

# Théorie des mécanismes

PSI : Lycée Rabelais

## Introduction au chapitre

*" On entend par théorie des mécanismes un ensemble de méthodes qui permettent d'étudier les mécanismes et les structures, en vue de les comprendre, de les améliorer ou de les concevoir. Ces méthodes reposent essentiellement sur deux branches de la mécanique, la statique et la cinématique[...].*

*Le but de la théorie des mécanismes n'est pas d'établir une construction intellectuelle de plus, mais de donner aux techniciens et ingénieurs un outil de travail efficace. On ne s'étonnera donc pas de voir associées, aussi souvent que possible, des considérations pratiques avec des notions beaucoup plus abstraites. "*

Wikipedia, Théorie des mécanismes

## Position du problème

Le fabricant KTM a développé une moto équipée d'un moteur monocylindre. Cette moto est une moto sportive connue pour sa légèreté ce qui lui permet de proposer un comportement nerveux et explosif. La légèreté de la moto est principalement liée à l'utilisation d'un moteur monocylindre.

*A contrario*, on retrouve des moteurs à plusieurs cylindres pour les voitures. On parle souvent de moteurs V6, V8 ou V12. Cela signifie donc que le moteur est composé de 6, 8 ou 12 cylindres. La désignation "V" signifie que les cylindres du moteur sont montés en "V" (voir figure ci-dessous).



FIGURE 1 – Moto KTM 690 SMC

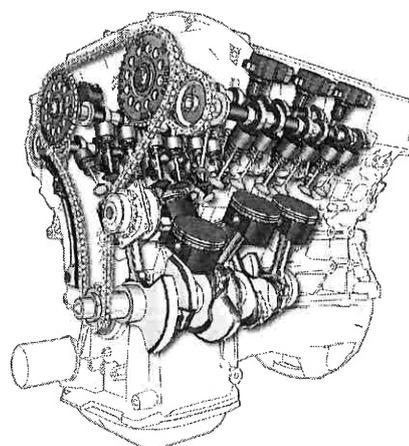


FIGURE 2 – Exemple d'un moteur V6

L'énergie disponible en sortie du moteur résulte de l'explosion de l'essence à l'intérieur de la chambre de combustion. Chaque combustion s'opère en 4 temps (figure 3). Dans un premier temps, la soupape d'entrée est ouverte et le piston se déplace vers le bas. L'essence remplit donc la chambre de combustion. Dans un deuxième temps, la remontée du piston (et la fermeture des soupapes) comprime l'essence dans la chambre. Dans un troisième temps, une bougie crée

un arc électrique et permet l'explosion de l'essence. C'est la phase motrice. Le piston descend. Enfin le dernier temps correspond à l'ouverture de la soupape de sortie et à la remontée du piston. Cette étape permet d'évacuer les restes de l'explosion. Ce cycle se répète  $x$  fois par minute. La valeur  $x$  est celle qui est indiquée sur le tableau de bord de la voiture. Pour la moto KTM, son caractère nerveux se manifeste pour une vitesse de rotation de l'arbre moteur de l'ordre de 6000 à 8000 trs/min.

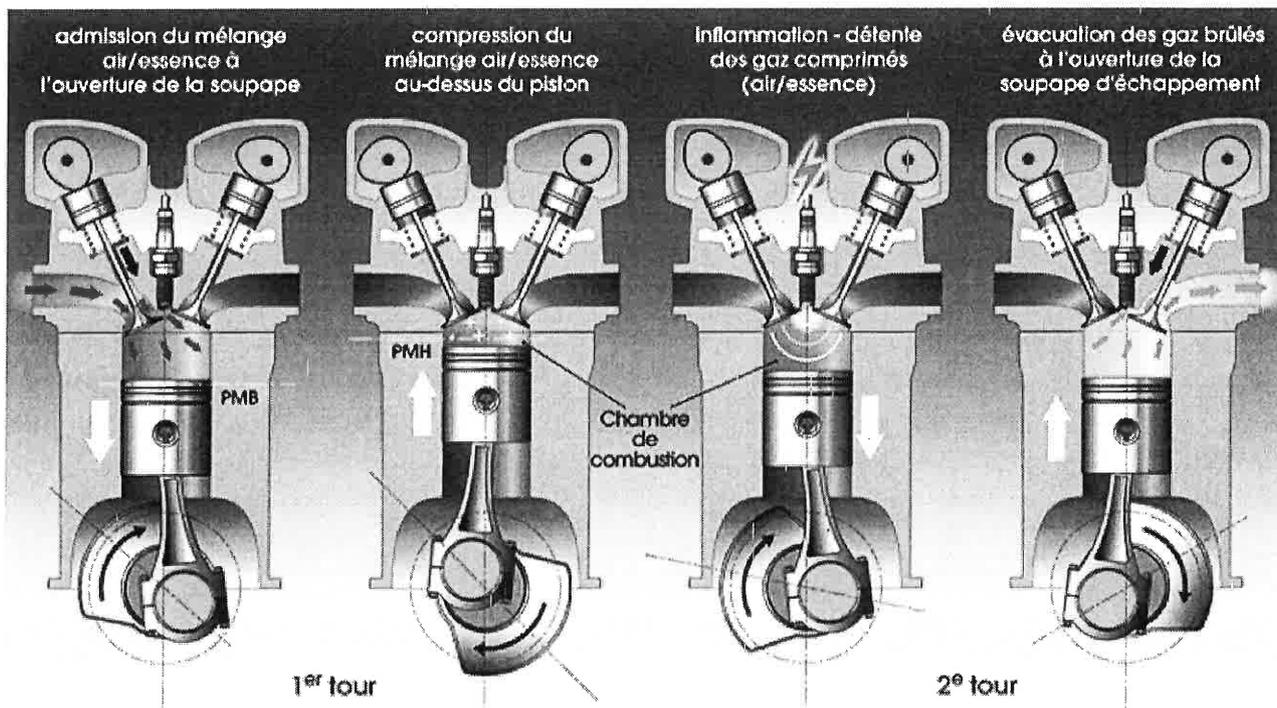


FIGURE 3 – Fonctionnement du moteur

Deux "chaines mécaniques" sont nécessaires ici pour gérer ce cycle. D'une part, une chaîne mécanique permet l'ouverture et la fermeture des soupapes. D'autre part, une chaîne mécanique permet la montée et la descente du piston.

### Contrôle des pistons

Le contrôle des pistons s'effectue par le vilebrequin (figure 4). Chaque excentrique du vilebrequin contrôle la montée et la descente du piston (figure 5).

