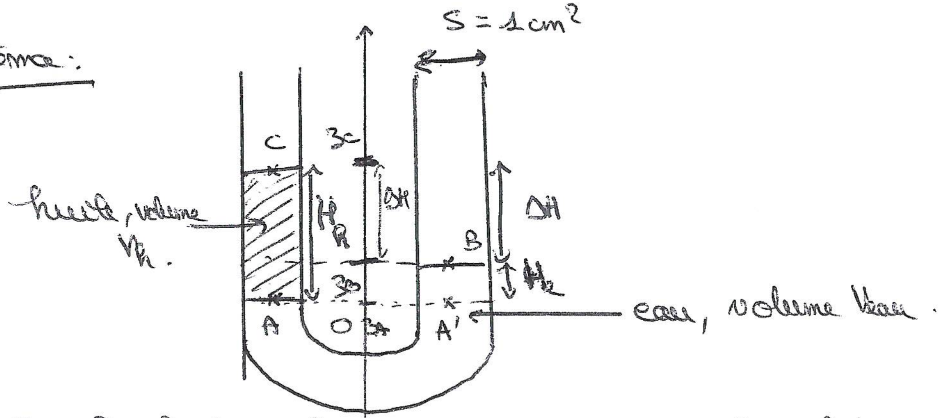
<u>A.N. :</u> avec $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$ et $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$:

$$\boxed{F \simeq 9{,}63\times10^{9}\ N}.$$

Cette force, très importante, est compensée à l'équilibre par la force de contact du sol et des points d'ancrage sur les parois latérales.

Mesure de la densité d'une huile

Schéma :



On cherche $d_h = \frac{\rho_h}{\rho_{eau}}$, donc ρ_h. Selon la relation fondamentale de la statique des fluides appliquée à l'huile :

$$P(A) - P(C) = \rho_h \cdot g H_h.$$

Avec $P(C) = P(B) = P_{atm} = 1$ atm ;

$$P(A) = P_{atm} + \rho_h g H_h.$$

De plus, en appliquant le même raisonnement à l'eau :

$$P(A') - P(B) = \rho_e g H_e.$$

Or $P(A') = P(A)$, donc :

$$P(A) = P_{atm} + \rho_e g H_e.$$

Ainsi :

$$\rho_e g H_e = \rho_h g H_h.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_e H_e = \rho_h H_h}$$

La mesure de H_e n'est pas simple expérimentalement car elle nécessite de reporter la hauteur de l'interface eau/huile dans le compartiment de droite du tube en U. En revanche, on peut aisément mesurer $\Delta H = H_h - H_e$ à l'aide du réglet, puisque les 2 interfaces air/liquide sont facilement repérables.

Ainsi : $H_e = H_h - \Delta H$

Donc :

$$\rho_e (H_h - \Delta H) = \rho_h H_h$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_h = \rho_e \left(1 - \frac{\Delta H}{H_h}\right)} \Leftrightarrow \boxed{d_h = 1 - \frac{\Delta H}{H_h}}$$

- Connaissant le volume exact de l'huile versé, on peut anticiper la valeur de H_h :

$$V_h = S \cdot H_h$$

$$\Leftrightarrow H_h = \frac{V_h}{S}.$$

D'où :

$$\boxed{\rho_h = \rho_e \left(1 - \frac{S \Delta H}{V_H}\right)}.$$

Exemple :
- on verse un volume $V_e = 50$ ml d'eau dans le tube en U.
- on verse dans le compartiment de gauche $V_h = 10$ ml $= 10$ cm³ d'huile ; ainsi : $\boxed{H_h = 10 \text{ cm}}$
- on mesure la hauteur ΔH à l'aide du réglet.

A.N. : avec $\Delta H = 1$ cm, $\boxed{d_h = 0{,}9}$