

## ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

### ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

---

## SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

Énoncé : **23 pages**

Annexes : **4 pages**

Document Réponse : **14 pages**

Il est conseillé d'utiliser des feuilles de papier brouillon afin de mettre au point les développements mathématiques, schémas, graphes et courbes, avant de les recopier au propre sur le Document Réponse.

**Seul le Document Réponse doit être rendu dans son intégralité.**

# Drone à géométrie variable

Inspiré de la thèse de Valentin RIVIERE,  
" Vers un robot aérien autonome bio-inspiré à morphologie variable ",  
Thèse de doctorat en Sciences du Mouvement Humain, Aix-Marseille, 2019

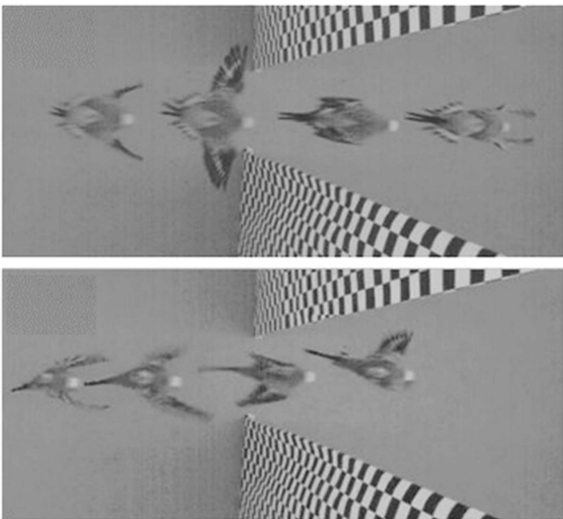
## Présentation générale

Ce sujet porte sur la conception d'un drone quadrirotor bio-inspiré, développé à l'institut des sciences du mouvement. Ce drone s'inspire de l'oiseau et possède la capacité de se replier en vol afin de diminuer son envergure (**figures 1 et 2**).

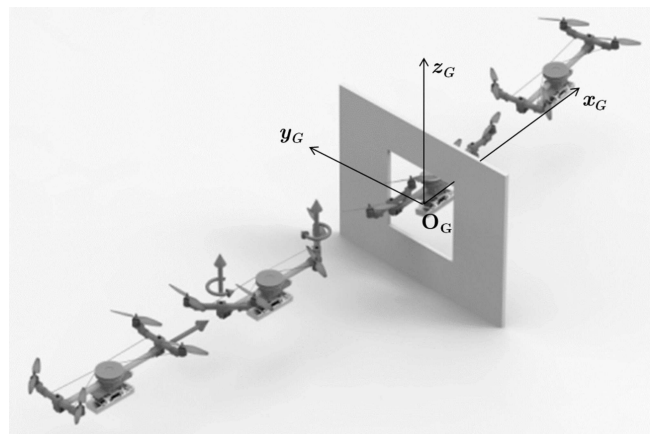
En fin de repliement, les bras supportant les moteurs et hélices s'alignent le long du corps du drone pour éviter que les hélices ne touchent les bords de l'ouverture.

Cette particularité est intéressante pour des problématiques d'évitement d'obstacles dans des milieux encombrés. Le drone est de plus pourvu d'un algorithme d'estimation de taille d'obstacles en vol grâce à une perception visuelle monoculaire. Cet algorithme permet de rendre le drone plus autonome pour éviter les collisions avec son environnement et actionner son système de changement de forme si cela est nécessaire.

Tout cet ensemble constitue la plateforme Quadmorphing.



**Figure 1** - L'oiseau s'adapte au passage plus étroit en modifiant son envergure



**Figure 2** - Vue CAO de la plateforme QuadMorphing passant à travers une ouverture

L'objectif de cette étude est de concevoir et valider les solutions technologiques retenues pour la plateforme QuadMorphing permettant le passage d'ouverture en vol. Le diagramme partiel des exigences liées à cette étude est donné en **figure 21** de l'**annexe 1**.

La démarche proposée est définie ci-après.

- **Partie I** - Influence des mouvements des bras du drone sur son comportement.
- **Partie II** - Choix d'un mécanisme de modification de l'envergure.
- **Partie III** - Analyse simplifiée de l'asservissement en roulis du drone.

## Partie I - Influence des mouvements des bras du drone sur son comportement

Indépendamment de la solution retenue pour mettre en mouvement les bras supportant les moteurs et hélices, nous nous intéressons dans cette partie aux conséquences des mouvements des bras sur le comportement dynamique du drone afin de valider les choix retenus par la suite.

### I.1 - Influence de la rotation des bras sur l'envergure - vérification des exigences Id 1 et Id 1.1

Pour diminuer l'envergure, on choisit de replier les bras supportant les moteurs et hélices du drone. Le repliement doit être rapide et de courte durée. En effet, pour des raisons de contrôle et de stabilité, il est impossible d'utiliser un drone avec les bras repliés en permanence. La **figure 23** de l'**annexe 2** présente un modèle géométrique simplifié du drone pour lequel le bras 1, supportant les deux moteurs et hélices avant, peut tourner par rapport au corps 0 du drone. Le bras 2, supportant les deux moteurs et hélices arrière, peut également tourner par rapport au corps 0. Aussi pour cette étude d'envergure, l'analyse portera sur le bras 1 seul, le comportement du bras 2 étant identique. La **figure 23** précise le paramétrage associé à cette étude. L'angle de rotation du bras 1 par rapport au corps 0 du drone est noté  $\gamma_1$  et peut atteindre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[0^\circ, 90^\circ]$ .

L'angle de rotation du bras 2 par rapport au corps 0 du drone est noté  $\gamma_2$  et peut atteindre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[90^\circ, 180^\circ]$ .

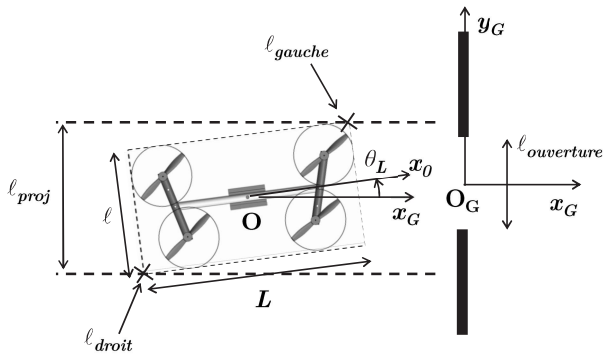
**Q1.** À partir de la **figure 23** de l'**annexe 2**, déterminer l'expression de la largeur  $\ell$  en fonction de  $\gamma_1$  et des données de la géométrie du drone.

**Q2.** En déduire la valeur de la réduction d'envergure  $A = 1 - \frac{\ell_{\min}}{\ell_{\max}}$  et l'exprimer en %.  
Conclure sur la performance liée à l'exigence de réduction d'envergure Id 1.1.

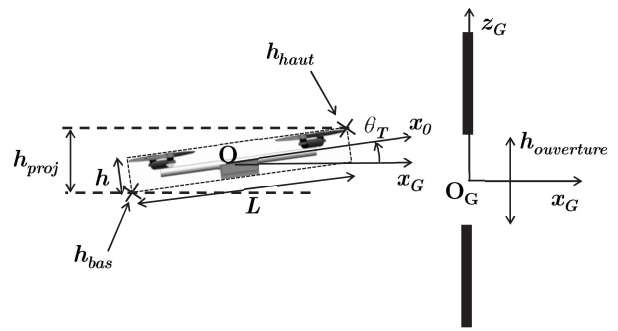
Des essais expérimentaux ont été réalisés pour analyser le passage du drone au travers d'une ouverture carrée de taille de 20 cm  $\times$  20 cm et de profondeur de 1 cm. L'ouverture est placée verticalement par rapport au sol et un de ses côtés est orienté horizontalement (parallèle au sol). Selon la **figure 2**, le repère  $\mathcal{R}_G$  est associé à cette ouverture (origine  $O_G$  centrée par rapport à l'ouverture). Pour la suite, la position  $\overrightarrow{O_G O} = x_G \cdot \vec{x}_G + y_G \cdot \vec{y}_G + z_G \cdot \vec{z}_G$  correspond à la position du centre d'inertie  $O$  du drone par rapport au repère  $\mathcal{R}_G$ .

On définit selon les **figures 3** et **4**, la longueur projetée  $\ell_{\text{proj}}$  et la hauteur projetée  $h_{\text{proj}}$  du drone dans le plan de l'ouverture. Les bords avant gauche et arrière droit du drone sont représentés respectivement par les points  $\ell_{\text{gauche}}$  et  $\ell_{\text{droit}}$ . Les bords avant haut et arrière bas du drone sont représentés respectivement par les points  $h_{\text{haut}}$  et  $h_{\text{bas}}$ .

Ces grandeurs dépendent des dimensions du drone et de son orientation par rapport à  $\mathcal{R}_G$ . En première approximation et en considérant un angle de roulis  $\theta_R$  (rotation autour de  $(O, \vec{x}_0)$ ) nul lors du passage de l'obstacle, la longueur projetée  $\ell_{\text{proj}}$  dépend uniquement des dimensions du drone et de l'angle de lacet  $\theta_L$  (rotation autour de  $(O, \vec{z}_0)$ ), et la hauteur projetée  $h_{\text{proj}}$  dépend uniquement des dimensions du drone et de l'angle de tangage  $\theta_T$  (rotation autour de  $(O, \vec{y}_0)$ ).

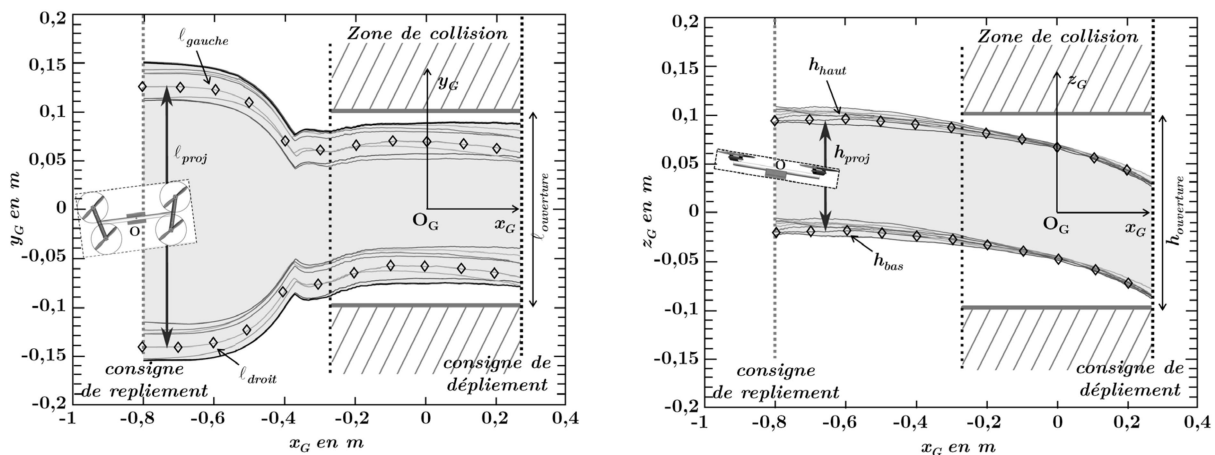


**Figure 3** - Définition de la longueur projetée  $\ell_{proj}$  et de l'angle de lacet  $\theta_L$



**Figure 4** - Définition de la hauteur projetée  $h_{proj}$  et de l'angle de tangage  $\theta_T$

Les relevés expérimentaux de 8 essais avec manœuvre de repliement des bras et passage de l'ouverture sont donnés en **figure 5**. La zone hachurée représente l'envergure de l'ouverture durant toutes les positions du robot où les collisions sont possibles, c'est-à-dire pour  $x_G \in [-L/2, L/2]$ . L'aire grisée représente l'envergure maximale occupée par le drone durant les huit essais. Les positions des points extrêmes du drone de l'essai n°4 ( $\ell_{gauche}$ ,  $\ell_{droit}$ ,  $h_{haut}$  et  $h_{bas}$ ) sont représentées par les courbes avec le marqueur en forme de losange  $\diamond$ . On peut observer sur ces figures la diminution de l'envergure horizontale du drone à partir de la consigne de repliement (représentée verticalement en pointillés à gauche). La consigne de dépliement de la structure (représentée verticalement en pointillés à droite) est donnée dès la sortie de la zone probable de collision afin de stabiliser le drone au plus vite.