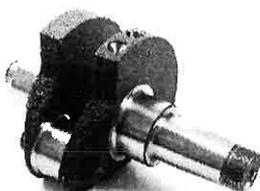


FIGURE 4 – Vilebrequin d'un moteur monocylindre

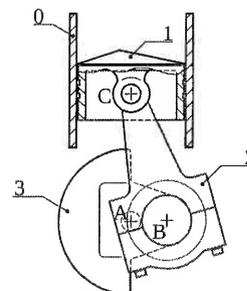


FIGURE 5 – Schéma du mécanisme pour un piston

### Contrôle des soupapes

Le contrôle des soupapes s'effectue par l'arbre à cames (figure 6). Chaque came contrôle l'ouverture et la fermeture d'une soupape (figure 7). Pour la moto étudiée, dont le moteur est un monocylindre, il y a 4 soupapes : 2 soupapes pour l'admission de l'essence et 2 soupapes pour l'évacuation.

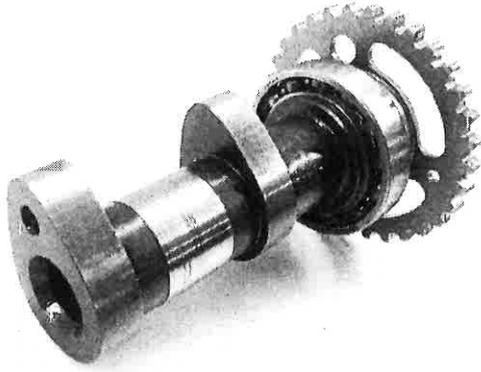


FIGURE 6 – Arbre à cames (pour deux soupapes)

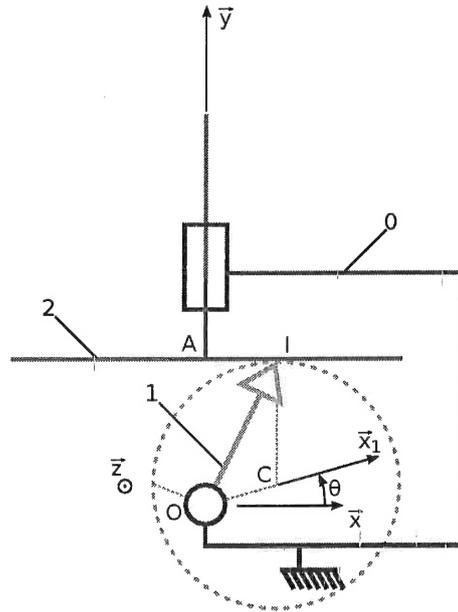


FIGURE 7 – Schéma cinématique pour une soupape

Soit  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère lié au bâti 0 qui représente ici le carter moteur. L'arbre à came 1 est modélisé par un cylindre excentrique d'axe  $(C, \vec{z})$ , de rayon  $a$  de telle sorte que  $\vec{CI} = a \vec{y}$ . L'arbre à came 1 est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$  avec 0.

Soit  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère lié à 1 tel que :  $\vec{OC} = e \vec{x}_1$  ( avec  $e > 0$  ).

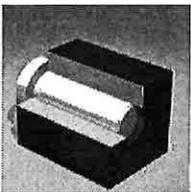
On pose  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$  avec  $\vec{z} = \vec{z}_1$ . La soupape 2 est un cylindre en liaison pivot glissant avec 0 d'axe  $(O, \vec{y})$ . 1 et 2 sont en liaison linéaire rectiligne d'axe  $(I, \vec{z})$  et de normale  $\vec{y}$ .

## 1 Réalisation de la liaison pivot entre 0 et 1

### 1.1 Technologie

L'arbre à came doit être en mouvement de rotation par rapport au carter moteur. Différentes technologies sont envisageables pour la réalisation d'une liaison pivot.

**Contact direct :** Une première solution consiste à mettre directement en contact l'arbre à came avec le carter moteur.



Une telle solution permet d'obtenir des coûts relativement faible et un nombre de composants limité. Cependant cette solution provoquera une usure prématurée au niveau du contact entre l'arbre (qui tourne à quelques milliers de tours par minutes) et le carter moteur.

**Utilisation de coussinet :** Une seconde solution consiste à insérer une pièce d'usure entre l'arbre à came et le carter moteur.



Cette pièce d'usure s'appelle coussinet. Ces coussinets permettent d'obtenir un bon coefficient de frottement au niveau des contacts. Ils sont généralement en alliages de bronze ou en polymère.

**Utilisation de roulements :** Une troisième solution consiste à insérer des éléments roulants entre l'arbre à came et le carter moteur.



Ces roulements permettent de guider des pièces avec de grandes vitesses de rotation et des charges importantes. Les roulements sont essentiellement composés d'une bague extérieure (fixée sur le carter), d'une bague intérieure (fixée sur l'arbre) et d'éléments roulants (billes, rouleaux, aiguilles...). Plusieurs types de montages sont possibles et influent significativement sur le comportement du mécanisme. Un roulement possède un angle, dit angle de rotulage, qui permet de désaxer légèrement l'arbre par rapport au carter (des liaisons rotules ou sphère-cylindre sont donc privilégiés).

## 1.2 Montage de l'arbre à cames

On suppose que l'ensemble des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur l'arbre à came 1 sont connues. Elles sont notées :

$$\{\text{ext} \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 1} = X_e \vec{x} + Y_e \vec{y} + Z_e \vec{z} \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow 1} = L_e \vec{x} + M_e \vec{y} + N_e \vec{z} \end{cases}$$

Dans un premier temps, deux solutions sont envisagées pour le montage de l'arbre à came.

**Montage 1 :** Un premier montage est proposé ci-dessous. Afin de dimensionner les roulements, il est nécessaire de calculer les actions dans les liaisons.

