Numéro d'inscription

Numéro de table

Né(e) le

Nom :

Prénom :

Emplacement QR Code

Filière :

Session :

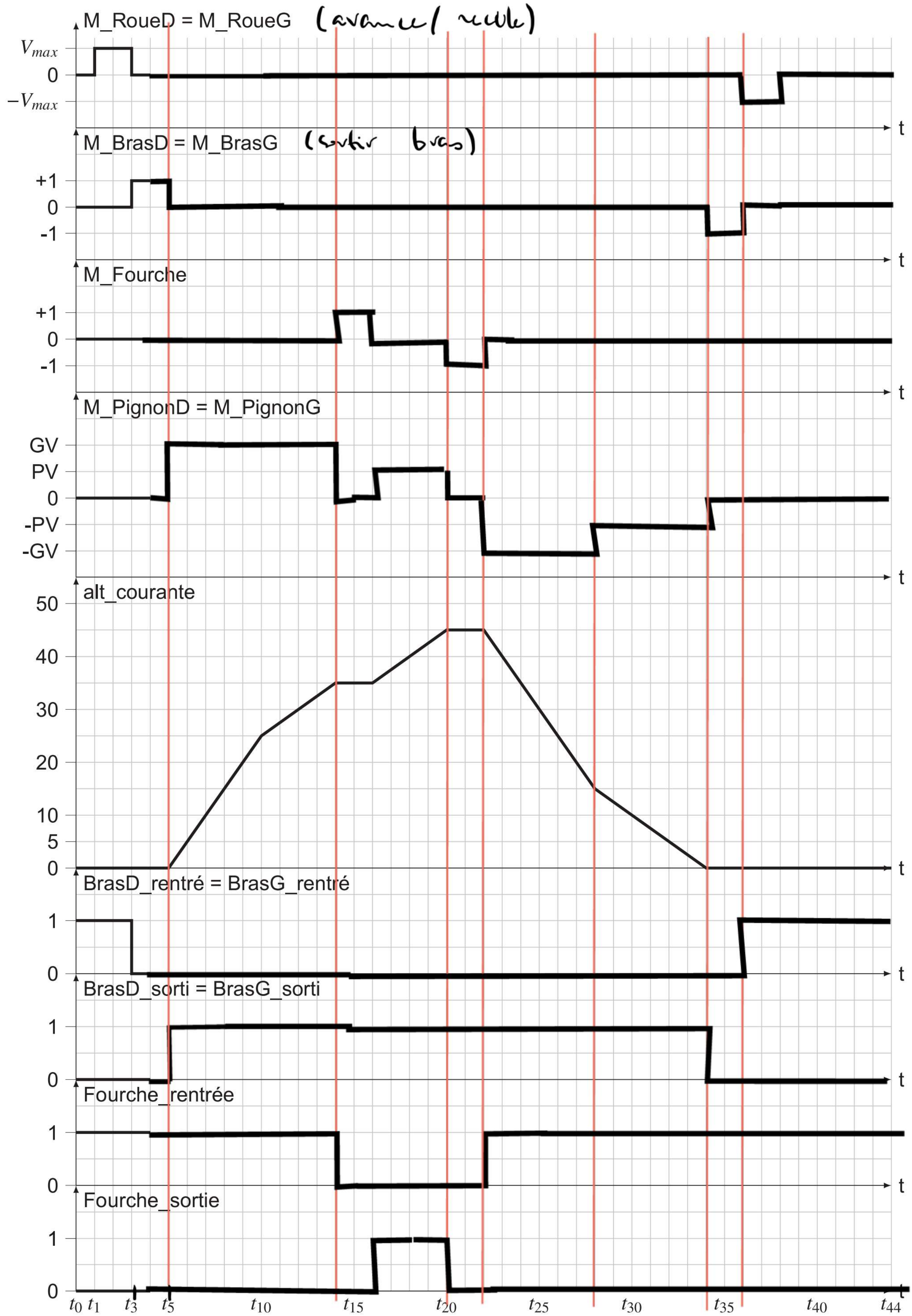
Épreuve de : SCIENCES INDUSTRIELLES

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Skypod, système automatisé de préparation de commande

Q1. Compléter le chronogramme (voir page suivante).



Q2. À l'aide de la condition de roulement sans glissement en I, donner la relation entre $V(t)$, $\omega_{21}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

Condition de roulement sans glissement : $\vec{V}_{I\in 2/0} = \vec{0}$

Or $\vec{V}_{I\in 2/0} = \vec{V}_{I\in 2/1} + \vec{V}_{I\in 1/0}$ où $\vec{V}_{I\in 2/1} = \cancel{\vec{V}_{A\in 2/1}} + \overbrace{\vec{IA}}^{R.\vec{y_1}} \wedge \underbrace{\vec{\Omega}_{2/1}}_{\omega_{21}.\vec{z_1}}$

$= R.\omega_{21}.\vec{x_1}$

Et $\vec{V}_{I\in 1/0} = \vec{V}_{O_1\in 1/0} + \overbrace{\vec{IO_1}}^{R.\vec{y_1} + \frac{L}{2}.\vec{z_1}} \wedge \underbrace{\vec{\Omega}_{1/0}}_{\omega_{10}.\vec{y_1}} = V.\vec{x_1} - \frac{L}{2}.\omega_{10}.\vec{x_1}$

On a donc : $V - \frac{L}{2}.\omega_{10} + R.\omega_{21} = 0$

Q3. Par un raisonnement analogue, donner directement la relation entre $V(t)$, $\omega_{31}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

Le raisonnement est le même mais $\vec{BO_1} = -\vec{AO_1}$ et donc :

$$V + \frac{L}{2}.\omega_{10} + R.\omega_{31} = 0$$

Q4. En déduire $\omega_{10}(t)$ en fonction de $\omega_{21}(t)$ et de $\omega_{31}(t)$.