**Figure 5** - Vues de dessus et de côté de l'envergure du drone durant huit passages de l'ouverture

- Q3.** Relever pour l'essai n°4, la valeur de  $\ell_{proj}$  avant repliement (notée  $\ell_{proj}^{max}$ ) et la comparer à  $\ell_{max}$  de la question précédente. De même pour la valeur après repliement (notée  $\ell_{proj}^{min}$ ) à comparer à  $\ell_{min}$ .  
Si des écarts sont constatés entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques, expliquer l'(les) origine(s) de ces écarts.  
Conclure sur la vérification de l'exigence liée au passage d'ouverture Id 1.



## I.2 - Influence de la rotation des bras sur la vitesse maximale en bout de pale - Vérification de l'exigence Id 4

On considère que le drone se déplace en ligne droite à la vitesse de déplacement  $V_x \vec{x}_0$  selon  $\vec{x}_0 = \vec{x}_G$  telle que  $V_x = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette vitesse correspond à la vitesse retenue pour négocier le passage de l'ouverture. Elle est suffisamment lente pour que le drone ait le temps d'interpréter la taille de l'ouverture et de décider si elle est franchissable ou non (dans ce cas le drone doit avoir le temps de réaliser un freinage d'urgence avant collision). Par ailleurs, cette vitesse est suffisamment rapide pour conserver un minimum " d'inertie " lors du franchissement et permettre sa stabilisation une fois l'ouverture franchie et les bras dépliés.

Les **figures 23** et **24** complètent le paramétrage. On suppose que le référentiel terrestre associé à  $\mathcal{R}_G$  peut être considéré galiléen. On pose de plus  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_{H1})$  l'angle définissant l'orientation de l'hélice  $H1$  par rapport au bras 1.

La vitesse de rotation du bras 1 par rapport au corps 0 du drone,  $\vec{\Omega}(1/\mathcal{R}_0)$ , est telle que  $\vec{\Omega}(1/\mathcal{R}_0) = \dot{\gamma}_1 \vec{z}_0$ . La valeur maximale de cette vitesse est obtenue par une rotation de  $90^\circ$  en 300 ms.

La vitesse de rotation de l'hélice  $H1$  par rapport au bras 1,  $\vec{\Omega}(H1/\mathcal{R}_1)$ , est telle que  $\vec{\Omega}(H1/\mathcal{R}_1) = \omega_1 \vec{z}_0 = \dot{\alpha} \vec{z}_0$ . On considérera que la vitesse de rotation de l'hélice est égale à 13 400 tr/min pour assurer la portance et le déplacement horizontal du drone à  $V_x = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q4.** Déterminer l'expression littérale de  $\vec{V}(P, H1/\mathcal{R}_G)$ , la vitesse en bout de pale de l'hélice  $H1$  par rapport à  $\mathcal{R}_G$ , en fonction des données et notamment de  $\dot{\gamma}_1$  et de  $\omega_1$ .

**Q5.** Dans quelle configuration du bras et de la pale cette vitesse en bout de pale est-elle maximale ?

Déterminer dans ce cas l'expression maximale de la norme, notée  $V_{\max}$ . Réaliser l'application numérique en déterminant au préalable la valeur numérique de chacun des termes de l'expression de  $V_{\max}$ .

Commenter l'influence de la vitesse de rotation des bras du drone sur la valeur de  $V_{\max}$  et sur la vérification de l'exigence Id 4.

## I.3 - Influence de la rotation des bras sur le comportement dynamique du drone selon l'axe de lacet - vérification de l'exigence Id 1.1.1

On cherche à déterminer la relation à donner entre les rotations  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des deux bras du drone de manière à limiter les perturbations sur le comportement dynamique en vol du drone lors des phases de repliement et dépliement. L'objectif est d'avoir un moment dynamique du drone selon l'axe de lacet (axe  $(O, \vec{z}_0)$ ) en  $O$ , centre d'inertie du drone, indépendant de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (et de leurs dérivées successives). Les matrices d'inerties des principaux éléments du drone, dont la géométrie a été simplifiée pour cette étude, sont données en **annexe 3**.

### Hypothèses

On suppose le drone en vol rectiligne à vitesse constante et à altitude constante. Le référentiel associé au repère  $\mathcal{R}_0$  lié au corps du drone peut être considéré galiléen.

Les vitesses de rotation des hélices sont telles que :

- $|\omega_1| = |\omega_2| = \omega$  constante,
- $|\omega_3| = |\omega_4| = \omega'$  constante.

Les bras sont en phase de repliement ou dépliement, donc  $\gamma_1 \in ]0^\circ, 90^\circ[$ ,  $\dot{\gamma}_1 \neq 0$  et  $\ddot{\gamma}_1 \neq 0$  pour le bras 1 ; idem pour les dérivées de l'angle  $\gamma_2$  du bras 2.

- Q6.** Déterminer l'expression littérale du moment dynamique du bras 1 calculé en  $O$  selon  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}(O, 1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ . En déduire l'expression littérale du moment dynamique du bras 2 calculé en  $O$  selon  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}(O, 2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ .
- Q7.** Déterminer l'expression littérale du moment dynamique de l'hélice  $H1$  calculé en  $O$  selon  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}(O, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ .
- Q8.** En déduire l'expression littérale du moment dynamique de l'hélice  $H2$  calculé en  $O$  selon  $\vec{z}_0$  :  $\vec{\delta}(O, H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ .

On donne pour la suite l'expression littérale du moment dynamique de l'ensemble hélice  $H3$  + hélice  $H4$  calculé en  $O$  selon  $\vec{z}_0$  :

$$\vec{\delta}(O, H3 + H4/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = 2I_{hz}\ddot{\gamma}_2 + 2m_h \left(\frac{L_1}{2}\right)^2 \ddot{\gamma}_2.$$

- Q9.** À partir des résultats des trois questions précédentes, montrer que l'expression du moment dynamique de l'ensemble  $\Sigma$ , calculé en  $O$  selon  $\vec{z}_0$ , se met sous la forme :

$$\vec{\delta}(O, \Sigma/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = 2I_{eq} (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2)$$

où  $I_{eq}$  est une constante dont l'expression est à préciser.

La commande retenue pour le repliement et dépliement des bras du drone satisfait la relation suivante :  $\gamma_2 = \pi - \gamma_1$ .

- Q10.** Expliquer en quoi ce choix de conception permet de vérifier l'exigence Id 1.1.1.

#### 1.4 - Influence de la rotation des bras sur l'inertie du drone - analyse de l'exigence Id 1.2

On se propose de déterminer les variations, dues à la rotation des bras, de la matrice d'inertie totale du drone en  $O$  exprimée dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On considère pour ceci une géométrie simplifiée du drone (**figure 6**) composée du châssis intégrant la caméra et la batterie, des deux bras et des 4 sous-ensembles {moteurs brushless + hélice} modélisés par des masses ponctuelles, de masse  $m_E = m_{moteur} + m_h$  (dans cette sous-partie les inerties des axes moteurs et hélices sont négligées devant les autres grandeurs). On rappelle que  $\gamma_2 = \pi - \gamma_1$ .

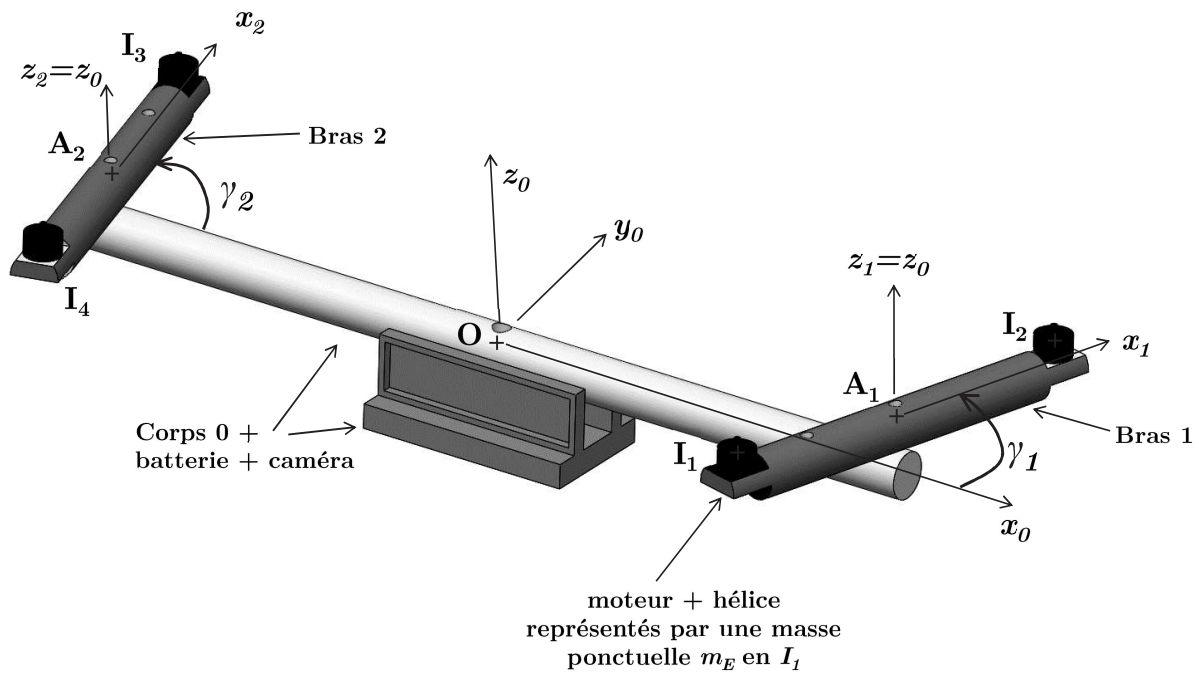
En additionnant les matrices d'inertie du corps 0, du drone et des bras 1 et 2 exprimées en  $O$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ , l'inertie de l'ensemble, en tenant compte également des moteurs brushless

et des hélices, se met sous la forme :  $\mathbb{I}_\Sigma(O) = \begin{pmatrix} I_{\Sigma X} & I_{\Sigma xy} & I_{\Sigma xz} \\ & I_{\Sigma Y} & I_{\Sigma yz} \\ \text{sym} & & I_{\Sigma Z} \end{pmatrix}_{(O, \mathcal{B}_0)}$

où les termes  $I_{\Sigma X}$ ,  $I_{\Sigma Y}$  sont des fonctions de  $\gamma_1$  et de la géométrie et  $I_{\Sigma Z}$  est uniquement fonction de la géométrie (et donc indépendant de  $\gamma_1$ ).

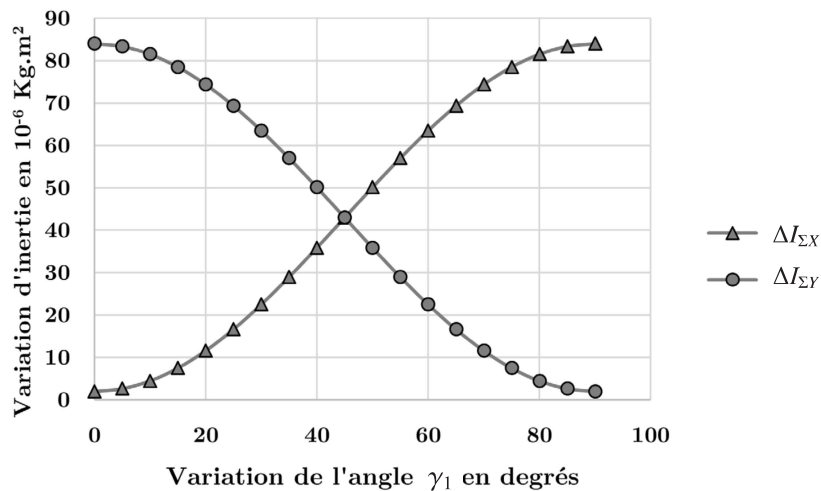
- Q11.** Compte tenu de la géométrie retenue, simplifier la forme de la matrice d'inertie totale  $\mathbb{I}_\Sigma(O)$ . Justifier vos simplifications.

La relation entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  permet finalement d'avoir une matrice d'inertie de l'ensemble du drone qui est quasiment diagonale pour toutes valeurs de  $\gamma_1$ , ce qui évite le couplage des équations de roulis, tangage et lacet et facilite ainsi le contrôle du drone. Cela permet également d'avoir un moment d'inertie selon l'axe de lacet  $I_{\Sigma Z}$  indépendant de la position des bras.