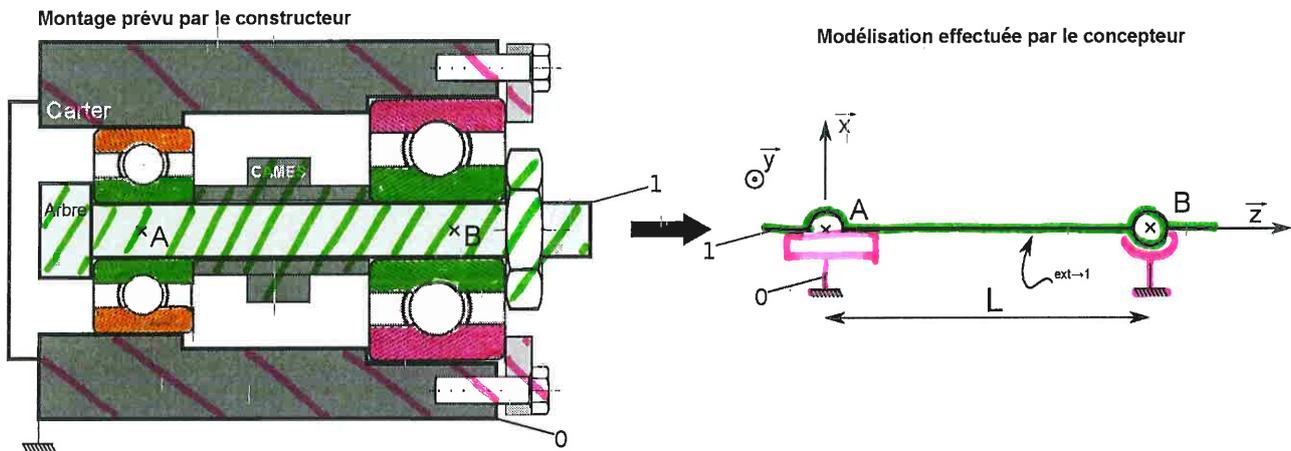


FIGURE 8 – Montage 1 prévu par le constructeur

Pour le roulement de droite, l'arbre est bloqué axialement par rapport au carter : une liaison rotule est donc plus adaptée pour la modélisation.

Concernant le roulement de gauche, celui-ci peut coulisser dans le carter. Dans ce cas, une liaison sphère-cylindre est donc plus adaptée pour la modélisation.

### Calculer les actions dans les liaisons

On isole le solide 1 soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $0 \xrightarrow{A} 1$
- $0 \xrightarrow{B} 1$
- $\text{ext} \rightarrow 1$

J'écris le principe fondamental de la statique sous forme torsorielle au point A :

$$\{0 \xrightarrow{A} 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \xrightarrow{A} 1} = X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{M}_{A, 0 \xrightarrow{A} 1} = \vec{0} \end{cases}$$

$L \cdot \vec{z}$

$$\{0 \xrightarrow{B} 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \\ \vec{M}_{B,0 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{et donc } \vec{M}_{A,0 \rightarrow 1} = \vec{M}_{B,0 \rightarrow 1} + \vec{AB} \wedge (X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z})$$

$$= L \cdot X_B \cdot \vec{y} - L \cdot Y_B \cdot \vec{x}$$

$$\{\text{ext} \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 1} = X_e \vec{x} + Y_e \vec{y} + Z_e \vec{z} \\ \vec{M}_{A,\text{ext} \rightarrow 1} = L_e \vec{x} + M_e \vec{y} + N_e \vec{z} \end{cases}$$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} X_e + X_A + X_B &= 0 \\ Y_e + Y_A + Y_B &= 0 \\ Z_e + Z_B &= 0 \\ L_e - L \cdot Y_B &= 0 \\ N_e + L \cdot X_B &= 0 \\ N_e &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_B &= -\frac{M_e}{L} \\ Y_B &= \frac{L_e}{L} \\ Z_B &= -Z_e \\ X_A &= -X_e + \frac{M_e}{L} \\ Y_A &= -Y_e - \frac{L_e}{L} \end{aligned}$$

il y a 5 inconnues et 5 eq° utilis : on dira donc que le modèle est ISOSTATIQUE.

**Montage 2 :** Un second montage est également proposé ci-dessous. Afin de dimensionner les roulements, il est également nécessaire de calculer les actions dans les liaisons.

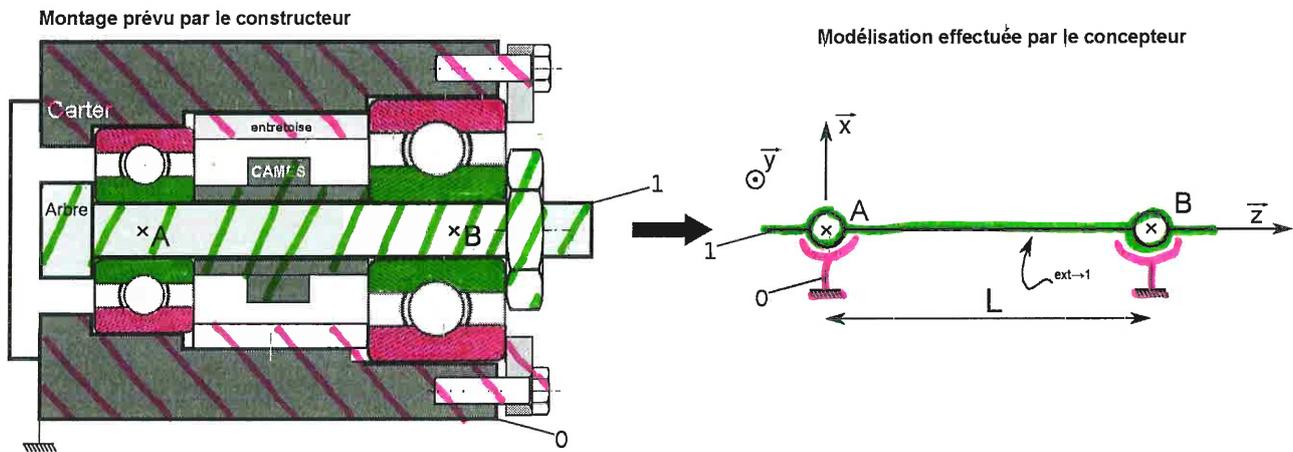


FIGURE 9 – Montage 2 prévu par le constructeur

### Calculer les actions dans les liaisons

On isole le solide 1 soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $0 \xrightarrow{A} 1$
- $0 \xrightarrow{B} 1$
- $\text{ext} \rightarrow 1$

J'écris le principe fondamental de la statique sous forme torsorielle au point A :

$$\{0 \xrightarrow{A} 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ \vec{M}_{A,0 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{0 \xrightarrow{B} 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \\ \vec{M}_{B,0 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{cases}$$

