Centre d'intérêt 1 : Dynamique et énergétique

Problème d'application du principe fondamental de la dynamique

Équilibrage des solides en rotation

PSI - MP : Lycée Rabelais

Position du problème

Dans de nombreux systèmes techniques, des pièces sont en rotation (roue de voiture, réacteur d'avion, vilebrequin, etc...). Une mauvaise répartition de la masse autour de l'axe de rotation peut provoquer des vibrations importantes voir même des ruptures.

Pour éviter ces problèmes, il est nécessaire que l'ensemble en rotation soit *équilibré* afin que les actions mécaniques dans les liaisons soient de direction constante. La résolution de ce problème est l'objectif de ce complément de cours.

Le support de cet étude est un banc d'équilibrage *FACOM* présent dans la plupart des garages. Cet appareil permet de placer des masselottes, de masse judicieusement choisie, sur la jante afin d'équilibrer la roue.

FIGURE 1 – Machine d'équilibrage *FACOM*

L'équilibreuse est constituée d'un arbre 1 guidé en rotation par une liaison pivot avec le bâti d'axe $(O,\overrightarrow{x_0})$. Cette liaison est équipée de capteurs afin de permettre l'enregistrement des composantes de la résultante et du moment de la liaison.

Le repère $R_0(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ est lié au bâti 0 ($\overrightarrow{y_0}$ est la verticale ascendante).

Le repère $R_1(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ est lié à l'arbre 1. On pose $\theta=(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1})=(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_1})$ et $\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_1}$ avec $\dot{\theta}=\omega=$ constante. Cela signifie que, durant l'essai, on fait tourner la roue à vitesse de rotation constante.

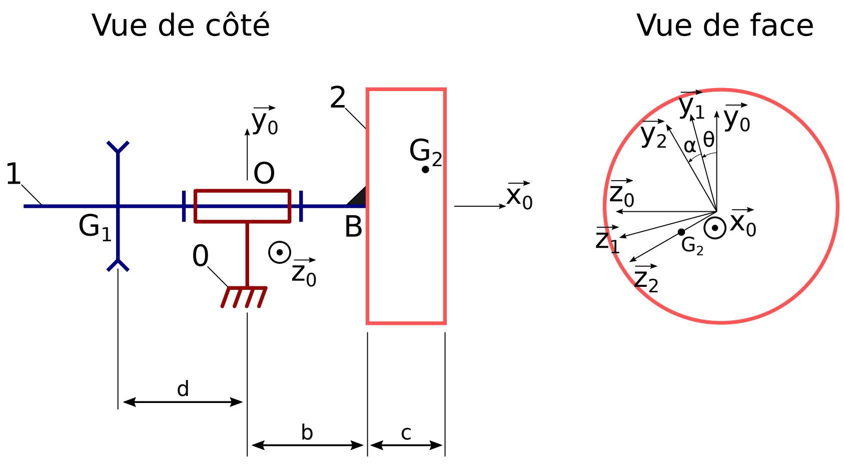


FIGURE 2 – Modèle associé

L'arbre 1 est entraîné en rotation par une poulie fixée au centre d'inertie G_1 de l'arbre 1. Le torseur d'action mécanique de la courroie sur la poulie est de la forme :

$$\{\text{courroie} \rightarrow 1\} = {}_{B}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\,\overrightarrow{x_0} \end{array} \right.$$

L'arbre 1 est de masse négligeable comparativement à la roue étudiée.

La roue 2, que l'on souhaite équilibrer, est encastrée sur l'arbre 1. Le repère $R_2(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ est lié à cette roue 2 avec un angle **constant** $\alpha = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$ avec $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$. Cependant, **cet angle est inconnu**. La roue 2, de masse m_2, a pour centre d'inertie G_2 dont la position est paramétrée de la manière suivante : $\overrightarrow{BG_2} = h\,\overrightarrow{x_0} + a\,\overrightarrow{z_2}$. h **et** a **sont des inconnues : cela signifie qu'on ne connaît pas la position du centre d'inertie de la roue**. La matrice d'inertie en B de la roue 2 dans la base R_2 est la suivante :

$$I_B(2) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_2}$$

Conditions d'équilibrage de la roue

Une roue est dite équilibrée si sa rotation, à vitesse constante, n'entraîne pas de vibration. Cela signifie que, dans ces conditions, les composantes des actions mécaniques de liaison sont constantes dans le temps.

On notera dans la suite le torseur de l'action de liaison de 0 sur 1 :

$$\{0 \rightarrow 1\} = {}_{B}\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{0\rightarrow 1} = X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} + Z_{01}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M}_{B,0\rightarrow 1} = M_{01}\overrightarrow{y_0} + N_{01}\overrightarrow{z_0} \end{array} \right.$$

Question 1 : Montrer que l'écriture du principe fondamental de la dynamique associé à l'isolement de l'ensemble {1, 2} mène au système d'équations suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & + & X_{01} & + & 0 & = & 0 \\
-m_2 \cdot g & + & Y_{01} & + & 0 & = & m_2 \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha+\theta) \\
0 & + & Z_{01} & + & 0 & = & -m_2 \cdot a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha+\theta) \\
a \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha+\theta) & + & 0 & + & C_m & = & 0 \\
0 & + & M_{01} & + & 0 & = & F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha+\theta) + E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha+\theta) \\
-h \cdot m_2 \cdot g & + & N_{01} & + & 0 & = & -F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\alpha+\theta) + E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\alpha+\theta)
\end{array}
$$

Question 2 : En supposant que $\theta(0\text{ s}) = 0$ rad, déterminer alors $\theta(t)$ en fonction de ω.