**Figure 6** - Figure simplifiée de la géométrie du drone

On note pour la suite  $\Delta I_{\Sigma X}(\gamma_1)$  et  $\Delta I_{\Sigma Y}(\gamma_1)$  les variations d'inertie en roulis, respectivement en tangage, fonctions de  $\gamma_1$ , telles que :  $I_{\Sigma X} = \Delta I_{\Sigma X}(\gamma_1) + I_{\Sigma X}^{cste}$  et  $I_{\Sigma Y} = \Delta I_{\Sigma Y}(\gamma_1) + I_{\Sigma Y}^{cste}$ , où  $I_{\Sigma X}^{cste}$  et  $I_{\Sigma Y}^{cste}$  représentent les termes constants des moments d'inertie indépendants de  $\gamma_1$ .



**Figure 7** - Évolution de  $\Delta I_{\Sigma X}$  et de  $\Delta I_{\Sigma Y}$  en fonction de  $\gamma_1$ . Les bras sont dépliés pour  $\gamma_1 = 90^\circ$  et pliés (c'est-à-dire alignés avec le corps du drone) pour  $\gamma_1 = 0^\circ$

Les évolutions de  $\Delta I_{\Sigma X}(\gamma_1)$  et de  $\Delta I_{\Sigma Y}(\gamma_1)$  en fonction de  $\gamma_1$  sont données **figure 7**. On donne de plus ci-dessous les valeurs numériques, en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ , de la matrice d'inertie de la géométrie simplifiée du drone pour la position bras dépliés ( $\gamma_1 = 90^\circ$ ) :

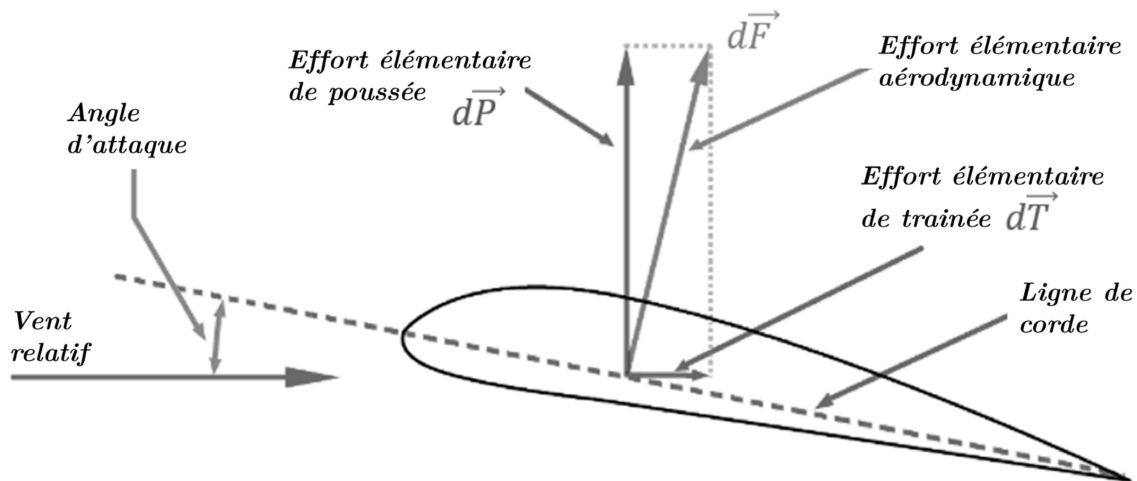
$$\mathbb{I}_{\Sigma}(O)_{|\gamma_1=90^\circ} = \begin{pmatrix} 5,3 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1,96 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1,72 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}_{(O, \mathcal{B}_0)}$$

**Q12.** En déduire, en %, les variations maximales d'inertie en roulis, définie par  $\frac{\Delta I_{\Sigma X}}{I_{\Sigma X}(\gamma_1 = 90^\circ)}$  et en tangage, définie par  $\frac{\Delta I_{\Sigma Y}}{I_{\Sigma Y}(\gamma_1 = 90^\circ)}$ . Conclure sur la différence de comportement en vol du drone en roulis et en tangage une fois les bras pliés.

### I.5 - Influence du sens de rotation des hélices sur le comportement dynamique du drone - analyse de l'exigence Id 1.2

Le fait d'entraîner en rotation une pale d'hélice à la vitesse de rotation  $\omega_i$  crée une vitesse relative entre la pale et l'air. Ce phénomène génère ainsi un effort élémentaire  $d\vec{F}$  qui peut être projeté (**figure 8**) sur l'axe de rotation (composante  $d\vec{P}$ ) et dans le plan de rotation (composante  $d\vec{T}$ ).

En sommant ces efforts sur un tour d'hélice et en intégrant sur toute la longueur de la pale, il en résulte une force résultante  $\vec{T}$ , perpendiculaire au plan de rotation (la poussée), ainsi qu'un moment résultant  $\vec{Q}$  s'exerçant à l'opposé du sens de rotation (le couple de trainée).



**Figure 8** - Représentation de l'action élémentaire de l'air sur une section de pale et de ses projections lors de sa rotation

L'action mécanique de l'air sur l'hélice  $H1$  peut donc être modélisée par l'action mécanique résultante suivante, pour une rotation du rotor dans le sens positif :

$$\{T_{Air \rightarrow H1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = T\vec{z}_0 \\ \vec{Q} = -Q\vec{z}_0 \end{array} \right\}_{I_1} \quad (1)$$

avec  $T = c_T \omega_i^2$  et  $Q = c_Q \omega_i^2$ .

Ces actions, retrouvées au niveau de chacune des hélices, permettent de générer les forces et moments s'exerçant sur le drone en vue de son contrôle.

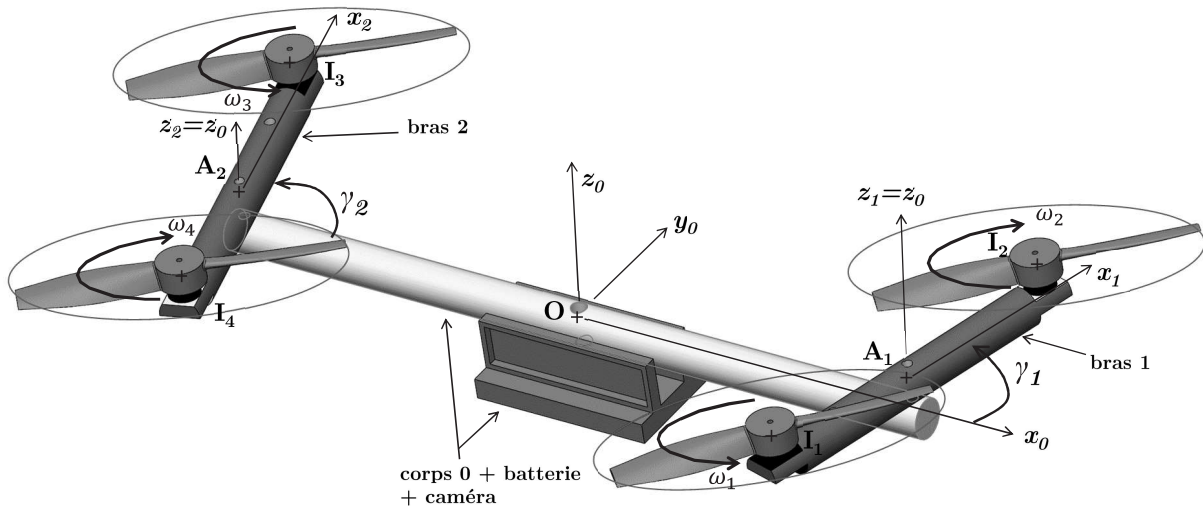
Afin de limiter l'influence des moments de trainée de chaque hélice sur le comportement dynamique du drone en vol stationnaire (cas où les hélices tournent toutes à la même vitesse et génèrent une poussée résultante compensant le poids du drone), on souhaite déterminer le sens de rotation de chacun des rotors.

### Hypothèses

On suppose que, quel que soit le sens de rotation du rotor, la portance s'oppose toujours à l'action du poids (les hélices sont choisies dans ce but).

**Q13.** Sur la figure du **DR**, représenter les actions mécaniques  $\vec{T}$  et  $\vec{Q}$  pour chacune des hélices (en trait plein pour les résultantes et en pointillés pour les moments).  
En déduire si le drone est à l'équilibre ou non.

Pour la suite, les hélices génèrent une poussée résultante compensant le poids du drone. Les sens des vitesses de rotation des hélices s'opposent deux à deux selon la représentation de la **figure 9** et ce quelle que soit la position des bras. Les hélices  $H1$  et  $H3$  tournent dans le sens trigonométrique et les hélices  $H2$  et  $H4$  dans le sens horaire.



**Figure 9** - Sens de rotation des hélices du drone

**Q14.** Quel est alors le comportement du drone dans le cas où  $|\omega_1| = |\omega_2|$  et  $|\omega_3| = |\omega_4|$  avec  $|\omega_1| < |\omega_3|$  ?

Vous pouvez vous aider d'un schéma pour représenter les actions et justifier votre réponse.

Pour la question suivante, on considèrera que les hélices tournent toutes à la même vitesse et génèrent une poussée résultante compensant le poids du drone.

**Q15.** Déterminer l'expression du torseur de l'action de l'air sur l'hélice  $H1$  (défini par l'équation (1)) calculé au point  $O$ , centre d'inertie du drone. Les composantes du torseur seront données dans la base  $\mathcal{B}_0$  en fonction des grandeurs géométriques, de  $\gamma_1$ , de  $c_T$ ,  $c_Q$  et de  $\omega_1$ .



On donne pour la suite la matrice  $\Gamma(\gamma_1)$  permettant de relier les carrés des vitesses de rotation des hélices à la poussée résultante et aux moments résultants exprimés en  $O$  selon les axes du drone (respectivement roulis selon  $\vec{x}_0$ , tangage selon  $\vec{y}_0$  et lacet selon  $\vec{z}_0$ ).

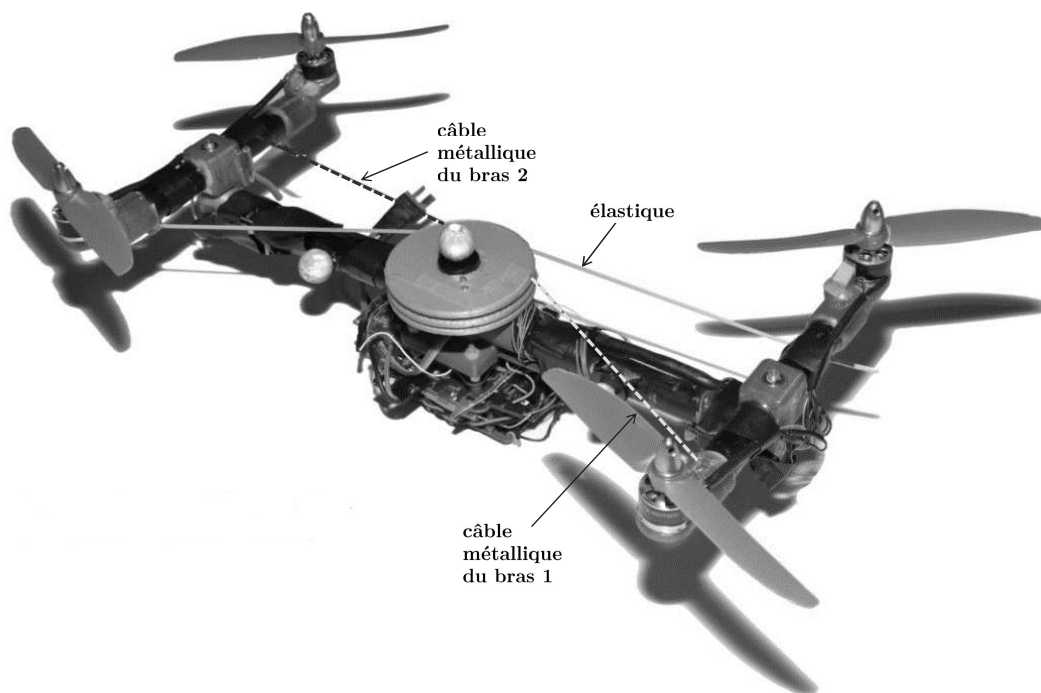
$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \vec{F}_{air \rightarrow Hi} \vec{z}_0 \\ \sum_{i=1}^4 \vec{M}_{O,air \rightarrow Hi} \vec{x}_0 \\ \sum_{i=1}^4 \vec{M}_{O,air \rightarrow Hi} \vec{y}_0 \\ \sum_{i=1}^4 \vec{M}_{O,air \rightarrow Hi} \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & c_T & c_T & c_T \\ \dots & c_t \frac{L_1}{2} \sin(\gamma_1) & c_t \frac{L_1}{2} \sin(\gamma_1) & -c_t \frac{L_1}{2} \sin(\gamma_1) \\ \dots & -\left(\frac{L_0}{2} + \frac{L_1}{2} \cos(\gamma_1)\right) & \left(\frac{L_0}{2} + \frac{L_1}{2} \cos(\gamma_1)\right) & \left(\frac{L_0}{2} - \frac{L_1}{2} \cos(\gamma_1)\right) \\ \dots & -c_Q & c_Q & -c_Q \end{pmatrix}}_{\Gamma(\gamma_1)} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix}$$

où les termes de la 1<sup>re</sup> colonne ont été déterminés à la question précédente.