$L \cdot \vec{z}$

$$\text{et donc } \vec{M}_{A,0 \rightarrow 1} = \vec{M}_{B,0 \rightarrow 1} + \vec{AB} \wedge (X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z})$$

$$= L \cdot X_B \cdot \vec{y} - L \cdot Y_B \cdot \vec{x}$$

$$\{\text{ext} \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 1} = X_e \vec{x} + Y_e \vec{y} + Z_e \vec{z} \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow 1} = L_e \vec{x} + M_e \vec{y} + N_e \vec{z} \end{cases}$$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$X_e + X_A + X_B = 0$$

$$Y_e + Y_A + Y_B = 0$$

$$Z_e + Z_A + Z_B = 0$$

$$L_e - L \cdot Y_B = 0$$

$$M_e + L \cdot X_B = 0$$

$$N_e = 0$$

$$X_B = -\frac{M_e}{L}$$

$$Y_B = \frac{L_e}{L}$$

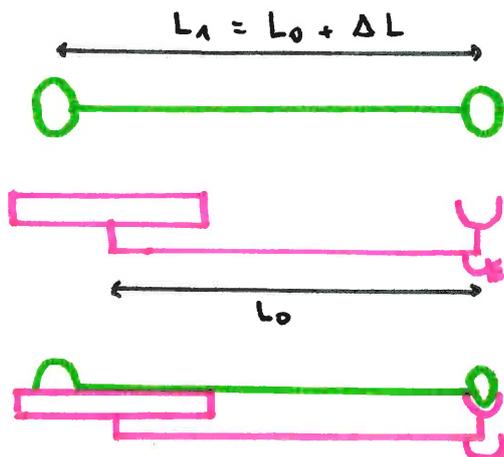
$$X_A = -X_B + \frac{M_e}{L}$$

$$Y_A = -Y_B - \frac{L_e}{L}$$

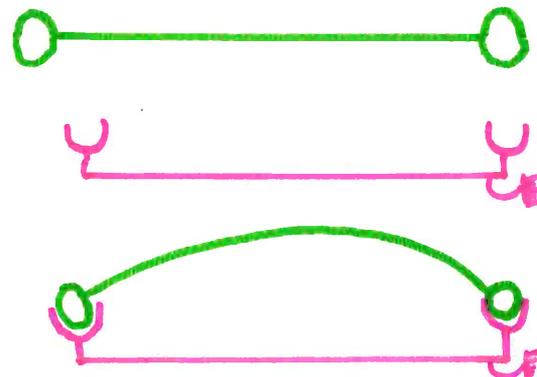
$$Z_A + Z_B = Z_e !$$

il y a 6 inconnues et 5 éq° utiles (il manque donc une éq°): on dira que le modèle est HYPERSTATIQUE de degré 1.

Que se passe-t-il s'il y a un défaut de longueur sur l'arbre ?



Montage possible sans forcer.  
(ISOSTATIQUE)



Il y a 1 contrainte géométrique de montage  $\Delta L = 0$  qui permet un assemblage sans forcer.

### 1.3 Conclusion

On appelle  $h$  le degré d'hyperstaticité d'un mécanisme. On aura toujours  $h \geq 0$  pour un mécanisme présentant des chaînes fermées. L'objectif de ce cours est de déterminer le degré (ou ordre) d'hyperstaticité d'un mécanisme,

- c'est-à-dire le nombre d'inconnues de liaison « en trop » par rapport au nombre d'équations issues du principe fondamental de la dynamique (ou de la statique).
- c'est-à-dire également le nombre de contraintes géométriques de montage à respecter pour que le mécanisme puisse être monté sans forcer.

Montage isostatique $h=0$	Montage hyperstatique $h>0$
+ on peut déterminer tous les inconnus de liaison.	+ plus rigide et plus précis qu'un mécanisme isostatique.
+ il n'y a pas de contraintes géométriques de montage.	- il y a <u><math>h</math></u> contraintes géométriques de montage.
	- impossible de déterminer $h$ inconnues de liaison.

## 2 Mécanisme de commande des soupapes

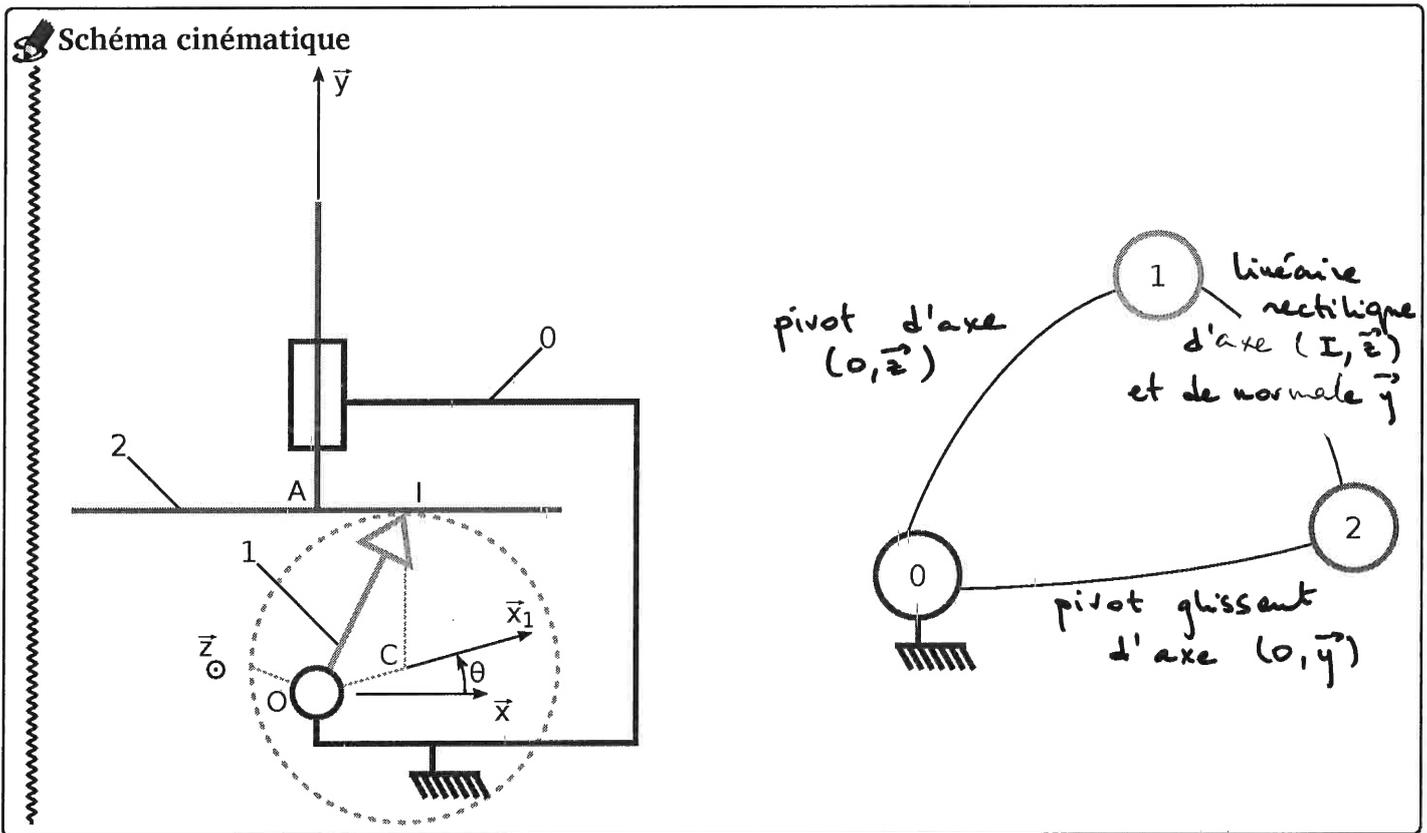
Soit  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère lié au bâti 0 qui représente ici le carter moteur. L'arbre à came 1 est modélisé par un cylindre excentrique d'axe  $(C, \vec{z})$ , de rayon  $a$  de telle sorte que  $\vec{CI} = a \vec{y}$ . L'arbre à came 1 est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$  avec 0.