En soustrayant les équations :

$$L.\omega_{10} + R.(\omega_{31} - \omega_{21}) = 0$$

Et donc $\omega_{10} = \frac{R}{L}.(\omega_{21} - \omega_{31})$

Q5. Démontrer que pour une trajectoire rectiligne, $\omega_{21}(t) = \omega_{31}(t)$. En déduire $\omega_{moy}(t)$ et donner sa valeur.

En trajectoire rectiligne $\omega_{10} = 0$ et donc $\omega_{21} = \omega_{31}$.

Dans ce cas : $\omega_{moy} = -\frac{V}{R} = -\frac{\cancel{2}\ m/s}{\cancel{20}.10^{-3}\ m}$

$\simeq -100\ rad/s$

Q6. Donner dans ces conditions la valeur de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{10}(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{21}(t)$.

On a : $\dot{\omega}_{10} = \frac{R}{L}.(\dot{\omega}_{21} - \underbrace{\dot{\omega}_{31}}_{= -\dot{\omega}_{21}})$

donc $\dot{\omega}_{10} = 2.\frac{R}{L}.\dot{\omega}_{21}$

Q7. En faisant l'hypothèse que $t_1 = 0$, donner les expressions littérales de t_2, de t_3 et de t_4 en fonction de ω_{10max} et de γ_{10}.

- $\boxed{t_2 = \dfrac{\omega_{10max}}{\gamma_{10}}}$ et s'il y a la même décélérat° : $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$
- $\Delta\theta = \displaystyle\int_{t_1}^{t_4} \omega_{10}(t).dt$ = aire sous la courbe $= t_3 . \omega_{10max}$

  donc $\boxed{t_3 = \dfrac{\Delta\theta}{\omega_{10max}}}$
- Enfin : $\boxed{t_4 = \dfrac{\omega_{10max}}{\gamma_{10}} + \dfrac{\Delta\theta}{\omega_{10max}}}$

Q8. À l'aide des figure 10 et figure 11, commenter l'influence de ω_{10max} sur la trajectoire du robot lors d'un virage.

- Dans tous les cas, le robot n'a pas de trajectoire circulaire. Le robot est toujours "à l'extérieur" du virage.
- Plus ω_{10max} est grand, moins la trajectoire est circulaire.
- Le robot fait bien un virage de 90°.

Q9. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique $Ec(S/R_0)$ de l'ensemble S par rapport au repère R_0.

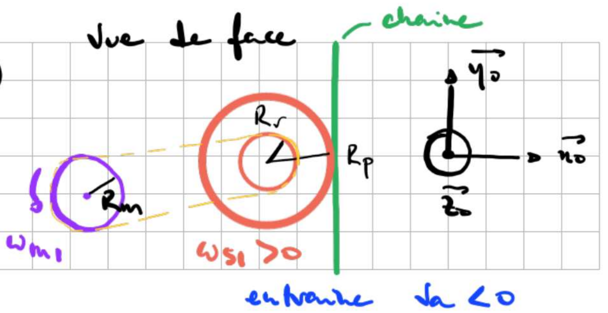
$$Ec(S/R_0) = \frac{1}{2} . m_S . V_a^2 + \left[\frac{1}{2} . J_S . \omega_{S1}^2 + \frac{1}{2} . J_m . \omega_{m1}^2\right] \times 2$$

car $\omega_{S'1} = -\omega_{S1}$ et $\omega_{m'1} = -\omega_{m1}$

Q10. Exprimer le vecteur de la vitesse d'ascension du robot $v_a(t).\overrightarrow{y_0}$ en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre moteur $\omega_{m1}(t)$.

- $V_a = \pm R_p . \omega_{S1} = -R_p . \omega_{S1}$ (voir schéma)
- Et $\dfrac{\omega_{S1}}{\omega_{m1}} = \dfrac{R_m}{R_r}$

  Donc $\boxed{V_a = -R_p . \dfrac{R_m}{R_r} . \omega_{m1}}$



Q11. En déduire l'expression de l'inertie équivalente notée J_{eq} de l'ensemble S rapportée à l'arbre moteur, en fonction de m_s, J_m, J_5 et des grandeurs géométriques avec $E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_{m1}(t)^2$.

On a donc :

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left[m_s \cdot R_p^2 \cdot \frac{R_m^2}{R_r^2} + 2 \cdot J_m + 2 \cdot J_5 \cdot \frac{R_m^2}{R_r^2} \right]}_{J_{eq}} \cdot \omega_{m1}^2$$

Q12. Déterminer l'expression de la somme des puissances extérieures (galiléennes) et intérieures à l'ensemble S. On ne fera apparaitre que $\omega_{m1}(t)$ comme variable cinématique.

Pextérieurs : $P_{poids \to S/R_0} = -m_s \cdot g \cdot v_a = m_s \cdot g \cdot R_p \cdot \frac{R_m}{R_r} \cdot \omega_{m1}$

2 moteurs

Pintérieurs : $P_{motrice} = 2 \cdot C_m \cdot \omega_{m1}$

$P_{frottements} = 2 \cdot C_f \cdot \omega_{51} = 2 \cdot C_f \cdot \frac{R_m}{R_r} \cdot \omega_{m1}$

avec $C_f < 0$ si $\omega_{51} > 0$

Donc :

$$\text{Puissances} = \left[m_s \cdot g \cdot R_p \cdot \frac{R_m}{R_r} + 2 \cdot C_m + 2 \cdot C_f \right] \cdot \omega_{m1}$$

Q13. Déduire des questions précédentes, en justifiant rigoureusement, l'expression du couple moteur $C_m(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{m1}(t)$ et des grandeurs caractéristiques constantes du système.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à S donne :

$$\text{Puissances} = J_{eq} \cdot \omega_{m1} \cdot \dot{\omega}_{m1}$$

Et donc :

$$m_S \cdot g \cdot R_p \cdot \frac{R_m}{R_r} + 2 \cdot C_m + 2 \cdot C_f = J_{eq} \cdot \dot{\omega}_{m1}$$

D'où :