**Q16.** Que dire de l'action des hélices dans la position bras repliés  $\gamma_1 = 0^\circ$  pour le moment résultant en  $O$  selon l'axe de roulis ? Conclure sur le respect de l'exigence Id 1.2 dans cette configuration.

## Partie II - Choix d'un mécanisme de modification de l'envergure

Pour limiter le poids, le mécanisme de modification d'envergure choisi est un mécanisme à câbles piloté par un servomoteur (**figure 11**).



**Figure 11** - Mécanisme de repliement avec servomoteur, poulie, 2 câbles métalliques et un élastique

Le servomoteur est placé au centre du drone et permet de positionner les bras à l'angle désiré. La transmission du mouvement se fait grâce aux deux câbles métalliques. Selon la **figure 25** de l'**annexe 4**, le câble métallique 1 est accroché d'un côté à la poulie, elle-même liée à l'axe du servomoteur, et de l'autre côté au bras 1 au point  $B_1$  ; le câble métallique 2 est accroché d'un côté à la poulie et de l'autre au bras 2 au point  $B_2$ .

Afin de verrouiller la structure pour n'importe quelle position des bras, un élastique relie les bras entre eux. Cet élastique est fixé aux bras du côté opposé aux points d'accroche des câbles métalliques et est guidé par l'intermédiaire d'une gorge au niveau de la poulie. La tension de l'élastique est ajustée afin de trouver un bon compromis entre le temps de repliement/dépliement des bras et la rigidité de la structure (c'est-à-dire l'absence de mouvement des bras durant le vol en position  $\gamma_1 = 90^\circ$ ).

L'étude suivante porte sur l'analyse de la loi entrée / sorties de ce mécanisme de repliement des bras présenté en **figure 25** de l'**annexe 4**. La loi entrée / sorties correspond à la relation entre la rotation du servomoteur et les rotations des bras du drone. L'analyse va permettre de déterminer la course angulaire à donner au servomoteur pour passer de la position bras dépliés ( $\gamma_1 = 90^\circ$ ) à la position bras alignés ( $\gamma_1 = 0^\circ$ ), mais également les dimensions géométriques nécessaires au bon fonctionnement du mécanisme. Le paramétrage nécessaire à cette étude est donné en **annexe 4**.

### Hypothèses

- On suppose les câbles métalliques suffisamment rigides pour pouvoir être considérés inextensibles en traction, compte tenu d'une part des efforts nécessaires pour mettre en mouvement les bras et d'autre part de l'action de l'élastique.
- Les câbles s'enroulent sur la poulie sans glisser.
- On considère le câble non enroulé sur la poulie entre les points  $C_1$  et  $B_1$ . Mais en réalité il l'est sur une faible portion et en toute rigueur  $C_1B_1$  ne peut être considéré rectiligne. Cette approximation permet de simplifier la géométrie du mécanisme et n'engendre pas de grandes différences sur la valeur de la longueur du câble entre les points  $C_1$  et  $B_1$ .

**Q20.** À partir du paramétrage et des hypothèses retenues, écrire la fermeture vectorielle liée à la chaîne de solides {corps 0, bras 1, câble 1 et poulie 5}.

La mettre sous la forme  $L_{c1}(\theta)\vec{x}_{c1} = \dots$ .

**Q21.** En déduire une relation du type :  $L_{c1}^2(\theta) = A \cos(\gamma_1) + B \sin(\gamma_1) + C$

Exprimer les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  en fonction des données géométriques.

Si besoin, on donne pour la suite :  $A = -11\,200 \text{ mm}^2$ ,  $B = 2\,400 \text{ mm}^2$  et  $C = 22\,100 \text{ mm}^2$ .

**Q22.** Déterminer approximativement la valeur numérique de  $L_{c1}^{\text{init}}$  obtenue pour  $\gamma_1 = 90^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ .

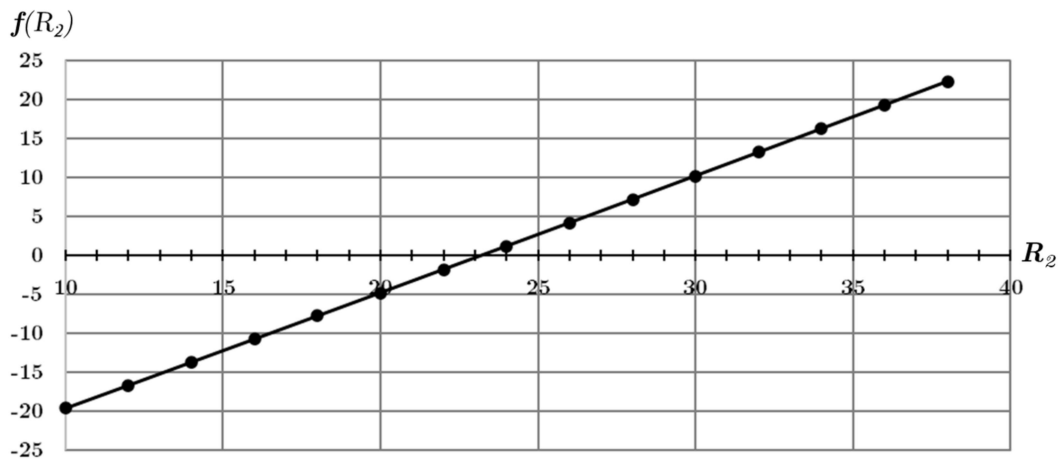
Déterminer approximativement la valeur numérique de  $L_{c1}^{\text{final}}$  obtenue pour  $\gamma_1 = 0^\circ$  et  $\theta = \Delta\theta$ .

En déduire la valeur approchée en degrés de la course angulaire  $\Delta\theta$  nécessaire pour assurer le repliement du bras 1, lorsque  $\gamma_1$  passe de  $90^\circ$  à  $0^\circ$ .

Avec la géométrie retenue et les positions des points d'accroche des câbles métalliques sur les bras, il est nécessaire que le câble métallique 2 soit enroulé sur la poulie avec un rayon d'enroulement  $R_2$  différent de  $R_1$  pour assurer que le bras 2 tourne bien de  $90^\circ$  lorsque la poulie tourne de  $\Delta\theta$ . La fermeture vectorielle de la chaîne de solides corps 0, bras 2, câble 2 et poulie 5 permet d'obtenir le système de deux équations suivantes pour lesquelles  $R_2$  et  $L_{c2}^{\text{init}}$  restent inconnues :

$$\textcircled{1} \begin{cases} (L_{c2}^{\text{init}})^2 = (a_2 - R_2)^2 + \left(\frac{L_0}{2}\right)^2 \\ (L_{c2}^{\text{init}} + R_2\Delta\theta)^2 = \left(\frac{L_0}{2} + a_2\right)^2 + R_2^2 \end{cases} .$$

En reliant ces deux équations à l'aide du terme  $L_{c2}^{init}$ , on montre que  $R_2$  vérifie une équation du type  $f(R_2) = 0$ . La **figure 12** donne l'évolution de  $f(R_2)$  pour  $R_2 \in [10 \text{ mm}, 40 \text{ mm}]$ .



**Figure 12** - Évolution de  $f(R_2)$

**Q23.** Déterminer à l'aide de la courbe de la **figure 12** une valeur approchée de  $R_2$  solution du système ①. La valeur numérique de  $L_{c2}^{init}$  correspondante est alors  $L_{c2}^{init} \approx 141 \text{ mm}$ .

Des essais à vide (hélices et drone à l'arrêt) ont été réalisés pour l'étude des performances du système de repliement/dépliage avec les dimensions déterminées précédemment. Les résultats de ces essais sont donnés en **figure 13** pour la phase de repliement et en **figure 14** pour la phase de dépliement. Sur ces courbes, le trait fort représente la valeur moyenne des positions angulaires des différents essais.

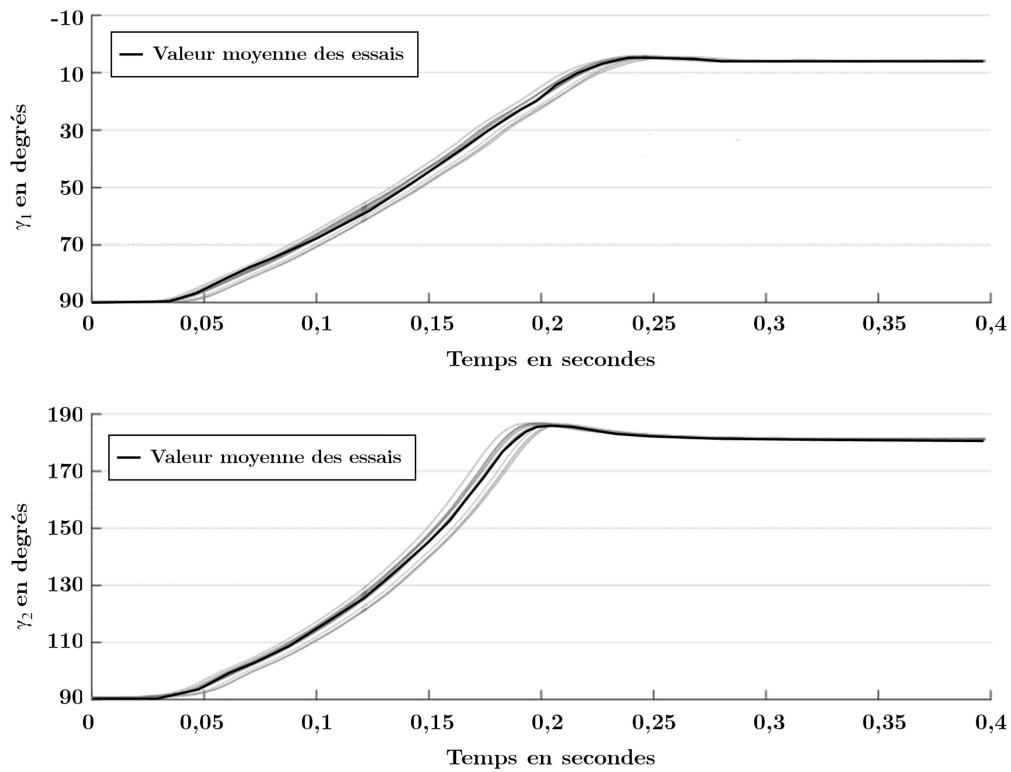
**Q24.** Les critères de performance de l'exigence Id 1.1.2 liés au mécanisme de repliement/dépliage sont-ils respectés ?

