Centre d'intérêt 6

Résolution d'équations différentielles

PSI - MP : Lycée Rabelais

1 Contexte mathématique

On peut montrer que toute équation différentielle sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$Y'(t) = \mathscr{F}(Y(t), t)$$

Avec :

- Y la fonction inconnue de I dans $\mathbb{R}^n$. Dans le cas général, Y est bien un vecteur. Dans le cas d'une équation différentielle "ordinaire" d'ordre 1, Y est un scalaire.
- et $\mathscr{F}$, une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui à $Y(t)$ et t associe une valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Pour une résolution numérique, on discrétise l'intervalle I en n subdivisions de longueur dt (le **pas** de la discrétisation). On notera t_k la k-ième discrétisation de t de telle sorte que $t_k = k \cdot \mathrm{dt} + t_0$ où t_0 est le temps "initial".

On notera également Y_k l'approximation de $Y(t_k)$. Y_0 sera le vecteur contenant les conditions initiales de telle sorte que $Y(t_0) = Y_0$.

En faisant l'approximation d'Euler : $Y'(t_k) \approx \dfrac{Y(t_{k+1}) - Y(t_k)}{\mathrm{dt}}$, on montre la relation de récurrente ci-dessous qui permet de calculer tous les Y_k à partir de Y_0 :

$$Y_{k+1} = Y_k + \mathrm{dt} \cdot F(Y(t_k), t_k)$$

2 Mise en œuvre sur `Python`

Sur `Python`, de nombreuses bibliothèques permettent de résoudre ce type de problème. Nous utiliserons ici le module `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`. Cette bibliothèque utilise une approximation plus fine que celle d'Euler mais le concept est le même.
Pour résoudre une équation différentielle avec ce module, il faudra donc écrire `tab_sol = odeint(F,Y0,tab_t)` où :

- `tab_sol` est le tableau contenant la solution (tous les Y_k) ;
- `F` est la fonction $\mathscr{F}$ définie précédemment qui prendra en argument `Y` (correspondant à Y_k) et `t` (correspondant au temps t_k) ;
- `Y0` est le vecteur conditions initiales ;
- `tab_t` est le tableau des temps (t_k) issus de la discrétisation (s'obtient facilement avec `np.linspace(debut,fin,nb de points)`).

Le code fourni ci-dessous à titre d'exemple permet de résoudre l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $I = [t_0, t_f] = [0, 10]$:

$$y'(t) = -2 \cdot t \cdot y(t) + \cos(t) \text{ et } y(0) = 1$$

Ce qui équivaut à :

$$y'(t) = \mathscr{F}(y(t), t) \text{ et } y(0) = 1$$

$$\text{avec } \mathscr{F}(y(t), t) = -2 \cdot t \cdot y(t) + \cos(t)$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def F(Y,t):
    return - 2*t*Y + np.cos(t)

t0 = 0
tf = 10.
n = 500 ## nb de subdivisions
Y0 = 1

tab_t = np.linspace(t0,tf,n+1)
tab_sol=odeint(F,Y0,tab_t)
plt.plot(tab_t,tab_sol)
```

Exercices d'application

Exercice n°1

Résoudre, sur l'intervalle $[0,5]$, l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) + 5 \cdot x(t) \cdot \sin(x(t)) = \frac{1}{x(t)} \;\text{ et }\; x(0) = 2$$

Exercice n°2

On pose $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. On veut résoudre, sur l'intervalle $[0,1]$, le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{array}{r} u'(t) + \cos(v(t)) + \cos(t) = 0 \\ v'(t) + \sin(u(t)) + \sin(t) = 0 \end{array} \;\text{ avec }\; u(0) = 2 \;\text{ et }\; v(0) = 4$$

Q1. Déterminer la fonction $\mathscr{F}$ et Y_0 tels que le système d'équations différentielles s'écrive :

$$Y'(t) = \mathscr{F}(Y(t), t) \;\text{ avec }\; Y(0) = Y_0$$

Q2. Résoudre l'équation différentielle numériquement puis tracer la courbe paramétrée représentant les points $M(u, v)$.

Exercice n°3 : Balançoire sous oscillations forcées

On considère une balançoire de moment d'inertie $J = 90$ kg.m^2, de masse $m = 10$ kg et suspendue à un portique avec une corde de longueur $L = 3$ m. On exerce, par intermittence, un couple sur la balançoire d'intensité $C = 50$ N.m. On note θ l'angle entre la corde et la verticale. On prendra $g = 9.81$ m/s^2.

Les conditions initiales sont $\theta(0) = 0.1$ et $\dot{\theta}(0) = 0$

L'étude dynamique mène à l'équation suivante :

$$\begin{array}{l} J \cdot \ddot{\theta}(t) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta(t)) = C \;\text{ si }\; \theta(t) \leq 0 \;\text{ et }\; \dot{\theta}(t) \geq 0 \\ J \cdot \ddot{\theta}(t) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta(t)) = 0 \;\text{ sinon.} \end{array}$$

Q1. On introduit le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$. Mettre le problème sous la forme :

$$\dot{Y}(t) = \mathscr{F}(Y(t), t) \;\text{ avec }\; Y(0) = Y_0$$

Q2. Résoudre l'équation différentielle numériquement puis tracer l'évolution de θ en fonction du temps entre $t = 0$ et $t = 60$ secondes. Commenter.

Q3. Que se passe-t-il si on lance une simulation pendant 120 secondes.