Soit  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère lié à 1 tel que :  $\vec{OC} = e \vec{x}_1$  ( avec  $e > 0$  ).

On pose  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$  avec  $\vec{z} = \vec{z}_1$ . La soupape 2 est un cylindre en liaison pivot glissant avec 0 d'axe  $(O, \vec{y})$ . 1 et 2 sont en liaison linéaire rectiligne d'axe  $(I, \vec{z})$  et de normale  $\vec{y}$ .

### 2.1 Étude cinématique

On cherche ici à faire le lien entre le paramètre cinématique d'entrée (ici  $\theta$ ) et les paramètres cinématiques des autres pièces en mouvement.



Les torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}_O = \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{O \in 1/0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_I = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_{21}^y \cdot \vec{y} + \omega_{21}^z \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{I \in 2/1} = v_{21}^x \cdot \vec{x} + v_{21}^y \cdot \vec{y} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_O = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{20} \cdot \vec{y} \\ \vec{V}_{O \in 2/0} = v_{20} \cdot \vec{y} \end{cases}$$

Écrire la fermeture cinématique sous forme torsorielle

$$\{V_{1/0}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{0/2}\} = \{0\}$$

Nombre d'inconnues cinématiques :  $I_C = 7$ .

Nombre d'équations cinématiques :  $E_C = 6$ .

En considérant que  $\theta$  est connu, peut-on déterminer toutes les inconnues cinématiques? *A priori oui.*

En terme de vecteurs, la fermeture cinématique s'exprime donc :

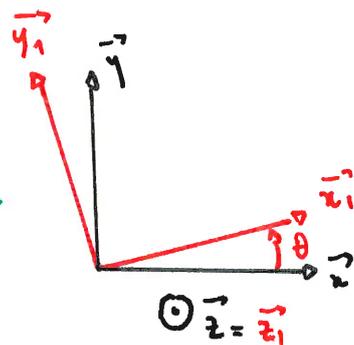
$$\vec{x}_1 \wedge \vec{y} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \vec{z} = \cos\theta \cdot \vec{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{1/0} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{0/2} &= \vec{0} \\ V_{O \in 1/0} + V_{O \in 2/1} + V_{O \in 0/2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{O \in 2/1} &= \vec{V}_{I \in 2/1} + \vec{OI} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} \\ &= \sqrt{z_1} \cdot \vec{x} + \sqrt{z_1} \cdot \vec{z} + e \cdot \omega_{21}^y \cdot \cos\theta \cdot \vec{z} \\ &\quad - e \cdot \omega_{21}^z \cdot \vec{y}_1 + a \cdot \omega_{21}^z \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

*où  $\vec{y}_1 = \cos\theta \cdot \vec{y} - \sin\theta \cdot \vec{x}$*



Ce qui donne le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} \sum \vec{\Omega} \cdot \vec{x} &= 0 && \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots = 0 \\ \sum \vec{\Omega} \cdot \vec{y} &= 0 && \dots \dots \dots \omega_{21}^y \dots \dots \dots = \omega_{21}^z \dots \dots \dots = 0 \\ \sum \vec{\Omega} \cdot \vec{z} &= 0 && \dots \dots \dots \dot{\theta} + \omega_{21}^z \dots \dots \dots = 0 \\ \sum \vec{V} \cdot \vec{x} &= 0 && \Leftrightarrow \dots \dots \dots \sqrt{z_1} \dots \dots \dots + e \dots \omega_{21}^z \dots \sin\theta \dots \dots \dots + a \cdot \omega_{21}^z \dots \dots \dots = 0 \\ \sum \vec{V} \cdot \vec{y} &= 0 && \dots \dots \dots - e \cdot \omega_{21}^z \dots \cos\theta \dots \dots \dots - \sqrt{z_0} \dots \dots \dots = 0 \\ \sum \vec{V} \cdot \vec{z} &= 0 && \dots \dots \dots \sqrt{z_1} \dots \dots \dots + e \dots \omega_{21}^y \dots \cos\theta \dots \dots \dots = 0 \end{aligned}$$

**Analyse**

Quel est le rang de ce système d'équation ?

$$r_C = 5$$

La différence entre  $I_C$  et  $r_C$  correspond au nombre d'inconnues cinématiques à connaître pour pouvoir déterminer les autres. Dans notre exemple, on a

$$I_C - r_C = 7 - 5 = 2$$

On a en effet besoin de connaître ... *2* ... paramètres cinématiques ... pour pouvoir déterminer toutes les inconnues cinématiques.

$I_C - r_C$  sera appelé degré de mobilité (ou indice de mobilité) du mécanisme et sera noté  $m_C$ . On aura donc :

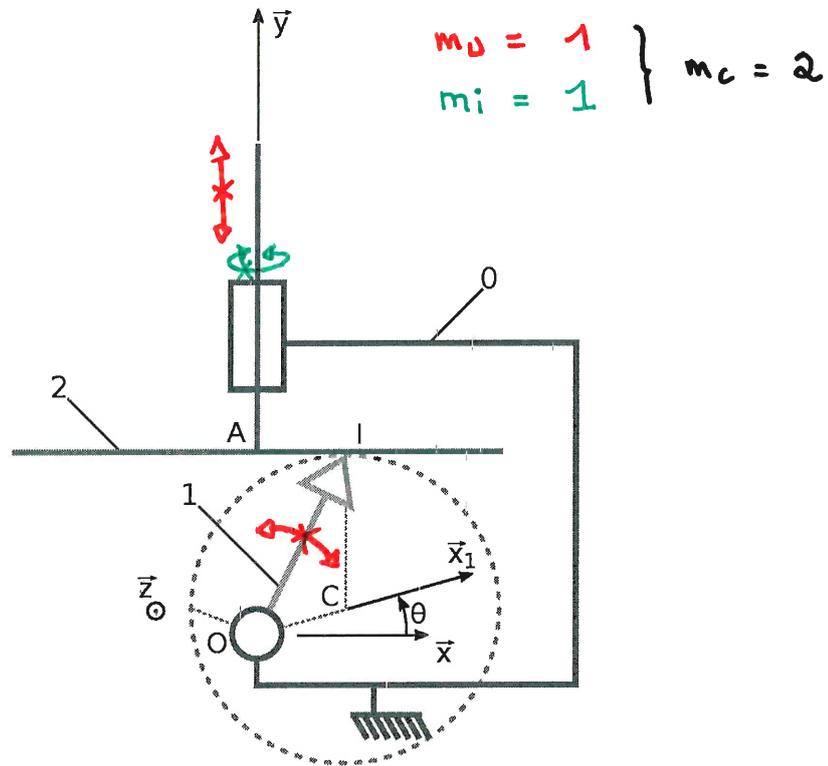
$$m_C = I_C - r_C \quad (\text{ici } m_C = 2)$$

## ⚠ Méthode

Cet indice de mobilité sera, presque toujours, calculé en remarquant que :

$$m_C = m_U + m_i$$

Où  $m_U$  est l'indice des mobilité utiles et  $m_i$  est l'indice des mobilité internes.