### Partie III - Analyse simplifiée de l'asservissement du drone

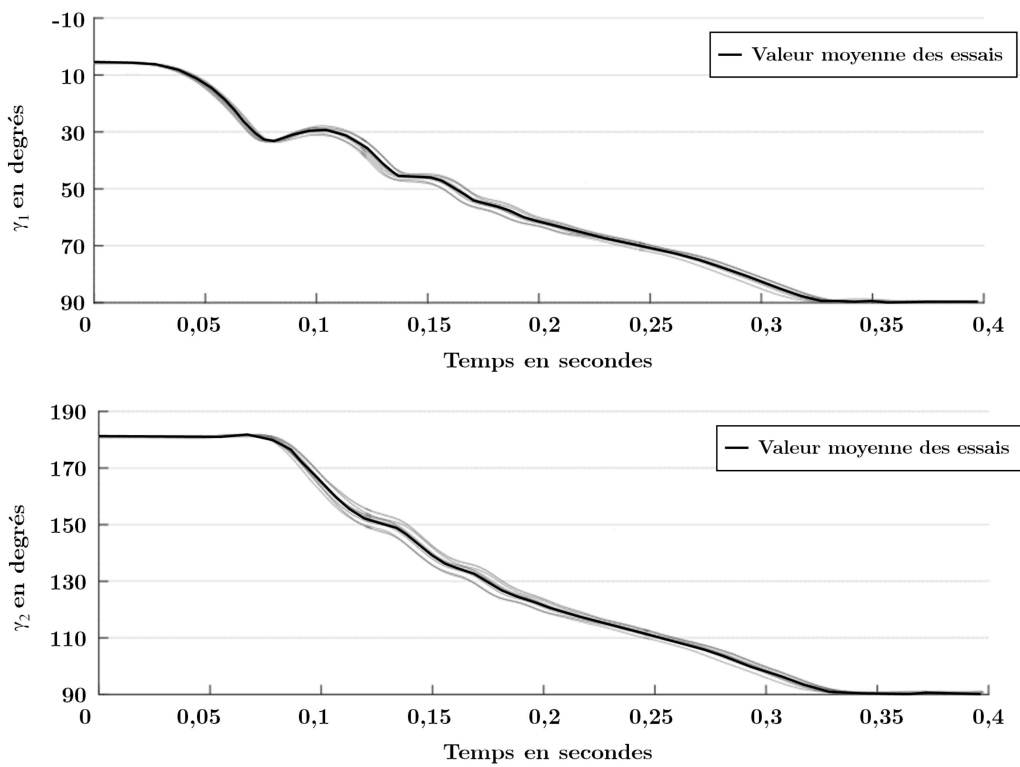
La structure générale de commande du drone est constituée de différents éléments présentés de manière schématique en **figure 15**. On y retrouve :

- le contrôleur de position qui génère les valeurs de consigne en attitude (angles de roulis  $\theta_R$ , de tangage  $\theta_T$  et de lacet  $\theta_L$ ) et de poussée des moteurs ;
- le contrôleur d'attitude, qui permet de contrôler l'orientation du drone dans l'espace ;
- l'estimateur d'attitude, qui est composé de gyroscopes et accéléromètres pour estimer les angles de roulis  $\theta_R$ , tangage  $\theta_T$  et d'un magnétomètre afin d'obtenir le cap du drone (angle de lacet  $\theta_L$ ) ;
- l'estimateur de position qui est composé de la caméra embarquée et d'un baromètre afin d'estimer les positions et vitesses du drone.

L'objectif de cette partie est de vérifier que les performances de contrôle en roulis sont conservées lors du passage de l'ouverture et lors de l'activation du mécanisme de repliement/dépliage des bras. On se limite pour cela à la structure encadrée en pointillés de la **figure 15**.

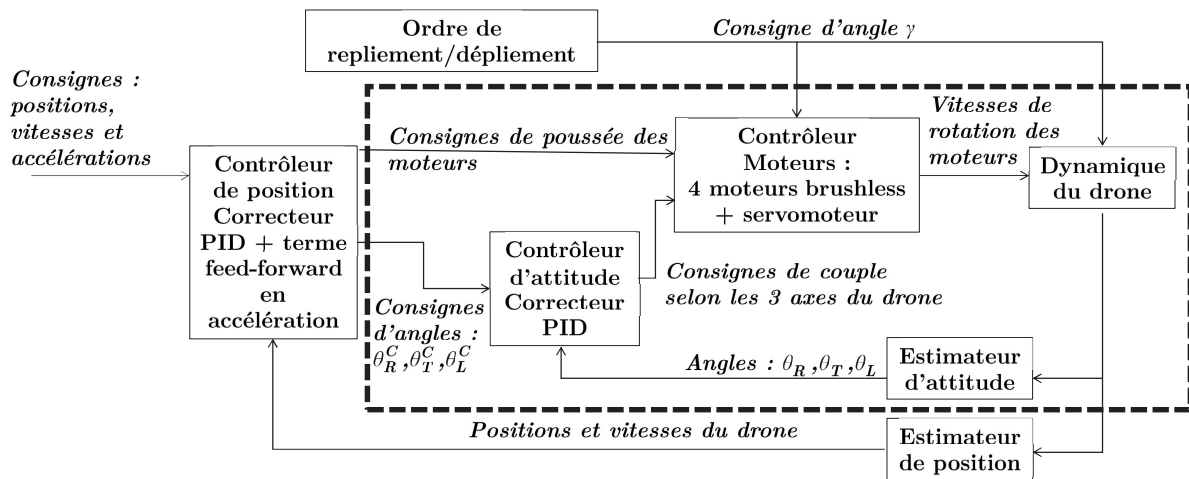


**Figure 13 - Relevés des angles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pour la phase de repliement**



**Figure 14 - Relevés des angles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pour la phase de dépliage**





$$\theta_R = \theta_{Roulis}, \theta_T = \theta_{Tangage}, \theta_L = \theta_{Lacet}$$

Figure 15 - Structure de commande du drone

### III.1 - Modélisation du comportement des moteurs brushless

Chaque hélice du drone est actionnée par un moteur brushless, lui-même alimenté par un ESC (Electronic Speed Controller). L'ESC est un contrôleur qui permet de faire varier la vitesse de rotation du moteur à l'aide d'une commande PPM (Pulse Position Modulation). Il génère ainsi les signaux pour les trois phases du moteur.

En vue d'établir un modèle de comportement des moteurs brushless, la vitesse de rotation du moteur  $\omega_M(t)$  en tr/min est mesurée pour une variation  $u(t)$  de type échelon de la commande PPM de 40 % puis de 80 % sans unité. Cette évolution est donnée sur la figure du **DR** de la **Q26**.

Suite à cet essai, on propose de modéliser le comportement du moteur brushless par celui d'un système du 1<sup>er</sup> ordre, reliant  $\Omega_M(p)$  la transformée de Laplace de la vitesse de rotation à  $U(p)$  la transformée de Laplace de la commande PPM. On note  $H_{mot}(p) = \frac{\Omega_M(p)}{U(p)}$  la fonction de transfert du moteur.

**Q26.** Justifier le modèle de comportement retenu pour  $H_{mot}(p)$  et déterminer ses caractéristiques (valeurs numériques et unités à préciser). Faire apparaître sur la figure du **DR** les tracés permettant de déterminer les caractéristiques de  $H_{mot}(p)$ .

### III.2 - Modélisation du comportement des hélices

Afin d'obtenir un modèle fiable pour le contrôle du drone, les composantes de poussée  $T$  et de trainée  $Q$  de l'action de l'air sur l'hélice sont identifiées pour le couple moteur/hélice grâce à un banc d'essai. Ce banc d'essai, **figure 17**, est équipé de deux capteurs d'effort  $C1$  et  $C2$ , chacun muni de 4 jauges de déformation, et d'un capteur optique pour mesurer la vitesse de l'hélice. On rappelle, **figure 16**, qu'un capteur d'effort avec les jauges de déformation ainsi positionnées et orientées sur le corps d'épreuve du capteur permet d'accéder à la valeur de l'effort  $F$  appliqué sur le capteur.

**Q27.** Justifier la nécessité de décaler l'axe de rotation du moteur de l'axe du capteur d'effort  $C1$  d'une distance  $d_y$  et en déduire quel capteur d'effort  $C1$  ou  $C2$  permet de mesurer quelle composante de l'action (effort de poussée  $T$  ou moment de trainée  $Q$ ).

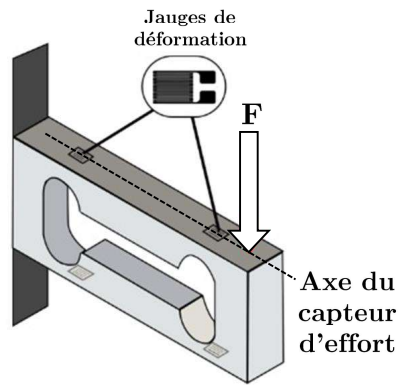


Figure 16 - Capteur d'effort. Deux jauges visibles au dessus, les deux autres en dessous

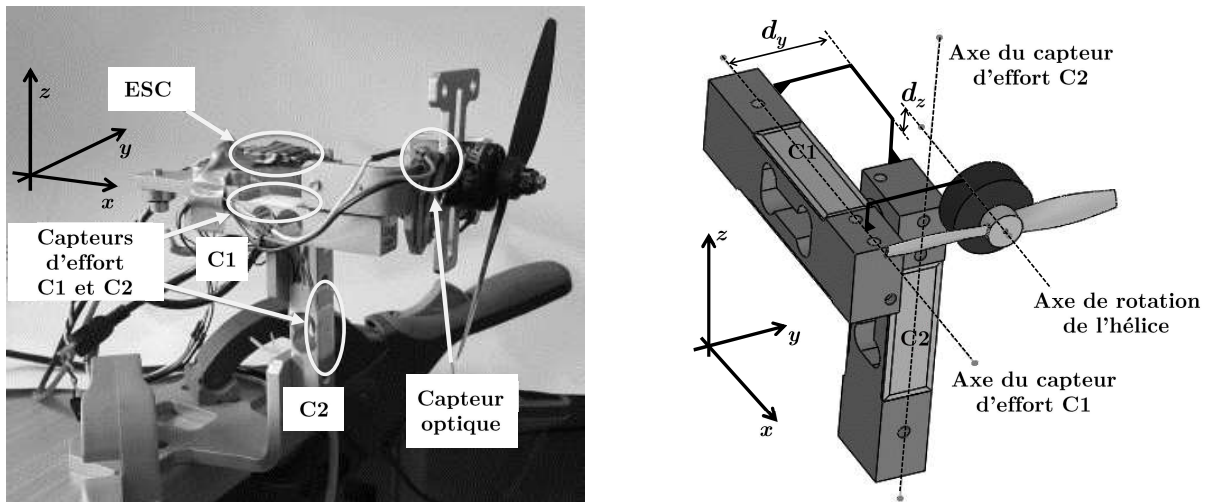


Figure 17 - Vue et schéma du banc d'essai pour déterminer les composantes  $T$  et  $Q$  de l'action de l'air sur l'hélice en fonction de la vitesse de rotation de l'hélice

Les différentes mesures permettent de déterminer les évolutions de l'effort de poussée  $T$  et du moment de trainée  $Q$  en fonction de la vitesse de rotation  $\omega_1$  de l'hélice. Ces évolutions sont présentées sur les figures du DR de la Q28. Les mesures confirment une évolution quadratique de  $T$  et  $Q$  en fonction de  $\omega_1$ , avec :

$$T = c_T \omega_1^2 \text{ avec } c_T = 1 \cdot 10^{-6} \text{ N}/(\text{rad}/\text{s})^2 \text{ et}$$

$$Q = c_Q \omega_1^2 \text{ avec } c_Q = 9,8 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{rad}/\text{s})^2,$$

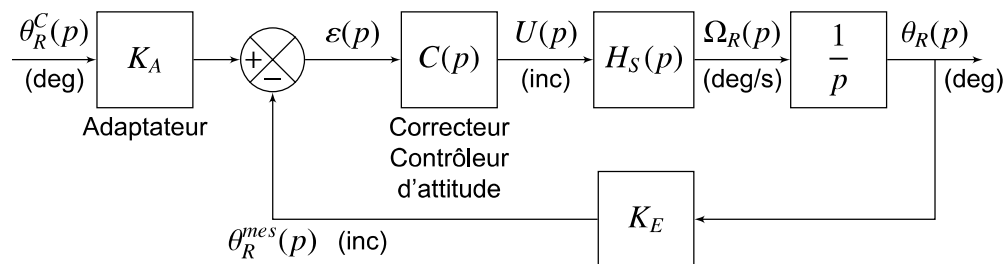
où  $c_T$  et  $c_Q$ , les coefficients de poussée, respectivement de trainée, sont obtenus par régression linéaire.

Afin de pouvoir modéliser le comportement de l'asservissement en roulis du drone lors du passage de l'ouverture, il est nécessaire de proposer un modèle de comportement linéarisé de chacun des composants du drone et notamment des hélices. On se place pour cela autour du point de fonctionnement correspondant à la vitesse d'approche du drone de l'ouverture, ce qui correspond à une vitesse de rotation des hélices de l'ordre de  $1400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On estime que les variations de vitesse de rotation des hélices sont au maximum de  $\pm 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  lors des corrections d'attitude et de cap nécessaires au passage de l'ouverture.