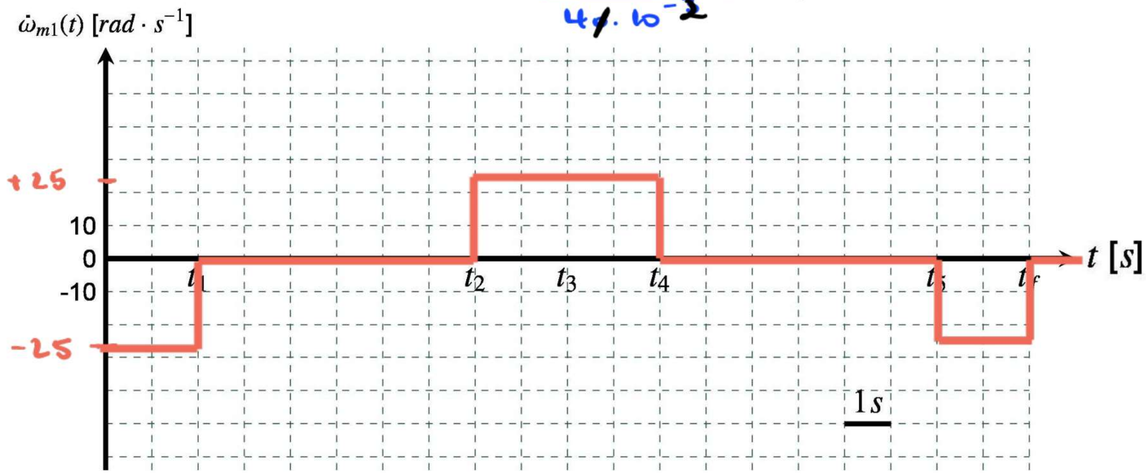
$$C_m = \overbrace{\frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \dot{\omega}_{m1}}^{C_a} - \overbrace{C_f}^{1\ N.m} - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot m_S \cdot g \cdot R_p \cdot \frac{R_m}{R_r}}^{\simeq 16\ N.m^*}$$

Lors de l'accélération : $\gamma = \pm \frac{V_{max}}{t_1} \simeq 1\ m/s^2$ et $R_p \cdot \frac{R_m}{R_r} \simeq 38 \cdot 10^{-3}\ m$

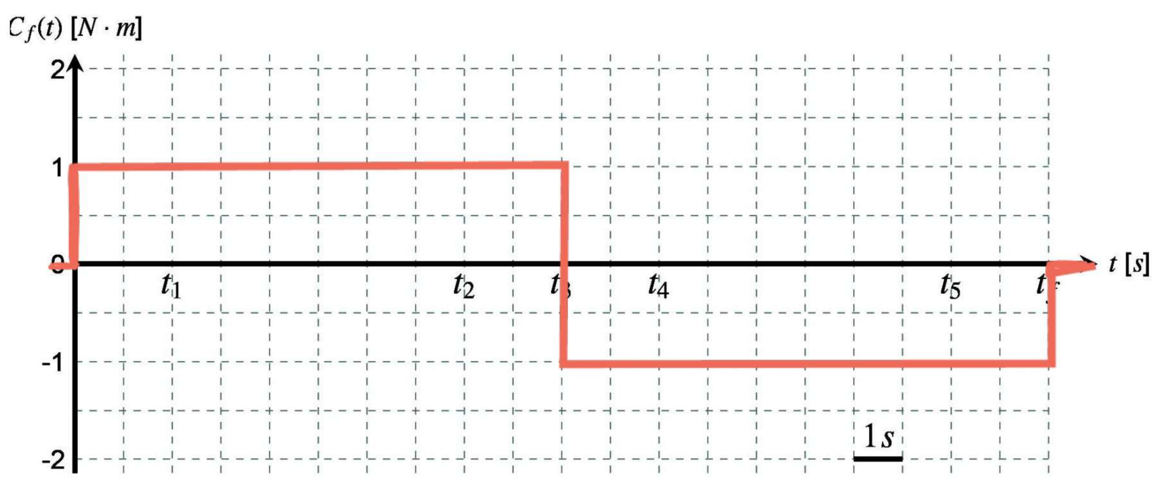
$$\dot{\omega}_{m1} = -\gamma \cdot \frac{R_r}{R_p \cdot R_m} \simeq \pm 25\ rad/s^2\ ^*$$

Q14. Compléter le **DR2** en traçant l'évolution de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{m1}(t)$ au cours du temps.

$$^* \quad \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} \simeq 0{,}25 \cdot 100 \simeq 25$$



Q15. Tracer sur le **DR3** l'évolution de C_f au cours du temps.



Q16. Après avoir précisé l'instant correspondant, déterminer la valeur numérique de la puissance maximale que le moteur devra développer pour assurer le mouvement étudié. Conclure quant au choix du moteur envisagé.

Lorsque $t = t_1 - dt$ (où $dt << t_1$) alors :

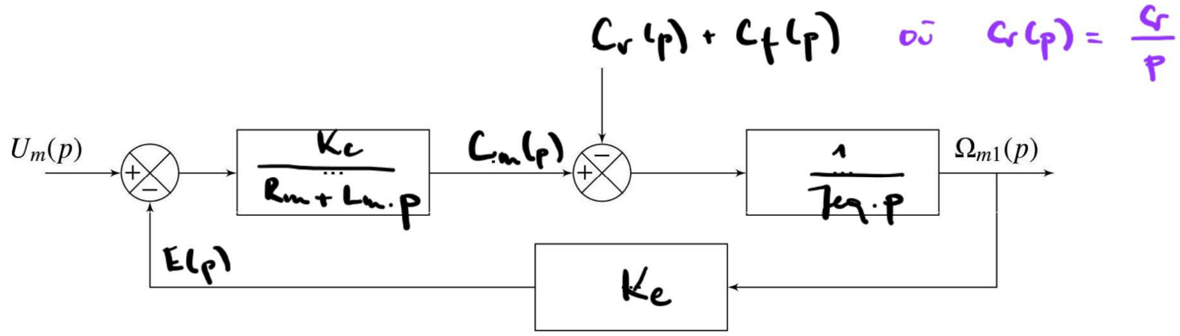
$$\left.\begin{array}{l} C_m = C_{m,max} \\ \text{et } \omega_{m1} \simeq \omega_{m1max} \end{array}\right\} \text{ donc } P_{max} \simeq \overbrace{C_{m,max}}^{-17\ N.m} \cdot \underbrace{\omega_{m1max}}$$

$$= -V_{max} \cdot \frac{R_r}{R_p \cdot R_m}$$

$$\simeq - \frac{2\ m/s}{40 \cdot 10^{-3}\ m} \simeq -50\ rd/s$$

Donc $P_{max} \simeq 850\ W < 1000\ W$ donc la motorisation envisagée est adaptée.

