

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE *PSI*

SCIENCES INDUSTRIELLES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de cinq parties, toutes indépendantes.

Le sujet comporte :

- Énoncé : 20 pages **et deux pages annexées (diagramme d'état notamment).**
- Document Réponse (DR) : ~~8 pages.~~ **à rendre en fin de devoir. Aucune autre copie ne sera acceptée.**

~~Le Document Réponse doit être rendu dans son intégralité avec la copie (le QR Code doit être collé sur la première page de la copie).~~

Skypod, système automatisé de préparation de commande

Présentation

Le système Skypod est une solution d'aide à la préparation de commande dans des zones de stockage de grande capacité. Il est conçu en France (région Hauts-de-France) par la société Exotec. Sa flexibilité et son adaptabilité en font un leader de son domaine, ce qui a permis à Exotec de devenir en 2022 la première licorne industrielle française (« start-up » valorisée à plus d'un milliard de dollars US). De grands noms internationaux du commerce en ligne ou physique comptent parmi ses principaux clients.

L'une de ses spécificités est son robot manipulateur de bac qui peut évoluer dans les trois dimensions. Il peut ainsi se déplacer sur le sol pour circuler dans les allées et rejoindre les postes de livraison (**figure 1**). Mais il peut également évoluer verticalement pour atteindre les bacs dans lesquels les produits sont stockés (**figure 2**).



Figure 1 - Robot évoluant horizontalement



Figure 2 - Robot évoluant verticalement

Quatre composants permettent de mettre en œuvre cette solution (**figure 4**) :

- la flotte de robots qui transporte les bacs entre opérateurs et zones de stockage ;
- les racks, permettant de stocker les bacs, et dont le positionnement et la structure permettent les déplacements horizontaux et verticaux des robots ;
- les stations qui permettent aux opérateurs de déposer et récupérer les produits dans les bacs apportés par les robots ;
- le serveur permettant de gérer la flotte de robots en lien avec les consignes données par les stations.

Ce sujet s'intéresse particulièrement aux déplacements du robot. Un extrait du cahier des charges est donné sous forme de diagramme d'exigence par la **figure 25** de l'**annexe 2**.

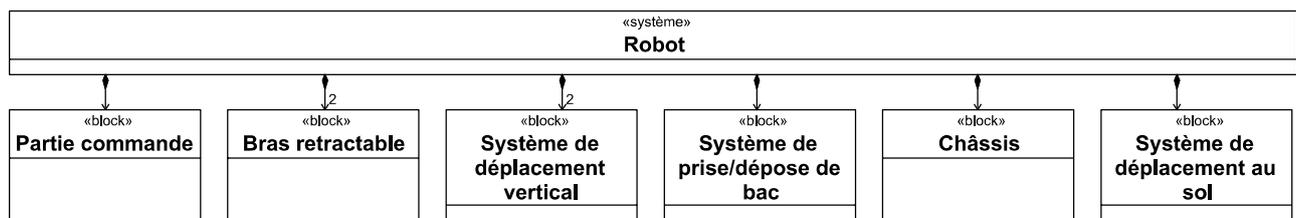


Figure 3 - Diagramme de définition de blocs d'un robot Skypod

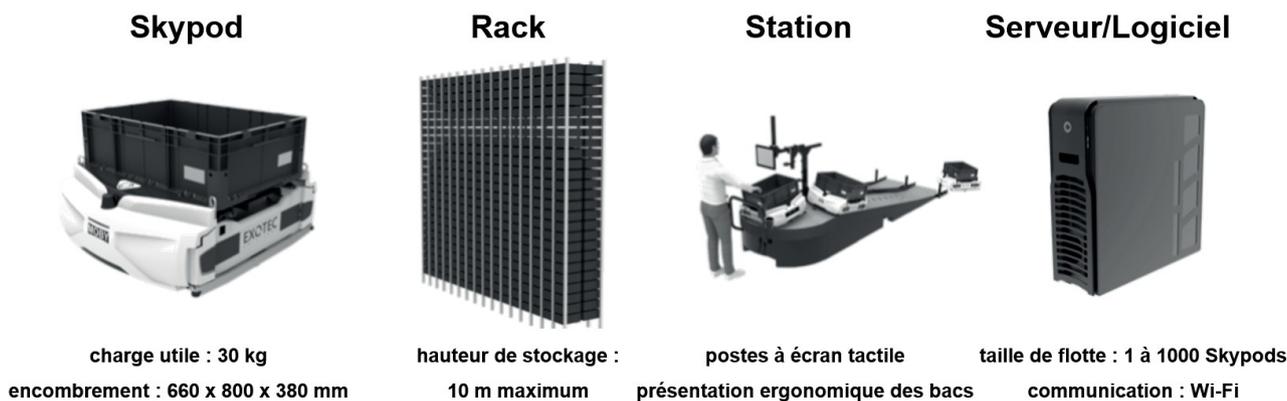


Figure 4 - Principaux composants de la solution Skypod

Analyse structurelle du robot

La structure du robot est présentée **figure 3**. Ce robot est constitué d'un *châssis* et de différents sous-systèmes.