**Q28.** Proposer un modèle de comportement linéarisé de la variation de l'effort de poussée  $\Delta T$  et  $\Delta Q$  en fonction de la variation de vitesse de rotation  $\Delta\omega_1$  autour du point de fonctionnement étudié ( $\omega_1 \approx 1\,400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et valable dans le domaine de variation de  $\pm 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  considéré. Laisser apparents sur les courbes du **DR** les tracés permettant de justifier votre démarche.

### III.3 - Analyse du contrôleur d'attitude en roulis

Dans cette sous-partie, on s'intéresse au réglage du contrôleur d'attitude en roulis dans le cas d'une commande en échelon sans perturbation. Puis, nous verrons comment se comporte le drone en roulis lors du passage de l'ouverture (ajout d'une perturbation) et enfin son comportement lors du repliement des bras. L'objectif est de s'assurer que le réglage du contrôleur d'attitude permet de conserver, dans une certaine mesure, le contrôle en roulis lors du passage de l'ouverture et lors du repliement/dépliage des bras.



**Figure 18** - Représentation simplifiée par schéma bloc de l'asservissement du drone en roulis, angle  $\theta_R$  en degrés

L'asservissement du drone en roulis, angle  $\theta_R$ , est représenté par le schéma bloc de la **figure 18**. Les performances de cet asservissement sont décrites par l'exigence Id 2 du diagramme des exigences donné en **figure 21 annexe 1**. Les grandeurs indiquées sur le schéma bloc de la **figure 18** représentent les transformées de Laplace des grandeurs obtenues pour des variations autour du point de fonctionnement  $\theta_R = 0^\circ$ . La vitesse de rotation du drone en roulis en deg/s est notée  $\Omega_R(p)$ . Le contrôleur d'attitude est un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  de sortie  $U(p)$  en incréments (inc). Le comportement de l'estimateur d'angle en roulis (composé d'un gyromètre, d'un accéléromètre et d'un système de traitement des signaux) est modélisé par un gain pur  $K_E$ , tel que  $K_E = 150 \text{ inc/deg}$ .

Le bloc adaptateur, de gain pur  $K_A = K_E$ , permet d'adapter la consigne de variation d'angle de roulis  $\theta_R^C(p)$  en degrés en une grandeur comparable à la mesure de l'estimateur d'angle de roulis.

La fonction de transfert  $H_S(p) = \frac{\Omega_R(p)}{U(p)}$  représente le comportement linéarisé autour d'un point de fonctionnement (vol d'approche à vitesse constante) du drone dans la position bras déplié  $\gamma_1 = 90^\circ$ . Ce comportement a été défini, entre autres, à partir des résultats des analyses des parties précédentes. On donne alors :

$$H_S(p) = \frac{K_S}{1 + \frac{2z_S}{\omega_{0S}}p + \frac{1}{\omega_{0S}^2}p^2}$$

avec :

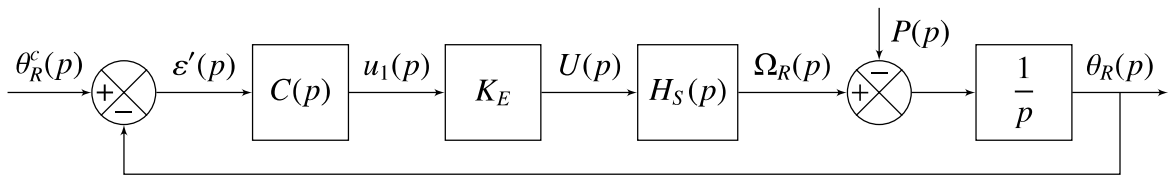
$$K_S = 1$$

$$z_S = 0.03$$

$$\omega_{0S} = 9,3 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$$

On cherche à valider l'utilisation d'un correcteur proportionnel du contrôleur d'attitude et on pose  $C(p) = K_P$ .

D'après les résultats des simulations, l'action proportionnelle du contrôleur d'attitude permettrait le respect des performances en roulis dans le cas de vol non perturbé. La prise en compte des perturbations est complexe à modéliser sur un tel système, aussi on considère en première approximation que les perturbations en vol contribuent à une variation de vitesse de roulis  $P(p)$ , modélisée par la suite comme une perturbation de type échelon d'amplitude  $P_0$  (**figure 19**).



**Figure 19** - Représentation par schéma bloc avec prise en compte des perturbations en vol

- Q33.** Déterminer l'expression de  $\theta_R(p)$  en fonction de  $\theta_R^c(p)$  et de  $P(p)$ . On rappelle que  $C(p) = K_P$  et  $H_S(p)$  est définie par l'équation (2).
- Q34.** Déterminer l'expression de la contribution de la perturbation de type échelon d'amplitude  $P_0$  sur la valeur de  $\theta_R(t)$  en régime établi dans le cas où la consigne est nulle  $\theta_R^c(t) = 0^\circ$ .
- Q35.** Quelle valeur donner à  $K_P$  pour respecter le critère de précision vis-à-vis de la perturbation ?

On donne sur le document réponse la réponse à un échelon unitaire en l'absence de perturbation et avec la valeur limite de  $K_P$  déterminée à la question **Q35**.

**Q36.** Ce correcteur, et avec cette valeur limite de  $K_P$ , permet-il de respecter les critères de stabilité et de rapidité de l'exigence id="2" ?



## Partie IV - Étude du capteur d'effort

**Objectif :** mettre en place le traitement des informations reçues des capteurs d'effort et les rendre utilisables (capteurs présentés sur la **figure 16**).

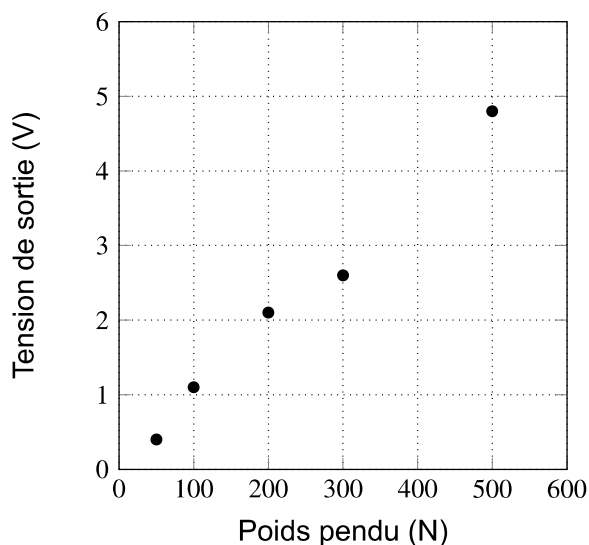
Dans cette partie, l'étalonnage du capteur, puis le filtrage de sa sortie seront analysés et, ensuite, les différentes données enregistrées lors d'un étalonnage seront exploitées.

### II.1 - Étalonnage

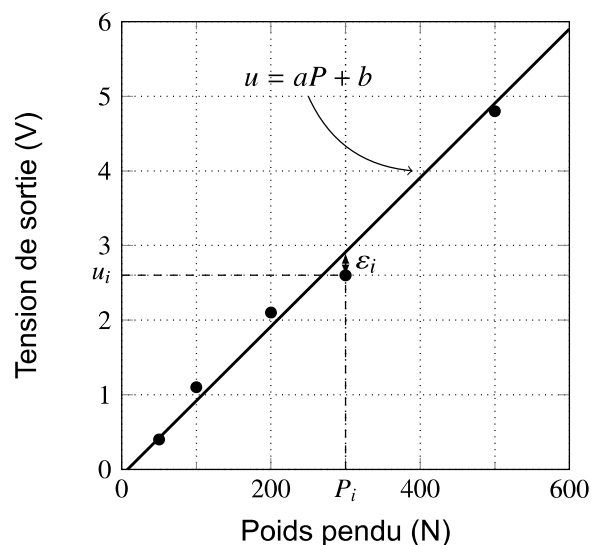
**Objectif :** déterminer le modèle de comportement du capteur

Un étalonnage permet d'obtenir la relation entre l'effort  $F_m$  et le signal de sortie du capteur. La **figure 20** présente les résultats d'un étalonnage réalisé en suspendant une masse sur le capteur. Ce graphique montre que la relation entre la tension de sortie du capteur et l'effort mesuré peut être approximée par une loi affine, qui sera considérée valide sur toute la plage d'utilisation. Il est donc proposé ici de programmer une régression linéaire.

Pour réaliser la régression linéaire, la méthode des moindres carrés sera utilisée. Elle consiste à modéliser au mieux les points expérimentaux par une droite (**figure 21**).



**Figure 20-** Résultat d'un étalonnage



**Figure 21-** Droite obtenue par la méthode des moindres carrés

L'équation de la droite sera notée  $u = aP + b$ . Pour chaque mesure, le poids pendu sera noté  $P_i$ , la tension mesurée  $u_i$  et l'écart entre la tension mesurée et la tension modélisée sera noté  $\varepsilon_i$  (**figure 21**).

Soit  $N$  le nombre de mesures réalisées pendant l'étalonnage ( $N = 5$  sur la **figure 21**), la méthode des moindres carrés consiste à trouver les valeurs de  $a$  et  $b$  qui minimisent le réel :

$$S = \sum_{i=0}^{i=N-1} \varepsilon_i^2.$$

**Q 37.** Donner l'expression de  $\varepsilon_i$  en fonction de  $a, b, P_i$  et de  $u_i$ .

La résolution de cette minimisation permet de trouver les expressions de  $a$  et  $b$  :

$$a = \frac{NS_{Pu} - S_P S_u}{NS_{PP} - S_P^2} \quad b = \frac{S_P S_{Pu} - S_u S_{PP}}{S_P^2 - NS_{PP}}$$

avec :

$$S_P = \sum_{i=0}^{i=N-1} P_i \quad S_u = \sum_{i=0}^{i=N-1} u_i \quad S_{PP} = \sum_{i=0}^{i=N-1} P_i^2 \quad S_{Pu} = \sum_{i=0}^{i=N-1} P_i u_i.$$

### Notations et hypothèses

- Les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot` ont été importées :  
`import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.
- Les poids  $P_i$  sont stockés dans un tableau `numpy` de longueur  $N$ , noté `P` :  
`P=np.array([P0,P1,...])`.
- Les tensions  $u_i$  sont stockées dans un tableau `numpy` de longueur  $N$ , noté `u` :  
`u=np.array([u0,u1,...])`.
- La longueur  $N$  n'est pas affectée.

### Fonctions de la bibliothèque `numpy`

- La fonction `np.dot(X,Y)` donne le produit matriciel ; lorsque  $X$  et  $Y$  sont deux tableaux de longueur  $N$ , `np.dot(X,Y)` a la même valeur que le produit scalaire entre  $X$  et  $Y$ .
- La fonction `np.sum(X)` donne la somme des éléments du tableau  $X$ .
- La fonction `np.ones(N)` donne un tableau `numpy` de longueur  $N$  où tous les éléments ont pour valeur 1.

**Q 38.** Proposer deux instructions permettant d'affecter les variables `SPP` puis `SPu` représentant  $S_{PP}$  et  $S_{Pu}$  en utilisant les tableaux `P` et `u`, les fonctions de `numpy` et sans faire de boucle.

**Q 39.** Proposer deux instructions permettant d'affecter les variables `SP` puis `Su` représentant  $S_P$  et  $S_u$  en utilisant les tableaux `P` et `u`, les fonctions de `numpy` et sans faire de boucle.

**Q 40.** Proposer des instructions permettant d'affecter les variables `a` puis `b` représentant  $a$  et  $b$  en utilisant les tableaux `P` et `u` et les variables précédemment définies.

**Q 41.** En considérant les variables `a` et `b` affectées, proposer des instructions permettant de tracer uniquement les points et la droite de la **figure 21**. Dans la fonction `plot`, l'argument supplémentaire `'o'` permet de ne pas relier les points par une droite.

## II.2 - Filtrage de la tension de sortie du capteur

**Objectif :** analyser deux types de filtre

Comme le montre la **figure 22**, la tension de sortie du capteur est bruitée. Afin d'améliorer le comportement, un filtrage de la sortie du capteur est nécessaire. Deux méthodes de filtrage vont être programmées : la moyenne glissante et le filtre passe-bas.