## 2.2 Étude statique

On se place en statique. Il est possible de faire la même étude en dynamique (mais avec des calculs beaucoup plus complexes).

On souhaite ici calculer les actions transmises par les liaisons en fonction des efforts extérieurs exercés sur le système. On va chercher à montrer que :

- Si le système est isostatique, toutes les actions de liaison peuvent être calculées.
- Si le système est hyperstatique, une seule partie des actions mécaniques peuvent être calculés.

## 🔍 Questions préliminaires

Quels sont les isolements que l'on peut réaliser et combien d'équations peut-on écrire ?

On peut isoler 1 puis 2 (isoler {1,2} donnera des éq° liés aux premiers isolement). Chaque isolement donne 6 éq°.

Réaliser ces isolements.

★ Bilan des actions mécaniques extérieures à 1

$$\bullet \{0 \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = \dots X_{01} \vec{x} + \dots Y_{01} \vec{y} + Z_{01} \vec{z} \\ M_{O,0 \rightarrow 1} = \dots L_{01} \vec{x} + \dots N_{01} \vec{y} \end{cases}$$

$$\bullet \{2 \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \dots \gamma_{21} \vec{y} \dots \\ M_{I,2 \rightarrow 1} = \dots L_{21} \dots \vec{x} \dots \end{cases}$$

et  $\vec{\Pi}_{O,2 \rightarrow 1} = \vec{\Pi}_{I,2 \rightarrow 1} + \vec{O I} \wedge (\gamma_{21} \vec{y})$   
 $= L_{21} \vec{x} + e \cdot \gamma_{21} \cdot \cos \theta \cdot \vec{z}$

$$\bullet \{\text{ext} \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 1} = X_E \vec{x} + Y_E \vec{y} + Z_E \vec{z} \\ M_{O,\text{ext} \rightarrow 1} = L_E \vec{x} + M_E \vec{y} + N_E \vec{z} \end{cases}$$

★ Bilan des actions mécaniques extérieures à 2

$$\bullet \{0 \rightarrow 2\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 2} = \dots X_{02} \dots \vec{x} \dots + \dots Z_{02} \dots \vec{z} \\ M_{O,0 \rightarrow 2} = \dots L_{02} \dots \vec{x} \dots + \dots N_{02} \dots \vec{z} \end{cases}$$

$$\bullet \{1 \rightarrow 2\} = - \{2 \rightarrow 1\}$$

$$\bullet \{\text{ext} \rightarrow 2\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow 2} = X_S \vec{x} + Y_S \vec{y} + Z_S \vec{z} \\ M_{O,\text{ext} \rightarrow 2} = L_S \vec{x} + M_S \vec{y} + N_S \vec{z} \end{cases}$$

Nombre d'inconnues "statiques" :  $I_S = \dots 11$

Nombre d'équations issues du principe fondamental de la statique :  $E_S = \dots 12$

L'application du principe fondamental de la statique donne donc les deux systèmes d'équations suivants :

Isolement de 1		Isolement de 2	
Écriture des moments en O		Écriture des moments en O	
$\sum \vec{R} \cdot \vec{x} = 0$	$X_{01} \dots + X_{e} \dots = 0$	$\sum \vec{R} \cdot \vec{x} = 0$	$X_{02} \dots + X_S \dots = 0$
$\sum \vec{R} \cdot \vec{y} = 0$	$\gamma_{01} \dots + \gamma_{21} \dots + \gamma_e \dots = 0$	$\sum \vec{R} \cdot \vec{y} = 0$	$\dots - \gamma_{21} \dots + \gamma_S \dots = 0$
$\sum \vec{R} \cdot \vec{z} = 0$	$Z_{01} \dots + Z_e \dots = 0$	$\sum \vec{R} \cdot \vec{z} = 0$	$Z_{02} \dots + Z_S \dots = 0$
$\sum \vec{M} \cdot \vec{x} = 0$	$L_{01} \dots + L_{21} \dots + L_e \dots = 0$	$\sum \vec{M} \cdot \vec{x} = 0$	$L_{02} \dots - L_{21} \dots + L_S \dots = 0$
$\sum \vec{M} \cdot \vec{y} = 0$	$\Pi_{01} \dots + \Pi_e \dots = 0$	$\sum \vec{M} \cdot \vec{y} = 0$	$\dots + M_S \dots = 0$
$\sum \vec{M} \cdot \vec{z} = 0$	$e \cdot \gamma_{21} \cdot \cos \theta \dots + N_e \dots = 0$	$\sum \vec{M} \cdot \vec{z} = 0$	$N_{02} \dots - e \cdot \gamma_{21} \cdot \cos \theta \dots + N_S \dots = 0$

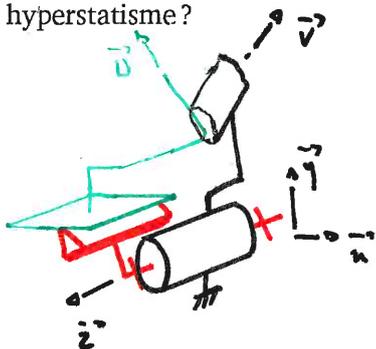
*4 : e lié avec la mobilité utile*

Quel est le rang de ce système d'équations?  $r_S = 12 - 1 - 1 = 10$

On définit  $h$  le degré d'hyperstatisme qui est la différence entre le nombre d'inconnues "statiques" ( $I_S$ ) et le nombre d'équations utiles issues du principe fondamental de la statique ( $r_S$ ).

Quel est donc le degré d'hyperstatisme?  $h = I_S - r_S = 2$  : il y a donc 2 contraintes géométriques de montage.

D'où "vient" cet hyperstatisme?



Ici, il faut

$$\vec{u} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{z} = 0$$

## 2.3 Lien entre l'étude statique et l'étude cinématique

Les deux approches étudiées conduisent à des conclusions analogues et complémentaires.