Q17. Compléter les blocs du **DR4** au niveau des « … », avec les fonctions de transfert et variables manquantes dans le schéma-blocs du moteur.



Q18. En se plaçant à l'équilibre statique et en précisant la démarche, déterminer les expressions de Y_g et Y_d en fonction de m_s, g, L, R_p et de x_{G_s}. On rappelle que l'angle α est supposé très petit.

J'isole S soumis à :
- chaîne (c) → pignon g (pg)
- " " d (pd)
- ps → S

J'écris le th. des moments en C_d et en projection sur $\vec{z_0}$:

$$\vec{M}_{C_d, c\to pg} \cdot \vec{z_0} + \underbrace{\cancel{\vec{M}_{C_d, c\to pd}} \cdot \vec{z_0}}_{=0} + \vec{M}_{C_d, ps\to s} \cdot \vec{z_0} = 0$$

$$\vec{M}_{C_d, c\to pg} \cdot \vec{z_0} = \cancel{\vec{M}_{C_g, c\to pg}} \cdot \vec{z_0} + (\overbrace{\overrightarrow{C_dC_g}}^{\simeq -(2 \cdot R_p + L) \cdot \vec{x_0}} \wedge (Y_g \vec{y_0})) \cdot \vec{z_0}$$

$$\simeq -2 \cdot \left(R_p + \frac{L}{2}\right) \cdot Y_g$$

$$\vec{M}_{C_d, ps\to s} \cdot \vec{z_0} = \cancel{\vec{M}_{G_s, ps\to s}} \cdot \vec{z_0} + (\overbrace{\overrightarrow{C_dG_s}}^{\simeq (x_{G_s} - (R_p + \frac{L}{2})) \cdot \vec{x_0} + \dots \vec{y_0}} \wedge (-m_s \cdot g \cdot \vec{y_0})) \cdot \vec{z_0}$$

$$\simeq \left(R_p + \frac{L}{2} - x_{G_s}\right) \cdot m_s \cdot g$$

Donc :

$$Y_g = \left[\frac{1}{2} - \frac{x_{G_s}}{2 \cdot R_p + L}\right] \cdot m_s \cdot g$$

Et de la même manière, avec un th. des moments en C_G :

$$Y_d = \left[\frac{1}{2} + \frac{x_{G_s}}{2 \cdot R_p + L}\right] \cdot m_s \cdot g$$

Q19. En déduire l'expression des couples C_r^g et C_r^d.

- Il faut que $-C_r^d \cdot \omega_{m1} = Y_d \cdot v_a$ = Puissance "résistante"

donc $C_r^d = -Y_d \cdot \dfrac{v_a}{\omega_{m1}} = +Y_d \cdot R_p \cdot \dfrac{R_m}{R_r}$

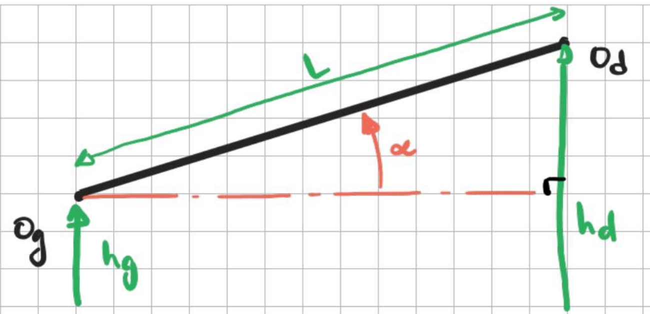
$$C_r^d = \left[\frac{1}{2} + \frac{z_{GS}}{2.R_p + L}\right] \cdot m_S \cdot g \cdot R_p \cdot \frac{R_m}{R_r}$$

- Et de même : $C_r^g = -\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{z_{GS}}{2.R_p + L}\right] \cdot m_S \cdot g \cdot R_p \cdot \dfrac{R_m}{R_r}$

Q20. Exprimer $H_p(p)$ en fonction des caractéristiques du moteur. Préciser l'unité de la grandeur représentée par $P(p)$.

- On a directement : $H_p(p) = \dfrac{R_m + L_m \cdot p}{K_c}$
- P est une tension (Volts).

Q21. Justifier les signes du comparateur ayant pour entrées $h_d(p)$ et $h_g(p)$.



On a donc :

$\sin \alpha = \dfrac{h_d - h_g}{L}$

et $\alpha \ll 1$

Donc : $\alpha \simeq \dfrac{h_d - h_g}{L}$

Q22. Exprimer $h_d(p)$ et $h_g(p)$ en fonction des variables $\varepsilon_c(p)$, $U_v(p)$ et $P_d(p)$ ou $P_g(p)$.

- $h_d(p) = -H_m(p) \cdot \dfrac{R_p}{p} \cdot \left[-\varepsilon_c(p) \cdot K_{adapt} - U_v(p) - P_d(p)\right]$
- $h_g(p) = H_m(p) \cdot \dfrac{R_p}{p} \cdot \left[-\varepsilon_c(p) \cdot K_{adapt} + U_v(p) - P_g(p)\right]$

Q23. Montrer qu'il est alors possible de mettre le schéma-blocs initial sous la forme présentée par la figure 20. Pour cela, exprimer $H_{eq}(p)$ en fonction du contenu des blocs du schéma initial de la figure 19.