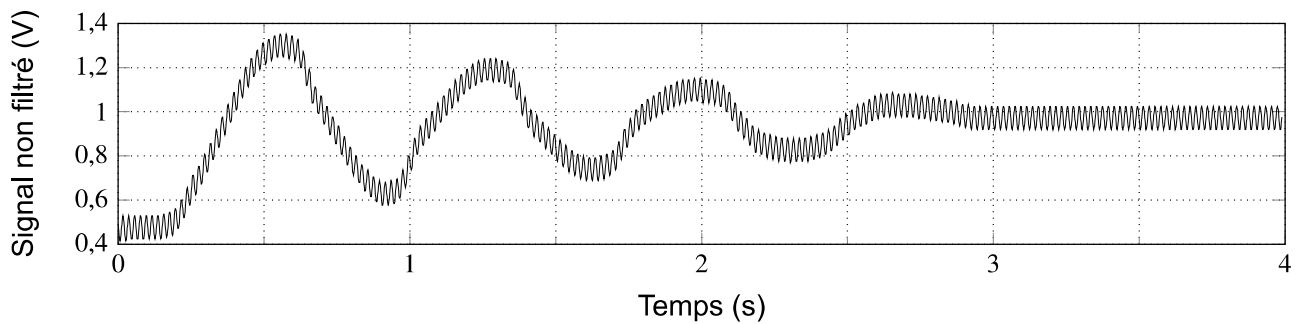


Figure 22 - Signal brut du capteur

### Notations et hypothèses

Les notations et hypothèses précédentes sont complétées par :

- les tensions filtrées  $u_i^f$  sont stockées dans un tableau numpy de longueur  $N$ , noté `uf` :  
`uf=np.array([uf0,uf1,...])` ;
- les instants  $t_i$  sont stockés dans un tableau numpy de longueur  $N$ , noté `temps` :  
`temps=np.array([t0,t1,...])`.

#### II.2.1 - Filtrage par moyenne glissante

Cette méthode consiste à prendre la moyenne des mesures précédentes.  $n$  est le nombre de mesures utilisées pour calculer la moyenne. Il est appelé ordre de la moyenne glissante. La moyenne glissante s'obtient alors par :

$$\text{si } i < n - 1, u_i^f = \sum_{k=0}^{k=i} \frac{u_k}{i + 1} \quad \text{ou} \quad \text{si } i \geq n - 1, u_i^f = \sum_{k=i-n+1}^{k=i} \frac{u_k}{n}.$$

document réponse

**Q42.** Compléter le tableau du  $\nabla$  en utilisant la méthode de la moyenne glissante pour  $n = 3$  avec le tableau `u` donné contenant 5 éléments.

Compléter

**Q43.** Compléter la fonction `filtre_mg(u,n)` qui prend pour argument `u`, un tableau de mesures à filtrer et `n` l'ordre de la moyenne glissante et renvoie un tableau de mesures filtrées par cette méthode.

La figure 23 présente le résultat du filtrage par la moyenne glissante pour différentes valeurs de  $n$ .

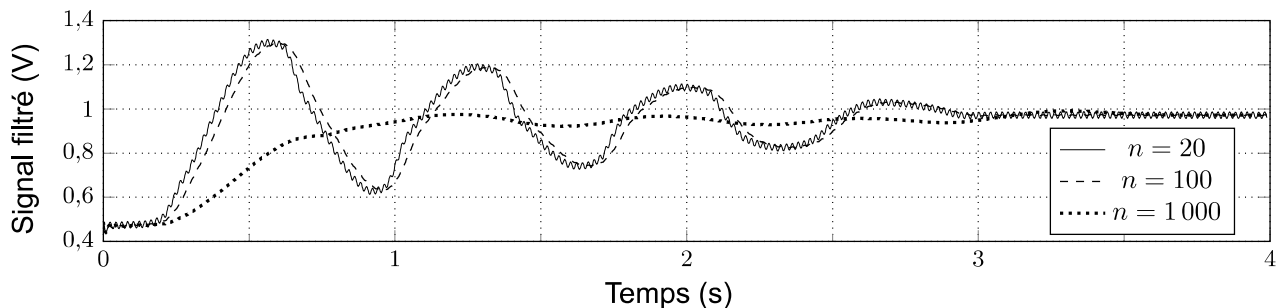


Figure 23 - Signal filtré par la méthode de la moyenne glissante pour différents ordres

**Q44.** Quelle est l'influence de l'ordre  $n$  sur la qualité du filtrage ?

## II.2.2 - Filtrage par filtre passe-bas

Dans le cas d'un filtre passe-bas d'ordre 1, cette méthode revient à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{du_f(t)}{dt} + u_f(t) = u(t)$$

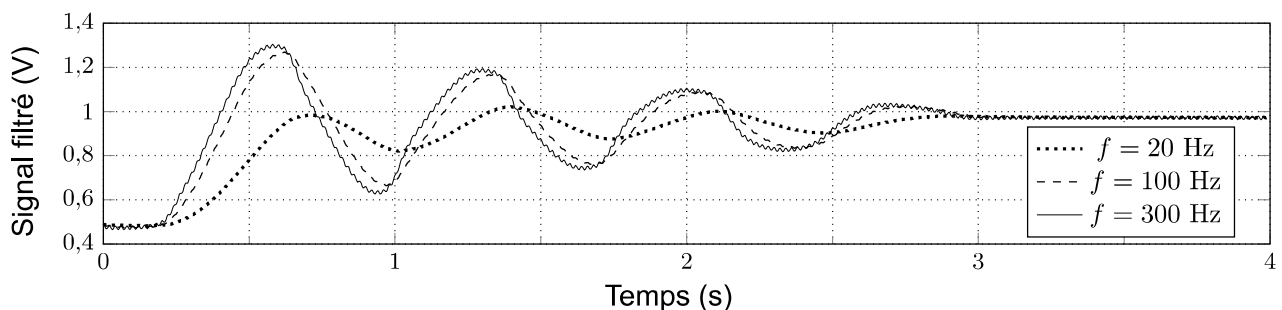
où  $f = \frac{1}{2\pi\tau}$  est la fréquence de coupure,  $u(t)$  est le signal à filtrer,  $u_f(t)$  le signal filtré et  $t$  le temps.

**Q45.** Donner l'expression de  $u_{i+1}^f$  en fonction de  $u_i^f$ ,  $u_i$ ,  $t_{i+1}$ ,  $t_i$  et de  $\tau$  en utilisant la méthode d'Euler explicite. Proposer une valeur pour  $u_0^f$ .

Compléter

**Q46.** la fonction `filtre_pb(u, temps, f)` qui prend pour argument un tableau `u` des mesures à filtrer, un tableau `temps`, de même dimension, représentant le temps et `f` la fréquence de coupure du filtre passe-bas et qui renvoie un tableau des mesures filtrées par cette méthode.

La **figure 24** présente le résultat du filtrage passe-bas pour différentes valeurs de  $f$ .

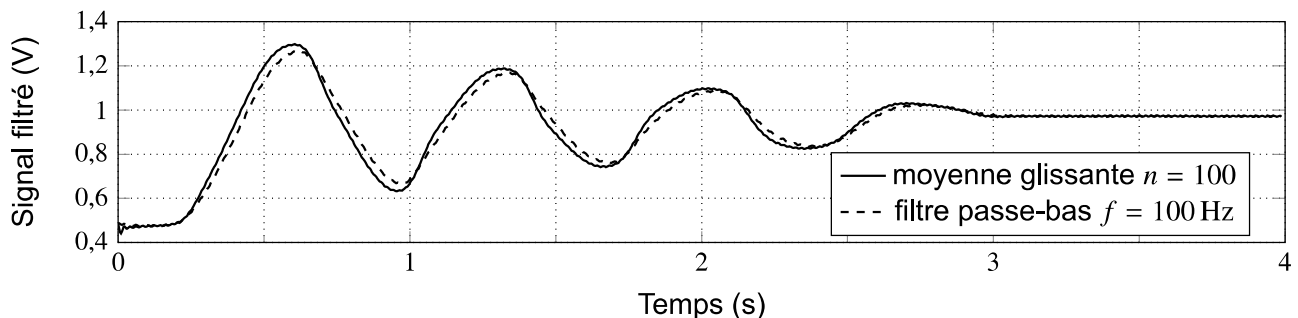


**Figure 24** - Signal filtré par un filtre passe-bas pour différentes fréquences de coupure

**Q47.** Quelle est l'influence de la fréquence de coupure  $f$  sur la qualité du filtrage ?

## II.2.3 - Comparaison des méthodes

La **figure 25** montre le résultat du filtrage par les deux méthodes vues précédemment.



**Figure 25** - Signal filtré par les deux méthodes

**Q48.** Comparer la complexité temporelle asymptotique des deux méthodes.

# ANNEXE 1

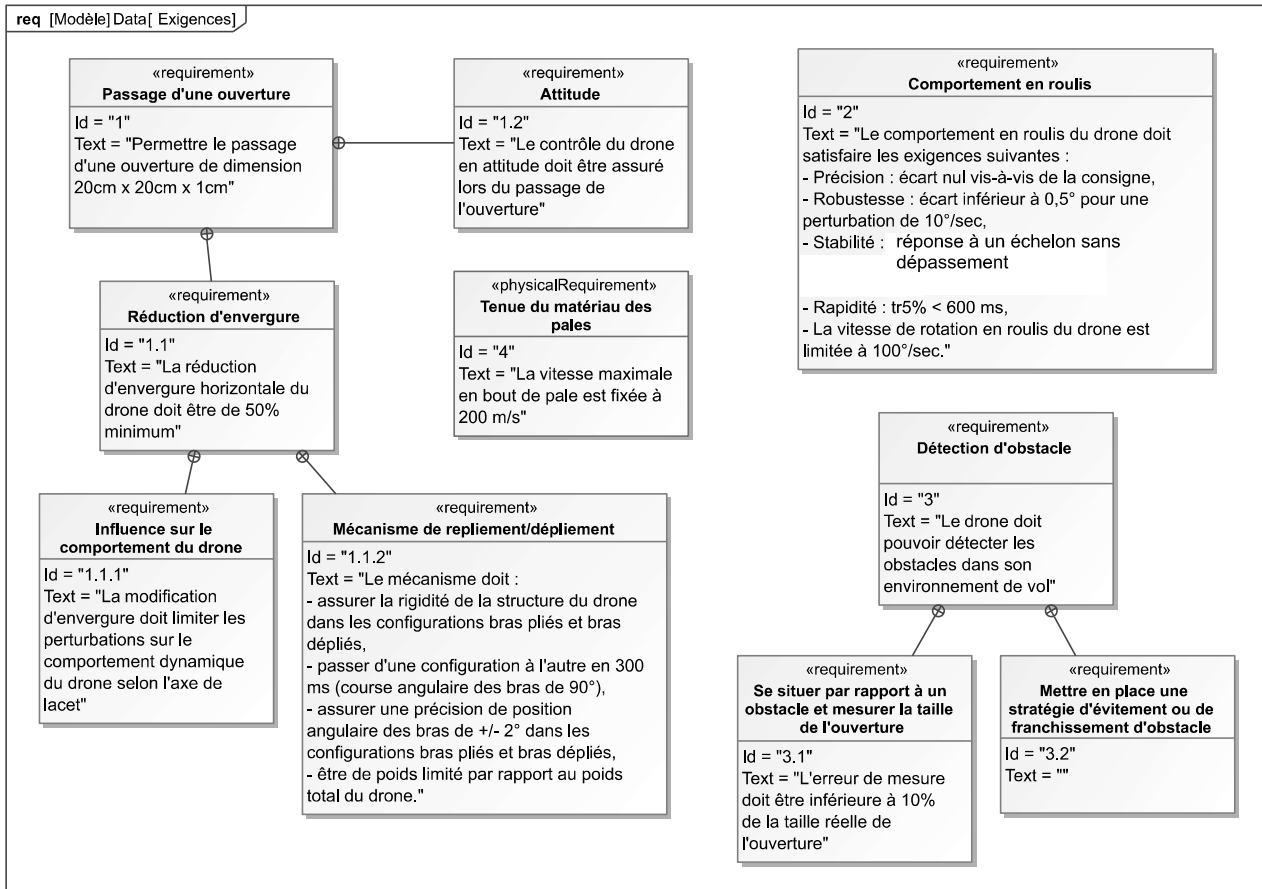


Figure 21 - Diagramme partiel des exigences liées au passage de l'ouverture de la plateforme QuadMorphing

