Filtrage numérique

PSI - MP : Lycée Rabelais

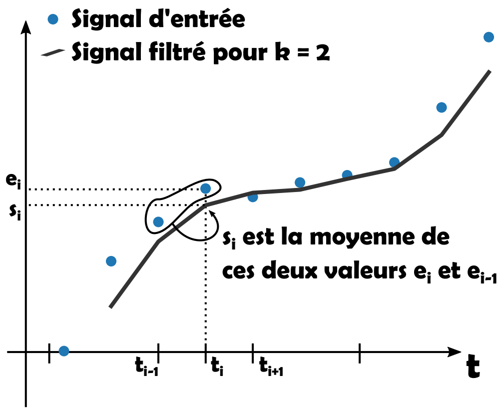
On s'intéresse ici aux signaux obtenus par des capteurs puis à leur filtrage. Le vocabulaire suivant, propre à la mesure, est à connaitre :

- **Incertitudes** : elles caractérisent la dispersion des valeurs attribuées à une mesure ;
- **Résolution** : plus petite mesure que l'on peut réaliser avec le capteur ;
- **Quantification** : plus petite grandeur que l'on peut quantifier avec un codage numérique donné ;
- **Échantillonnage** : action qui consiste à prélever les valeurs d'un signal à intervalles définis, généralement réguliers ;
- **Justesse** : aptitude d'un capteur à mesurer, en moyenne, la valeur attendue ;
- **Fidélité** : aptitude d'un capteur à mesurer la même valeur pour une même grandeur (mais pas nécessairement la bonne) ;
- **Linéarité** : capacité d'un capteur à fournir un signal proportionnel à la grandeur mesurée ;
- **Sensibilité** : paramètre exprimant la variation du signal de sortie d'un appareil de mesure en fonction de la variation du signal d'entrée.

On présente ici plusieurs méthodes de filtrage de signaux. On considère un signal d'entrée $\mathscr{E}$ dont on dispose des valeurs échantillonnées $e_i = \mathscr{E}(t_i)$ pour tous les temps t_i. On note également $s_i = \mathscr{S}(t_i)$, le signal de sortie à l'instant t_i.

1 Filtre à moyenne glissante

Un filtre à moyenne glissante sur k valeurs consiste à renvoyer, en sortie du filtre et au temps t_i, la moyenne des k échantillons de $\mathscr{S}$ précédant le temps t_i.



On aura donc :

$$\mathscr{S}(t_i) = s_i = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=i-k+1}^{i} e_j = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=i-k+1}^{i} \mathscr{E}(t_i)$$

Bien entendu, avec un tel filtre, on perd les k premières valeurs du signal d'entrée.

2 Filtre avec fonction de transfert

On note $F(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$ la fonction de transfert du filtre reliant la sortie $\mathscr{S}$ à l'entrée $\mathscr{E}$. Pour obtenir, l'équation de récurrence entre la sortie et l'entrée, il faut réécrire l'équation $S(p) = F(p) \cdot E(p)$ dans le domaine temporel.

2.1 Filtre passe-bas du premier ordre : $F(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1+\tau \cdot p}$

On a ici $\tau \cdot \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t}(t) + \mathscr{S}(t) = \mathscr{E}(t)$ ce qui donne $\tau \cdot \dfrac{s_i - s_{i-1}}{\mathrm{Te}} + s_i = e_i$ avec Te la période d'échantillonnage. Ce qui permet donc d'écrire :

$$s_i = \frac{\mathrm{Te}}{\mathrm{Te}+\tau} \cdot e_i + \frac{\tau}{\mathrm{Te}+\tau} \cdot s_{i-1}$$

2.2 Filtre passe-bas du deuxième ordre : $F(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \dfrac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$

Ici, il faut suivre la même méthode en remarquant que $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathscr{S}}{\mathrm{d}t^2}(t_i) \approx \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t}(t_i) - \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t}(t_{i-1})}{\mathrm{Te}}$.

Exercice d'application

On définit un "faux" signal mesuré prenant les valeurs $e_i = \mathscr{E}(t_i)$ rangées dans le tableau numpy `Ei` associées au temps t_i du tableau `Ti`.

Question 1. Compléter le code fourni ci-dessous pour définir le signal filtré en utilisant une moyenne glissante sur $k = 2$ valeurs.

```python
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t):
    return t**3-5*t**2+random.random()

Ti = np.linspace(-2,2,100) ## instants ti pour mesure du signal
Ei = [f(ti) for ti in Ti]  ## "faux" signal mesuré ei = E(ti)
plt.scatter(Ti,Ei,s=10,label='mesure') ## tracé

## Filtrage avec moyenne glissante et k = 2
Tfiltre = []
Ffiltre = []

k = 2
for j in range(........):
    ..........
    ...


    ... à compléter


    ...

plt.plot(Tfiltre,Ffiltre,color='red',label='signal filtre par moyenne glissante') ## tracé

## Affichage de la légende et de la grille
plt.legend()
plt.grid(True)
```

Question 2. Mettre en place un filtre passe-bas d'ordre 1. Analyser l'influence de la constante de temps de ce filtre.

Question 3. Mettre en place un filtre passe-bas d'ordre 2. Analyser l'influence de ses paramètres.