On a $\alpha(p) = \frac{1}{L} \cdot (h_d(p) - h_g(p))$

$$= \frac{1}{L} \cdot \Big(+ H_m(p) \cdot \frac{R_f}{p} \cdot \big[+ \varepsilon_c(p) \cdot K_{adapt} + \cancel{\omega_y(p)} + \cancel{P_d(p)} \big]$$

$$- H_m(p) \cdot \frac{R_f}{p} \cdot \big[- \varepsilon_c(p) \cdot K_{adapt} + \cancel{\omega_y(p)} + \cancel{P_d(p)} \big] \Big)$$

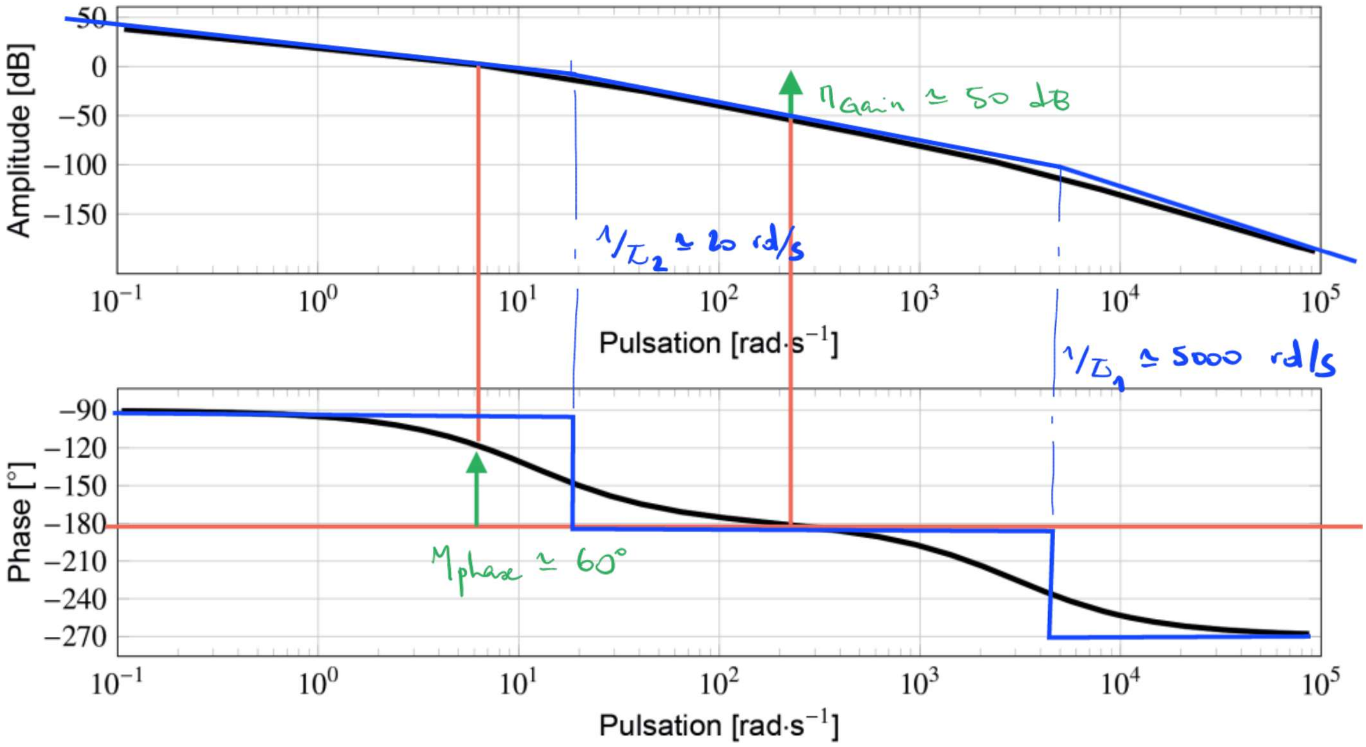
$$\alpha(p) = \underbrace{\left[2 \cdot \frac{H_m(p) \cdot R_f}{L \cdot p} \cdot K_{adapt} \right]}_{= H_{eq}(p)} \cdot \varepsilon_c(p)$$

Q24. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte (notée $H_{BO}(p)$) de ce système en fonction de $H_m(p)$, $C_{orr}(p)$, K_{adapt} et des paramètres géométriques. Préciser son ordre et sa classe si $C_{orr}(p) = 1$.

$$H_{BO}(p) = C_{orr}(p) \cdot H_{eq}(p) = 2 \cdot \frac{H_m(p) \cdot R_f}{L \cdot p} \cdot K_{adapt} \cdot \underbrace{C_{orr}(p)}_{=1}$$

H_m est d'ordre 2 (et classe 0) donc H_{BO} est d'ordre 3 et de classe 1.

Q25. Répondre sur le **DR5** : vérifier si les exigences associées à l'asservissement en inclinaison du robot sont vérifiées. Mettre en place les tracées permettant la vérification des critères considérés.

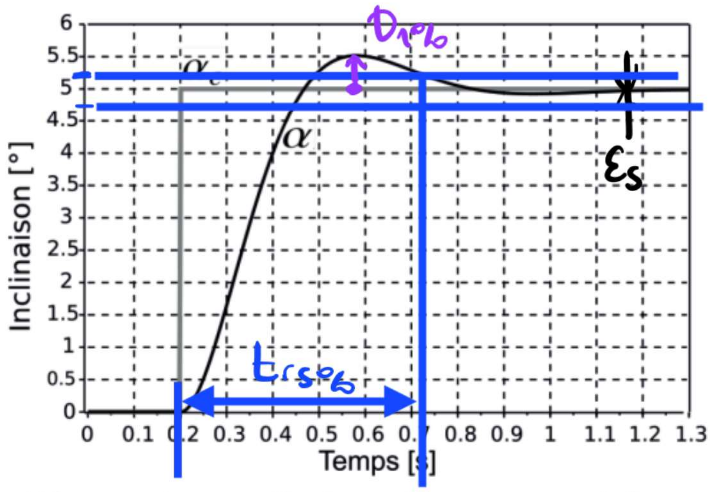


Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée.