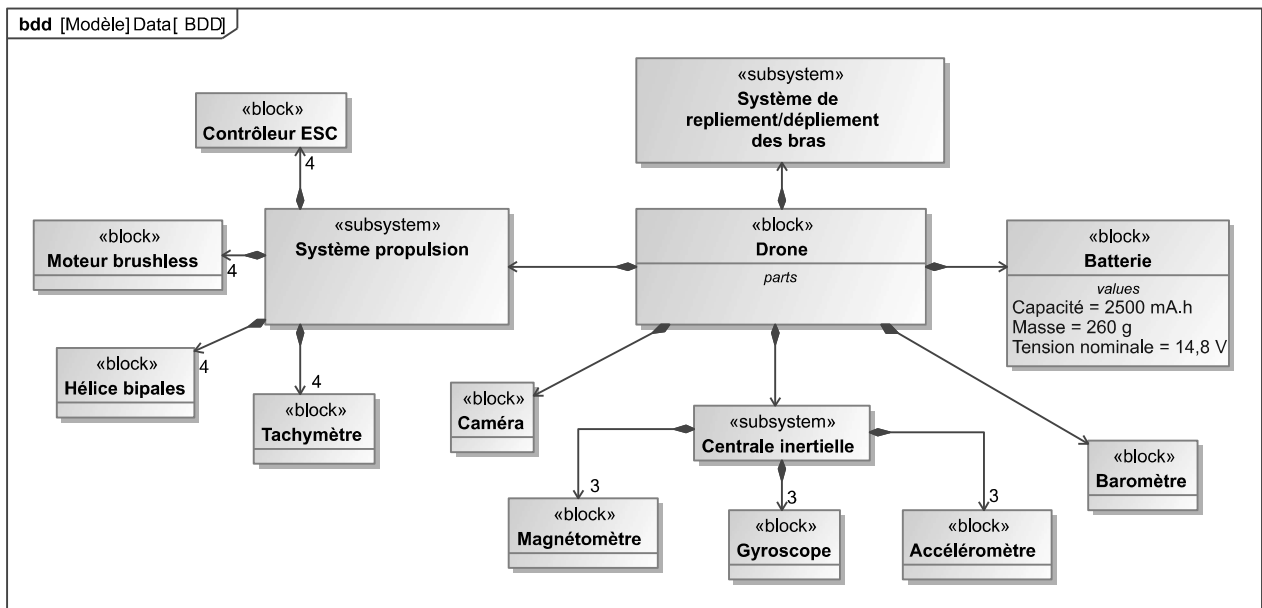


Figure 22 - Diagramme de définition des blocs de la plateforme QuadMorphing.

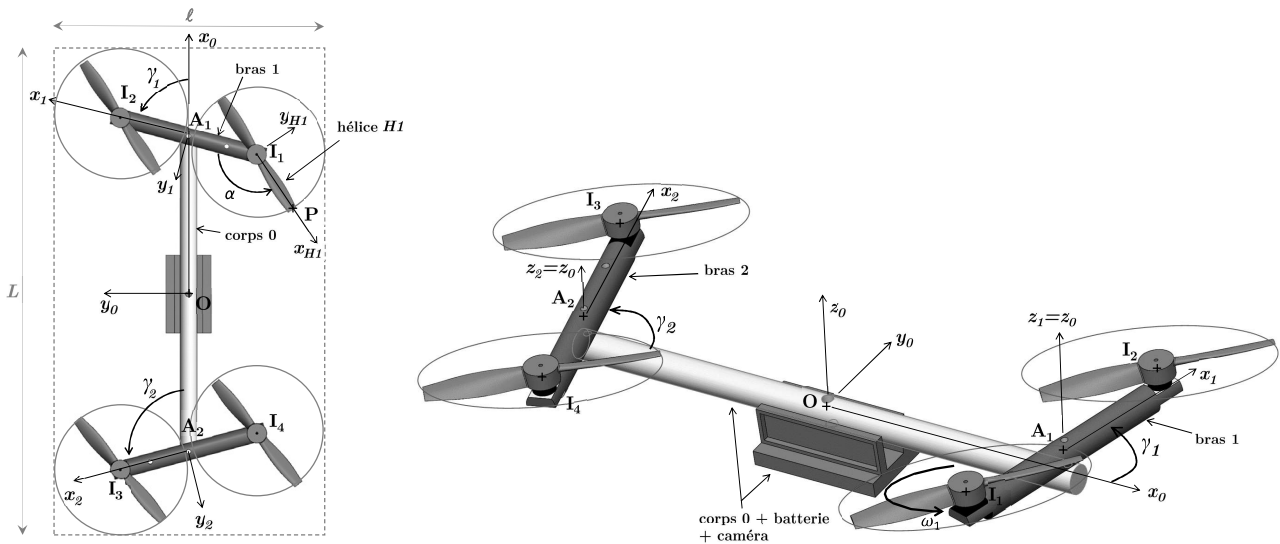


## ANNEXE 2

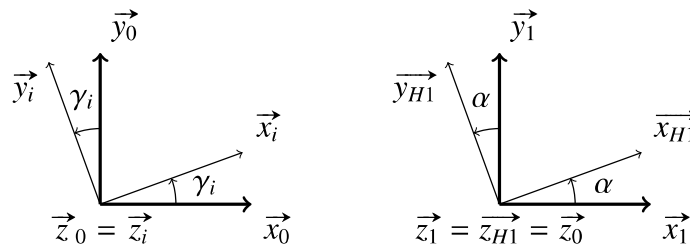
### Notations

La base  $\mathcal{B}_0$  associée au repère  $\mathcal{R}_0$  est notée  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Il en est de même pour le repère  $\mathcal{R}_1$  associé au bras 1 et pour le repère  $\mathcal{R}_{H1}$  associé à l'hélice  $H1$ . On note :

- $\ell$  et  $L$ , respectivement la largeur et la longueur du parallélépipède rectangle englobant la totalité du drone (représenté en pointillés sur la **figure 23**), de hauteur  $h = 115$  mm, constante quelle que soit la configuration du drone ;
- $L_0 = 280$  mm, la longueur du corps 0 ;
- $\vec{OA}_1 = \frac{L_0}{2}\vec{x}_0 + \frac{h}{4}\vec{z}_0$  ;
- $L_1 = 140$  mm, la longueur du bras 1 ;
- $\vec{I_1A_1} = \frac{L_1}{2}\vec{x}_1 - \frac{h}{4}\vec{z}_0$ ,
- $r_h = 64$  mm, la longueur d'une pale de l'hélice ;
- $\vec{I_1P} = r_h\vec{x}_{H1}$  pour l'hélice  $H1$ .



**Figure 23** - Vue de dessus et en perspective du drone en phase de repliement et paramétrage de la géométrie



**Figure 24** - Figures planes du paramétrage du bras  $i$  par rapport au corps 0 du drone et de l'hélice  $H1$  par rapport au bras 1 du drone

## ANNEXE 3

Les matrices d'inerties des principaux éléments du drone, dont la géométrie a été simplifiée pour cette étude, sont données ci-dessous, chacune dans la base principale d'inertie :

Pour le corps 0, de centre d'inertie  $O$  et de masse  $m_c$  :

$$\mathbb{I}_0(O) = \begin{pmatrix} I_{cx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{cy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{cz} \end{pmatrix}_{(O, \mathcal{B}_0)} .$$

Pour le bras 1, de centre d'inertie  $A_1$  et de masse  $m_b$  :

$$\mathbb{I}_1(A_1) = \begin{pmatrix} I_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{by} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bz} \end{pmatrix}_{(A_1, \mathcal{B}_1)} .$$

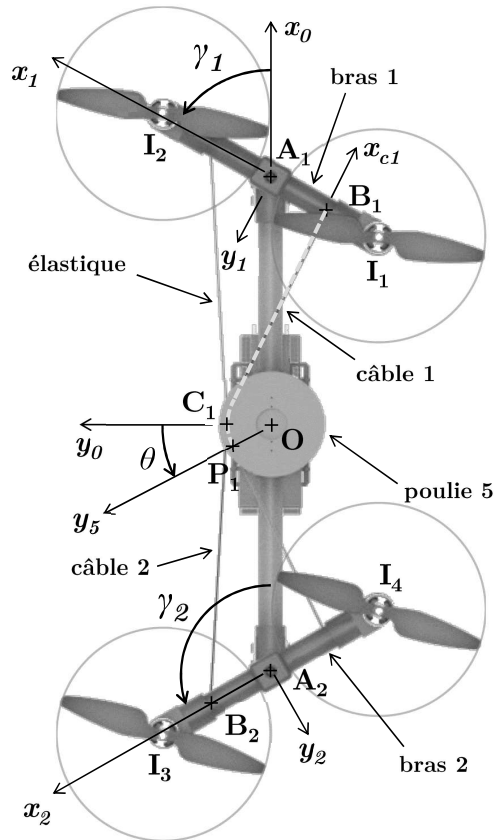
Pour le bras 2, de centre d'inertie  $A_2$  et de masse  $m_b$  :

$$\mathbb{I}_2(A_2) = \begin{pmatrix} I_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{by} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bz} \end{pmatrix}_{(A_2, \mathcal{B}_2)} .$$

Pour chaque hélice  $Hi$  ( $i = 1$  à  $4$ ), de centre d'inertie  $I_i$  et de masse  $m_h$ , le moment d'inertie selon l'axe  $(I_i, z_0)$  est noté  $I_{hz}$ .

On note  $\Sigma$  l'ensemble constitué des principaux éléments du drone, tel que  $\Sigma = \left\{ 0 + 1 + 2 + \sum_{i=1}^4 Hi \right\}$ .

## ANNEXE 4



**Figure 25 - Mécanisme de mise en mouvement du bras**

### Notations

- l'orientation de la poulie 5 par rapport au corps du drone 0 est paramétrée par l'angle  $\theta(t)$  tel que :  $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5)$  ;
- le rayon d'enroulement du câble métallique 1 sur la poulie 5 est noté  $R_1$ , avec  $R_1 = 30$  mm. Ce rayon d'enroulement correspond à la distance  $OC_1$ , tel que  $\vec{OC}_1 = R_1\vec{y}_0$  ;
- en première approximation et afin de simplifier la géométrie pour l'étude de la loi entrée / sortie de ce mécanisme, on considère la longueur  $B_1C_1$  telle que  $\vec{C}_1B_1 = L_{c1}(\theta)\vec{x}_{c1}$ , avec  $L_{c1}(\theta) = L_{c1}^{init} - R_1\theta$ . La grandeur  $L_{c1}^{init}$  correspond à la distance  $B_1C_1$  pour  $\gamma_1 = 90^\circ$ , on a alors le point  $P_1$  confondu avec  $C_1$  et  $\theta = 0^\circ$  ;
- la distance du point d'accroche  $B_1$  du câble métallique 1 sur le bras 1 est notée  $a_1$  telle que  $\vec{A}_1B_1 = -a_1\vec{x}_1$ , avec  $a_1 = 40$  mm ;
- la distance du point d'accroche  $B_2$  du câble métallique 2 sur le bras 2 est notée  $a_2$  telle que  $\vec{A}_2B_2 = a_2\vec{x}_2$ , avec  $a_2 = a_1 = 40$  mm ;
- on rappelle que  $\vec{OA}_1 = \frac{L_0}{2}\vec{x}_0$ , avec  $L_0 = 280$  mm.

On considère la position initiale du mécanisme, en configuration bras dépliés, telle que  $\gamma_1 = 90^\circ$  et  $\gamma_2 = 90^\circ$  et donc  $\theta = 0^\circ$ . On a alors  $L_{c1}(\theta = 0^\circ) = L_{c1}^{init}$  et  $L_{c2}(\theta = 0^\circ) = L_{c2}^{init}$ .

La position finale du mécanisme est la position pour laquelle les bras sont alignés avec la direction prépondérante du drone, c'est-à-dire pour  $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$  et  $\vec{x}_2 = -\vec{x}_0$ . On a alors  $\gamma_1 = 0^\circ$ ,  $\gamma_2 = 180^\circ$  et  $\theta = \Delta\theta$ , où  $\Delta\theta$  est la course angulaire de la poulie avec  $L_{c1}(\Delta\theta) = L_{c1}^{final}$  et  $L_{c2}(\Delta\theta) = L_{c2}^{final}$ .