En cinématique, on obtient une relation entre  $v_{20}$  et  $\dot{\theta}$  : c'est la loi entrée-sortie du mécanisme. En statique, on obtient une relation entre  $N_E$  et  $Y_S$ , cette relation correspond à la transmission de l'effort dans le mécanisme. On pourrait retrouver cette équivalence en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Concernant la mobilité interne observée de la pièce 2 par rapport au carter, elle se traduit "statiquement" par la relation  $M_S = 0$ . Cela signifie qu'il n'y aura pas de moment autour de  $\vec{y}$  de l'extérieur sur la pièce 2 (cette dernière étant libre en rotation).

On admettra donc l'équivalence des raisonnements en statique et en cinématique. On conclut de cette analyse que pour déterminer les  $I_S$  inconnues statiques, il ne reste en fait que  $(E_S - m_C)$  équations utilisables.

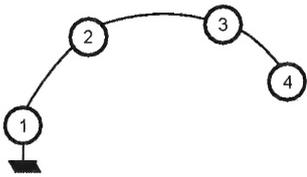
Le nombre d'équations indépendantes utilisables est justement ce que l'on avait appelé le rang  $r_S$  de la matrice statique.

On admettra donc que, si on connaît le degré de mobilité du mécanisme, le rang  $r_S$  de la matrice statique s'obtient par la relation :

$$r_S = E_S - m_C$$

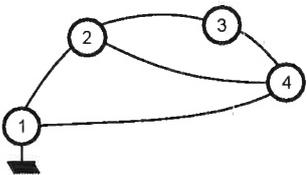
## 3 Généralisation

**chaîne ouverte** : une chaîne ouverte possède un graphe de liaison semblable à celui proposé ci-dessous.



Une telle architecture de liaisons n'impose aucune contrainte géométrique puisque les solides sont placés les uns après les autres. Cela génère systématiquement un modèle de mécanisme isostatique.

**chaîne complexe** : considérons maintenant un graphe de liaison présentant des chaînes fermées.



Dans ce cas, pour rechercher le degré d'hyperstatisme, il est essentiel de s'appuyer sur la théorie des graphes afin de déterminer le nombre d'équations que l'on peut écrire et le nombre d'inconnues à déterminer.

Notons :

- $\gamma$ , le nombre de chaînes cinématiques fermées indépendantes (appelé aussi **nombre cyclomatique**)
- $n$ , le nombre de solides du mécanisme **en comptant le bâti !**
- $l$ , le nombre de liaisons du mécanisme
- $N_C^{ij}$ , le nombre d'inconnues cinématiques pour la liaison entre le solide  $i$  et le solide  $j$ .
- $N_S^{ij}$ , le nombre d'inconnues "statiques" pour la liaison entre le solide  $i$  et le solide  $j$ .
- $I_C$ , le nombre d'inconnues cinématiques du mécanisme
- $I_S$ , le nombre d'inconnues "statiques" du mécanisme
- $E_C$ , le nombre d'équations cinématiques que l'on peut écrire sur chaque chaîne indépendante du mécanisme
- $E_S$ , le nombre d'équations issues du principe fondamental de la

Le degré d'hyperstatisme correspond au nombre d'inconnues "statiques" en trop. Ce qui permet d'écrire :

$$h = I_S - r_S$$

On a également admis que  $r_s = E_s - m_C$ , ce qui permet donc d'écrire :

$$h = m_C + (I_S - E_S)$$

Cette formule est celle qui permet d'obtenir le degré d'hyperstatisme du mécanisme à partir d'une approche statique. Il est souvent plus commode de raisonner sur les grandeurs cinématiques. Il faut donc exprimer  $I_S - E_S$  en fonction de  $I_C$  et  $E_C$ .

On admettra (cela découle de la théorie des graphes) que :  $\gamma = l - n + 1$ .

On aura :

$E_C = 6(l - n + 1)$  : il est possible d'écrire une fermeture cinématique pour chaque chaîne cinématiquement indépendante.

$E_S = 6(n - 1)$  : il est possible de réaliser un isolement pour chaque solide (sauf pour le bâti) et écrire le principe fondamental de la statique

$I_C = \sum_{\text{liaisons}} N_C^{ij}$  :  $I_C$  est la somme de toutes les inconnues cinématiques de liaison.

$I_S = \sum_{\text{liaisons}} N_S^{ij} = \sum_{\text{liaisons}} (6 - N_C^{ij}) = 6l - I_C$  :  $I_S$  est la somme de toutes les inconnues "statiques" de liaison.

On remarque donc que :

$$I_S - E_S = E_C - I_C$$

On a donc finalement :

**À retenir**

$$h = m_C + (I_S - E_S)$$

$$h = m_C + (E_C - I_C)$$

Avec  $E_C = 6 \cdot \gamma$  où  $\gamma = (l - n + 1)$

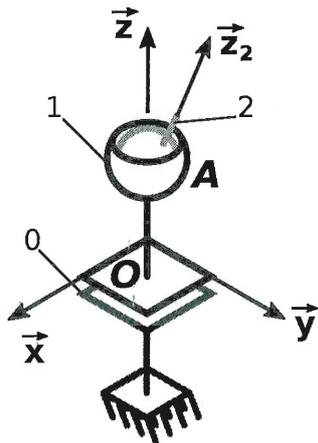
Et  $E_S = 6 \cdot (n - 1)$

Dans la majorité des cas, la formule  $h = m_C + (E_C - I_C)$  est plus commode à utiliser.

Montage isostatique $h = 0$	Montage hyperstatique $h > 0$
<p><b>AVANTAGE</b> : on peut déterminer toutes les inconnues de liaison.</p> <p><b>AVANTAGE</b> : il n'y a pas de contrainte géométrique de montage.</p>	<p><b>AVANTAGE</b> : plus rigide et plus précis qu'un montage isostatique.</p> <p><b>INCONVÉNIENT</b> : il y a <math>h</math> contraintes géométriques de montage.</p> <p><b>INCONVÉNIENT</b> : on ne pourra pas déterminer <math>h</math> inconnues de liaison.</p>

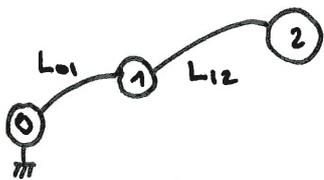
## 4 Complément autour des liaisons équivalentes

### 4.1 Liaisons en série

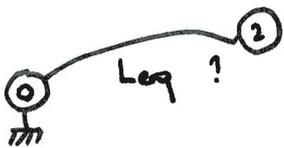


**Travail à réaliser**

- 1- Faire le graphe de liaisons.
- 2- Donner la condition d'équivalence (approche statique et/ou cinématique) à partir des torseurs.
- 3- Trouver la liaison équivalente à partir de la méthode de votre choix.



