

Intégration numérique

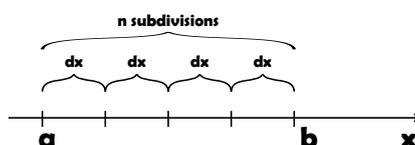
PSI - MP : Lycée Rabelais

On cherche à intégrer numériquement une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. Cela revient donc à calculer l'aire sous la courbe représentant la fonction. On cherche donc I telle que :

$$I = \int_a^b f(x).dx$$

Il existe plusieurs méthodes d'approximation. On notera dans la suite n , le nombre de subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et dx le "petit" segment résultant de cette subdivision. On a donc :

$$dx = \frac{b-a}{n}$$

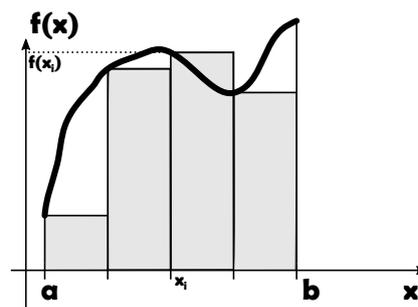


1 Méthode des rectangles

1.1 Méthode des rectangles "à gauche" ou "arrière"

Elle revient à réaliser l'approximation suivante :

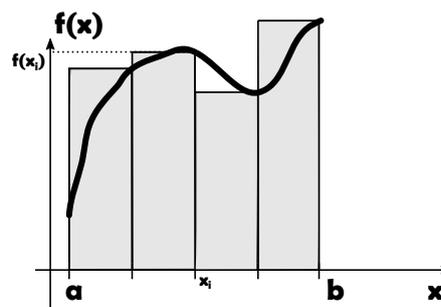
$$I \approx I_g \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).dx \quad \text{avec } x_i = a + i.dx$$



1.2 Méthode des rectangles "à droite" ou "avant"

Elle revient à réaliser l'approximation suivante :

$$I \approx I_d \approx \sum_{i=1}^n f(x_i).dx \quad \text{avec } x_i = a + i.dx$$

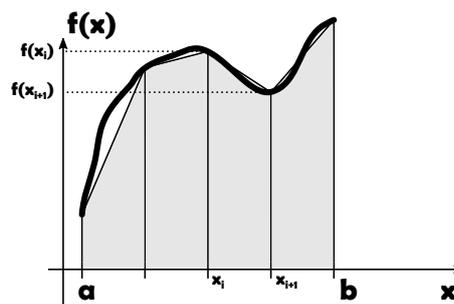


2 Méthode des trapèzes

Dans cette approximation, on a :

$$I \approx I_t \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot dx \quad \text{avec } x_i = a + i.dx$$

On pourra remarquer que $I_t = \frac{I_g + I_d}{2}$



Exercice d'application

On définit la fonction f telle que : $f(x) = \cos(x)$. On veut calculer l'intégrale I telle que :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x).dx$$

Question 1. Définir la fonction $f(x)$.

Question 2. Représenter cette fonction pour sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On pourra s'aider des instructions ci-dessous :

```
1 | import numpy as np
2 | import matplotlib.pyplot as plt
3 |
4 | a = 0
5 | b = np.pi/4
6 | n = 100 ## nombre de subdivisions
7 |
8 | def f(x):
9 |     ....
10 |
11 | lx = [i*dx for i in range(0, ..... )] ## lx est la liste des xi
12 |
13 | lf = [..... for xi in lx]
14 |
15 | plt.plot(..... , .....)
```

Question 3. Calculer l'intégrale I par :

- la méthode des rectangles "arrières" ;
- la méthode des rectangles "avants" ;
- la méthode des trapèzes.

On pourra s'aider des instructions suivantes :

```
1 | Ig = 0
2 |
3 | for i in range(.....):
4 |     ....
5 | print('Ig =', Ig)
```