Vérification exigences

On a $M_{Gain} > 10$ dB (exigence respectée)

$M_{phase} < 75°$ (exigence NON respectée)



Réponse temporelle du système non corrigé en boucle fermée

Vérification exigences

- Erreur statique $\varepsilon_s = 0$ donc exigence respectée.
- $t_{r5\%} \simeq 0{,}52$ s $> 0{,}1$ s donc exigence NON respectée.
- $D_{1\%} \simeq 10\% \leq 10\%$ donc exigence respectée.

Q26. Sur le **DR5**, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondant aux tracées proposés.

Q27. En déduire les valeurs numériques de τ_1 et de τ_2.

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\tau_2} \simeq 20 \text{ rad/s} \\ \frac{1}{\tau_1} \simeq 5000 \text{ rad/s} \end{array}\right\}$ donc $\tau_2 \simeq 0{,}05$ s et $\tau_1 \simeq 2.10^{-4}$ s

Q29. Donner la valeur de T_i permettant de compenser le pôle dominant de $H_{eq}(p)$ et en déduire la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ sous forme canonique.

On a $T_i = \tau_2$ et dans ce cas :

$$H_{BO}(p) = K_p \cdot \frac{\cancel{1 + T_i \cdot p}}{T_i \cdot p} \cdot \frac{K_{eq}}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (\cancel{1 + \tau_2 \cdot p})}$$

$$H_{BO}(p) = \frac{\frac{K_p \cdot K_{eq}}{T_i}}{p^2 \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}$$

Q30. Justifier le choix d'un tel correcteur.

On voit que la marge de phase est d'environ 5°, il faut donc augmenter la phase, ce que permet ce correcteur.

Q31. Déterminer la valeur de a permettant d'apporter la phase nécessaire au niveau de la pulsation ω_{0dB} visée (20 rad/s) permettant de satisfaire la marge de phase.

- Il faut ajouter environ 70° de phase, il faut donc :

$\sin(\varphi_{max}) = \frac{a-1}{a+1}$ donc $a \cdot \sin\varphi_{max} + \sin\varphi_{max} = a - 1$

donc $a \cdot (1 - \sin\varphi_{max}) = 1 + \sin\varphi_{max}$

donc $a = \frac{1 + \sin\varphi_{max}}{1 - \sin\varphi_{max}} \simeq \frac{1{,}94}{0{,}04} \simeq \frac{2}{0{,}04} \simeq 50 \simeq a$

Q32. En déduire la valeur de T_{av} qu'il faut choisir.

• Il faut aussi $\omega_{0dB} = 20 \text{ rad/s} = \dfrac{1}{T_{av}\cdot\sqrt{a}}$ donc $T_{av} = \dfrac{1}{\omega_{0dB}\cdot\sqrt{a}}$ *

$T_{av} \simeq 0{,}01 \text{ s}$

* $\dfrac{1}{20\cdot\sqrt{50}} \simeq 0{,}05 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{49}} \simeq \dfrac{0{,}05}{7} \simeq \dfrac{0{,}041}{7} \simeq 0{,}01$

Q33. À l'aide de la figure 22, donner une valeur approchée de K_p permettant l'asservissement en position du robot.

• On vérifie :

- $\varepsilon_s = 0$ (toujours vrai)
- $D_{1\%} \leq 10\ \%$ (donc $\alpha_{max} < 5{,}5°$)
- $t_{r5\%} \leq 0{,}1$ s

• La seule valeur de K_p permettant de vérifier ces trois critères est :

$K_p = 3{,}5$

Q34. Sur le **DR**, compléter le script python, à partir de la ligne 35, afin de construire les valeurs de la puissance électrique fournie par la batterie stockées dans le tableau Pbat avec les éléments calculés à partir des données mesurées et des caractéristiques de la batterie en supposant la tension batteries Ubat constante. Compléter la définition de la fonction `energie(p,t)` qui prend en argument deux tableaux p et t contenant les valeurs respectivement de la puissance et des instants d'échantillonnages et qui renvoie l'énergie consommée.

```
29    #Lecture des données depuis le fichier csv
30    for i in range (n):                         # i varie de 0 à n-1
31        # ajout d'un élément au tableau t
32        t.append(float(feuille.cell_value(i+1,0)))
33        # ajout d'un élément au tableau Ibat.
34        Ibat.append(float(feuille.cell_value(i+1,1)))
35        Pbat.append( Ibat[-1] * Ubat )
```

$W = \int_0^t P(t')\,dt'$

```
def energie(p,t):
    W = 0
    for i in range(0, len(t) - 1):
        W = W + p[i]*(t[i+1] - t[i])      # Méthode des rectangles

    return W
```

Q35. À partir des caractéristiques de la batterie données et en considérant une disponibilité de 80 % de sa charge (20 % de sa capacité énergétique ne seront donc pas utilisés), déterminer le temps d'utilisation possible du robot. Vérifier la cohérence de ce résultat avec le cahier des charges donné par le constructeur.

- L'essai a duré $\Delta t = t[3665] - t[0] \simeq 2130 - 1530 \simeq 600$ s $\simeq 10$ minutes et a consommé une énergie $W_{mes} = 42$ kJ