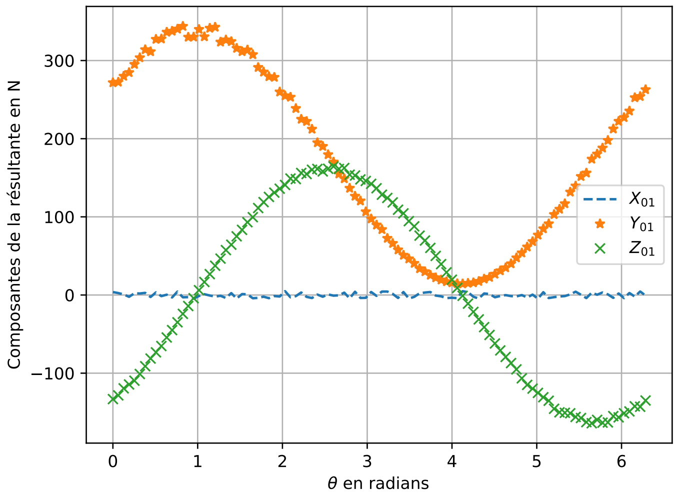
a. Tracer l'allure de Z_{01} en fonction du temps.

b. En déduire la condition d'équilibrage sur a. Expliquer le sens physique de ce résultat.

Question 3 : En déduire deux autres conditions d'équilibrage portant sur la matrice d'inertie.

Exploitation d'une mesure d'équilibrage

Les capteurs associés à la liaison pivot donnent les résultats suivants :



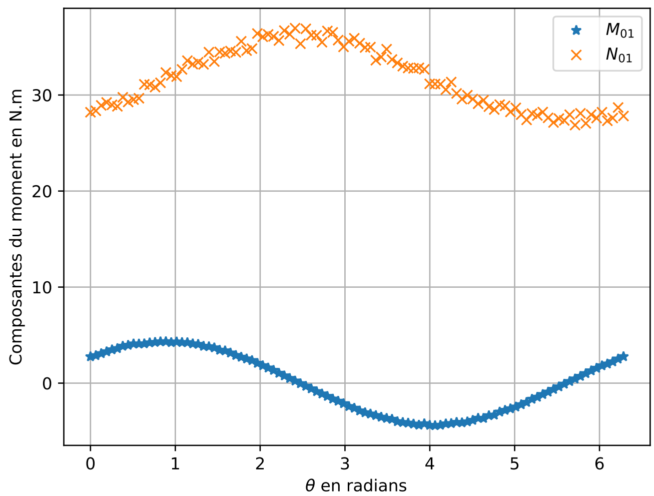


FIGURE 3 – Résultat expérimental obtenu sur une machine d'équilibrage *FACOM*

On donne également les valeurs suivantes : $\dot{\theta} = 60$ rad/s ; $m_2 = 18$ kg et $b = 80$ mm.

Question 4 :

a. Montrer, en supposant que $a > 0$, que Z_{01} est maximal pour $\theta = \pi - \alpha$. En déduire la valeur de α.

b. En utilisant la valeur maximale de Z_{01}, déterminer a.

c. Montrer que $M_{01}(\theta = \pi - \alpha) = -E.\dot{\theta}^2$ et que $M_{01}(\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha) = F.\dot{\theta}^2$.

d. En déduire les valeurs numériques de E et F.

On prendra pour la suite :

$$\alpha = 50° \qquad a = 2,5 \text{ mm} \qquad E = 0 \text{ kg.m}^2 \qquad F = 1,0.10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

Équilibrage de la roue

La roue sera équilibrée avec deux masselottes 3 et 4, assimilables à deux points matériels M_3 et M_4 respectivement de masse m_3 et m_4 situées de part et d'autre de la jante, de telle sorte que :

$$\overrightarrow{BM_3} = r\,\overrightarrow{u_3} \text{ et } \overrightarrow{BM_4} = c\,\overrightarrow{x_0} + r\,\overrightarrow{u_4},\ r \text{ est le rayon de la jante et } \overrightarrow{u_i} \text{ est orienté par l'angle } \beta_i = (\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{u_i}).$$

Avec, compte-tenu de la géométrie de la roue : $r = 190$ mm et $c = 180$ mm.

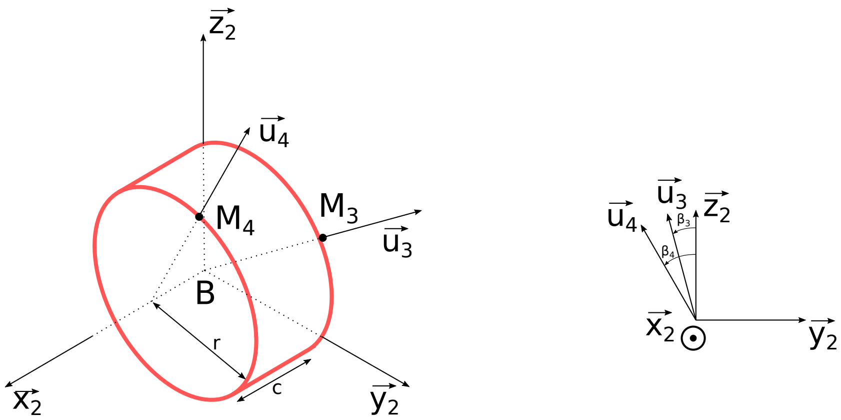


FIGURE 4 – Mise en place des masselottes

Question 5 : Donner les conditions d'équilibrage de la roue puis déterminer les équations que doivent respecter m_3, m_4, β_3 et β_4 afin d'équilibrer la roue.

Question 6 : En déduire les valeurs numériques de ces paramètres.