$L_{01}$ : appui plan de normale  $\vec{z}$   
 $L_{12}$ : rotule de centre A



Équivalence cinématique:

$$\{ \mathcal{U}_{2/0} \} = \{ \mathcal{U}_{2/1} \} + \{ \mathcal{U}_{1/0} \}$$

$$= \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_{21}^x \cdot \vec{x} + \omega_{21}^y \cdot \vec{y} + \omega_{21}^z \cdot \vec{z} \\ A | \vec{V}_{AE2/1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{z} \\ A | \vec{V}_{AE1/0} = v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{21}^x \cdot \vec{x} + \omega_{21}^y \cdot \vec{y} + (\omega_{21}^z + \omega_{10}) \cdot \vec{z} \\ A | \vec{V}_{AE2/0} = v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} \end{cases}$$

$L_{eq}$ : liaison ponctuelle en A et de normale  $\vec{z}$

Équivalence statique:

$$\{ 0 \rightarrow 2 \} = \{ 0 \rightarrow 1 \} = \{ 1 \rightarrow 2 \}$$

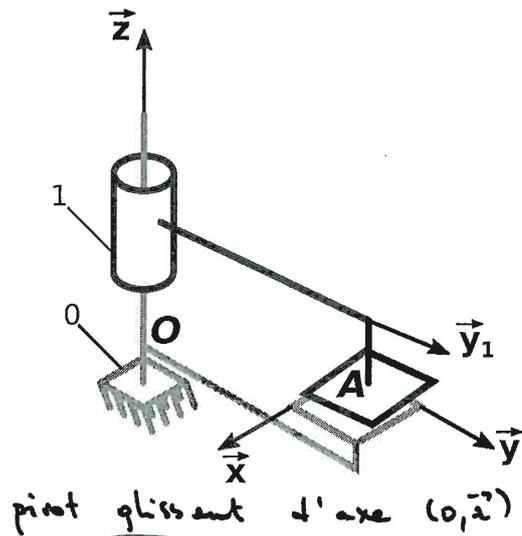
donc

$$\begin{cases} X_{02} = 0 = X_{12} \\ Y_{02} = 0 = Y_{12} \\ Z_{02} = Z_{01} = Z_{12} \\ L_{02} = L_{01} = 0 \\ \Pi_{02} = \Pi_{01} = 0 \\ N_{02} = N_{01} = 0 \end{cases}$$

donc

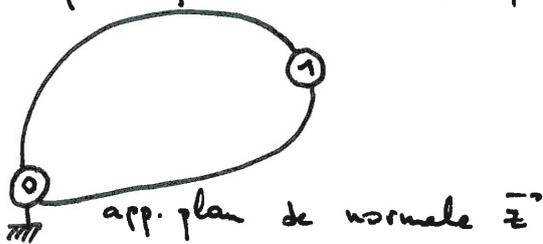
$$\{ 0 \rightarrow 2 \} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 2} = Z_{02} \cdot \vec{z} \\ A | \vec{M}_{A, 0 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}$$

## 4.2 Liaisons en parallèle



### Travail à réaliser

- 1- Faire le graphe de liaisons.
- 2- Donner la condition d'équivalence (approche statique et/ou cinématique) à partir des torseurs.
- 3- Trouver la liaison équivalente à partir de la méthode de votre choix.
- 4- Déterminer le degré d'hyperstatisme associé à cette liaison équivalente.



↔



Équivalence cinématique :  $\{ \mathcal{U}_{1/0}^{Lég} \} = \{ \mathcal{U}_{1/0}^{p.g} \} = \{ \mathcal{U}_{1/0}^{a.p} \}$

Équivalence statique :  $\{ 0 \xrightarrow{Lég} 1 \} = \{ 0 \xrightarrow{p.g} 1 \} + \{ 0 \xrightarrow{a.p} 1 \}$

À la main, on peut écrire :

$$\{ \mathcal{U}_{1/0}^{Lég} \} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{z} \\ \vec{J}_{A \in 1/0} = \vec{0} \end{cases}$$

Il s'agit d'une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$ .

Déterminer le degré d'hyperstatisme :  $h = E_c - I_c + m$

$m = 1$  (une seule rotation possible)

$E_c = 6 \times 1 = 6$

$I_c = 3 + 1 = 4$

donc  $h = 3$

Degré de liberté	Désignation	Schématisation Perspective Projection orthogonale	Torseur cinématique en P dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Torseur d'actions mécaniques exprimé en P dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Particularités
0	Encastrement ou Fixe		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \vec{0} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_P(1 \rightarrow 2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$	$\forall P$
1	Pivot		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega\vec{x} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_P(1 \rightarrow 2) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$	$\forall P \in (O, \vec{x})$
1	Glissière		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \vec{0} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = v\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_P(1 \rightarrow 2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$	$\forall P$
1	Hélicoïdale		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_x\vec{x} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = v_x\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_P(1 \rightarrow 2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">et <math>X.V_x + L.\omega_x = 0</math></p>	$\forall P \in (O, \vec{x})$ $\omega_x \cdot p = V_x \cdot 2\pi$ <p><math>p</math> : pas à droite</p>
2	Pivot glissant		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_x\vec{x} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = v_x\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_P(1 \rightarrow 2) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$	$\forall P \in (O, \vec{x})$

2	Sphérique à doigt		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} \\ \vec{V}(O \in 1/2) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_o(1 \rightarrow 2) = N\vec{z} \end{cases}$	en O
3	Rotule ou Sphérique		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}(O \in 1/2) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_o(1 \rightarrow 2) = \vec{0} \end{cases}$	en O
3	Appui plan		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = v_x \vec{x} + v_y \vec{y} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = Z\vec{z} \\ M_p(1 \rightarrow 2) = L\vec{x} + M\vec{y} \end{cases}$	$\forall P$
4	Sphère cylindre ou Linéaire annulaire		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}(O \in 1/2) = v_x \vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_o(1 \rightarrow 2) = \vec{0} \end{cases}$	en O
4	Linéaire rectiligne		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_x \vec{x} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = v_x \vec{x} + v_y \vec{y} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = Z\vec{z} \\ M_p(1 \rightarrow 2) = M\vec{y} \end{cases}$	$\forall P \in (O, \vec{x}, \vec{z})$
5	Ponctuelle ou Sphère plan		$\begin{cases} \vec{\Omega}(1/2) = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}(P \in 1/2) = v_y \vec{y} + v_z \vec{z} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X\vec{x} \\ M_p(1 \rightarrow 2) = \vec{0} \end{cases}$	$\forall P \in (O, \vec{x})$