Pour une heure, il faut donc $W_1 = 6 \times W_{mes} \simeq 250$ kJ

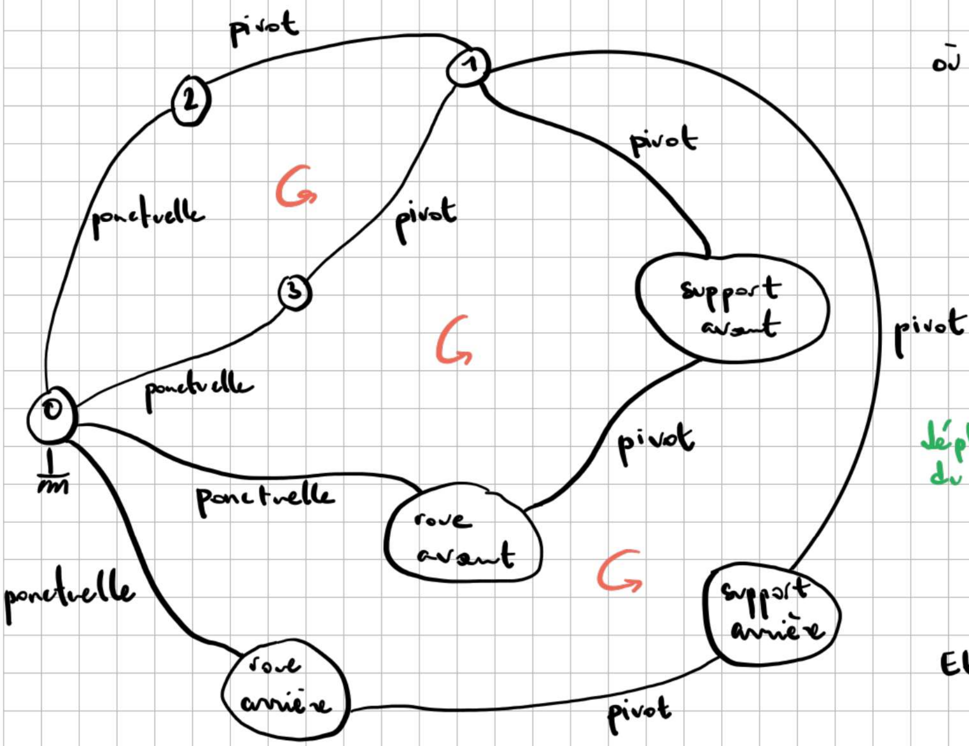
- Ici la batterie a une capacité $C = 37$ A.h $\times$ 12 V $\simeq 444$ W.h $\simeq 450 \times 3{,}600$ kJ* $\simeq 1575$ kJ

*$450 \times (4 - 0{,}5) \simeq 1800 - 225 \simeq 1575$

- Avec 80% de disponible, on a donc $C_{disp} \simeq 1260$ kJ* $\gg W_1$ donc le robot pourra largement fonctionner durant 1 heure.

*$8 \times 1{,}6 \simeq 8 + 4{,}6 \simeq 12{,}6$

Q36. Mettre en place le graphe de liaisons. Nommer les liaisons sans préciser leur caractérisation. Calculer ensuite le degré d'hyperstatisme associé à cette solution.



$h = E_c - I_c + m$

où $E_c = 6 \times 3 = 18$

$I_c = \underbrace{4 \times 5}_{\text{ponctuelles}} + \underbrace{6}_{\text{pivots}} = 26$

$m = 3 + 4 + 2$

déplacement du châssis — rotat° des roues — rotat° des support

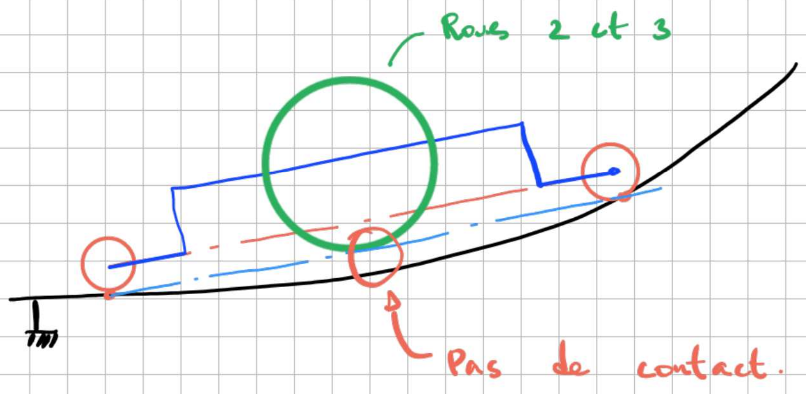
$m = 9$

Et donc $\boxed{h = 1}$

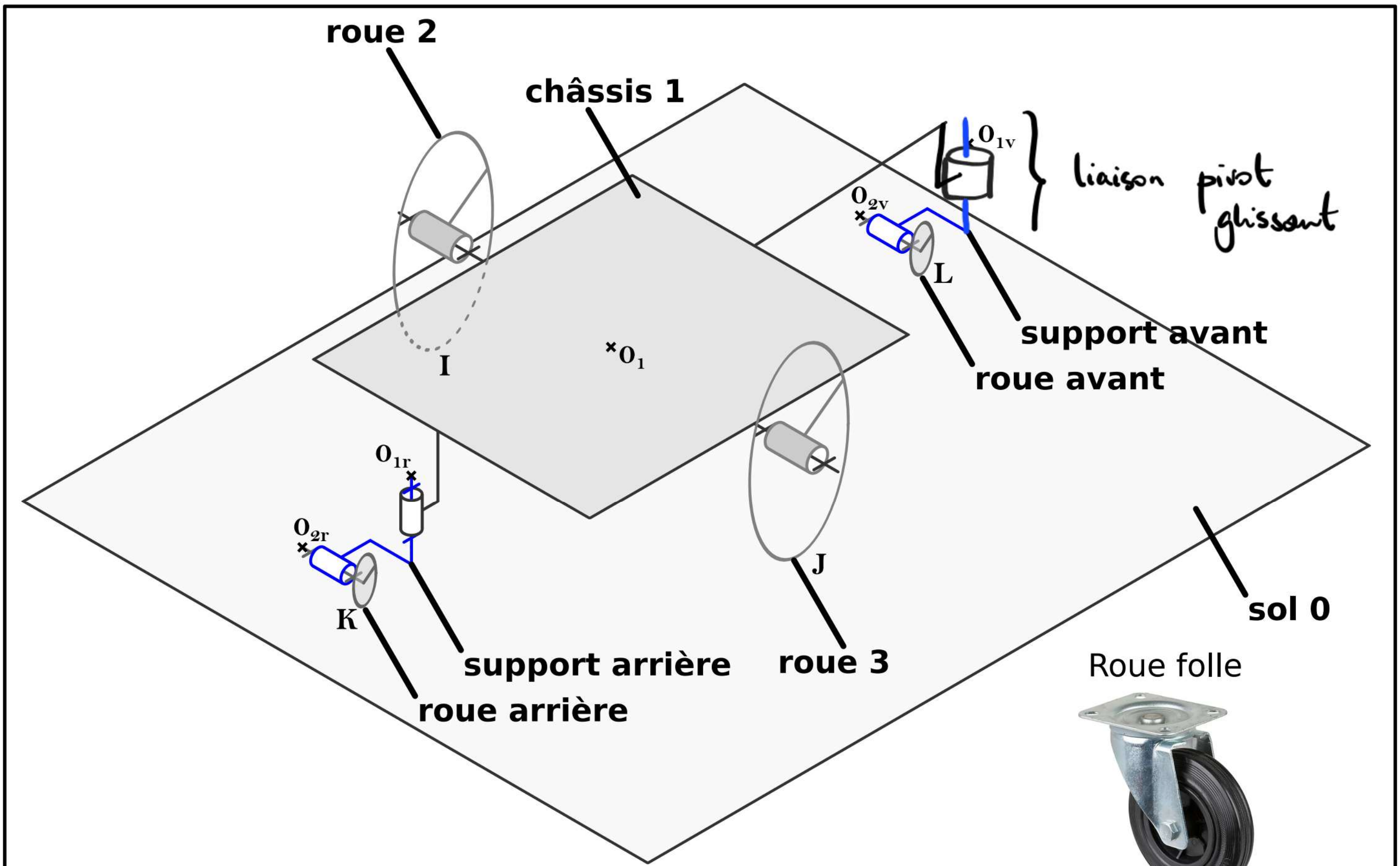
Q37. Montrer, à travers un schéma, qu'un tel mécanisme ne permettrait pas de remonter une rampe telle que celle présentée sur l'image ci-dessous.

La contrainte géométrique (h = 1) est associée à la coplanéité des 4 points de contact.

Avec une rampe



Q38. Proposer une liaison adaptée et représenter cette dernière sur votre document-réponse. Cette liaison pourra par la suite être équipée d'un actionneur ou d'un ressort de rappel pour éviter le basculement, mais la représentation de cet ajout n'est pas demandé ici. Montrer que le mécanisme proposé est alors isostatique.



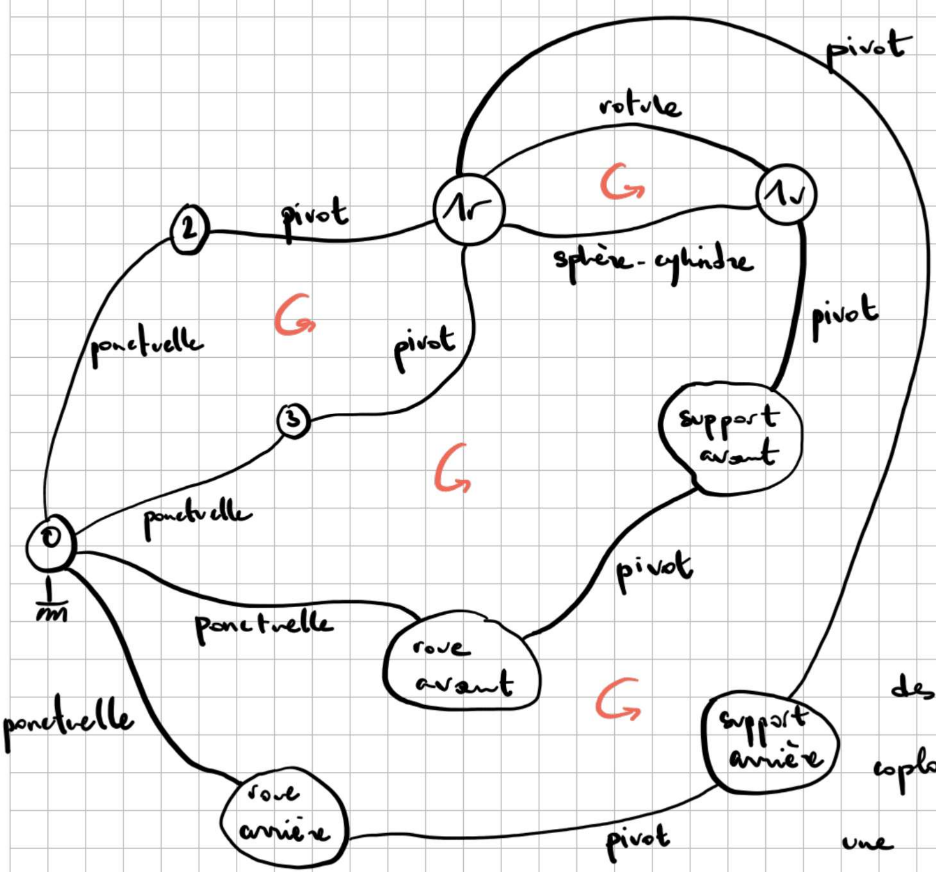
Solution de préconception n°1 - **modifiée**

On a rajouté une inconnue cinématique : $I_c' = I_c + 1 = 27$

Mais on a toujours : $m' = m$ et $E_c' = E_c$.

On a alors : $h' = 0$

Q39. Mettre en place le graphe de liaison. Nommer les liaisons sans préciser leur caractérisation. Calculer ensuite le degré d'hyperstatisme associé à cette solution. Conclure.



$h'' = E_c'' - I_c'' + m''$

où $E_c'' = 6 \times 4 = 24$

$I_c'' = 20 + 6 + 7$
ponctuelles, pivot, rotule et sphère-cylindre

$I_c'' = 33$

$m'' = 3 + 4 + 2$
$= 9$

On a cette fois : $h'' = 0$

Cette solution permet d'avoir des points de contact non-coplanaires et donc de monter une rampe.