- La *partie commande* contrôle le robot, communique avec le serveur et fournit des consignes aux autres sous-systèmes.
- Le *système de déplacement au sol* permet au robot de se déplacer au sein de l'entrepôt. Il est composé de deux roues motrices (droite et gauche) commandées par deux moteurs et de deux autres roues libres permettant de garantir une bonne stabilité au sol (**figure 1**).
- Deux *systèmes de déplacement vertical* (droit et gauche) permettent au robot de s'élever entre les racks afin d'atteindre une hauteur donnée. Ils entraînent quatre pignons situés dans chaque coin du robot qui eux-même engrènent sur des chaînes tendues verticalement le long des racks (**figure 2** et **figure 13**). La liaison pignon/chaîne se comporte comme une liaison pignon/crémaillère.
- Deux *systèmes de bras rétractables* facilitent le déplacement au sol, chaque système de déplacement vertical est positionné sur un bras rétractable. Ils sont rentrés au sein du châssis lors des déplacements au sol, puis sortis lors des déplacements verticaux afin que les pignons entrent en contact avec les chaînes tendues. Un robot ne peut donc évoluer horizontalement qu'au sol.
- Un *système de prise et dépose de bac* translate le bac de sa position de stockage dans le rack à sa position de transport sur le robot (ou inversement). Il est constitué d'une fourche télescopique qui se déploie (**figure 5** et **figure 6**) afin de se positionner sous le bac, puis rentre en déplaçant le bac avec elle.



Figure 5 - Prise d'un bac (fourche sous le bac dans un rack)

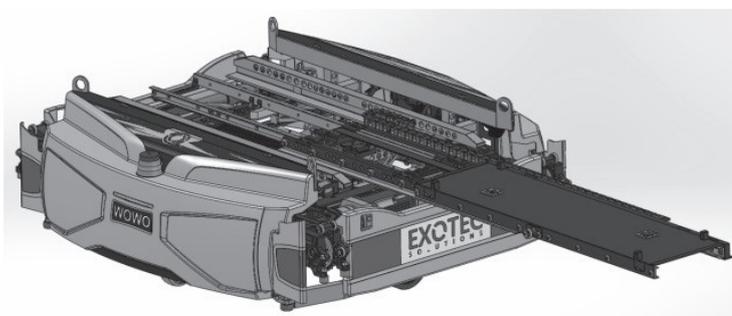


Figure 6 - Fourche déployée

Partie I - Déroulement d'une préparation de commande

Objectif : étudier le comportement séquentiel du robot lors d'une préparation de commande.

Une préparation de commande se déroule en plusieurs étapes. Après réception de la demande, un traitement est effectué afin d'affecter les tâches à réaliser à un ou plusieurs robots (en fonction du nombre de produits demandés) et à un opérateur situé sur une station. Le ou les robots vont ensuite chercher les bacs contenant les produits nécessaires à la commande et les rapportent à la station. Enfin, l'opérateur effectue la mise en carton et expédie la commande.

Le déplacement d'un robot lui permettant d'aller prendre un bac s'effectue en plusieurs phases. Le robot se déplace d'abord au sol de sa position de départ jusqu'au pied de la rangée verticale du rack qui contient le bac à prendre. Une fois en position, ses bras rétractables sortent, ce qui permet aux pignons motorisés d'engrener sur les chaînes tendues verticalement, générant ainsi l'ascension du robot. Pour prendre un bac, le robot s'immobilise de façon à ce que la surface de la fourche soit située 5 cm en-dessous du fond du bac. La fourche télescopique est alors sortie. Puis le robot monte de 10 cm, la fourche est ensuite rentrée afin de translater le bac sur le robot. Le robot peut désormais descendre jusqu'au sol, puis rentrer ses bras rétractables et se déplacer de nouveau au sol jusqu'à la station.

Le comportement séquentiel du robot est décrit par le diagramme d'état donné par la **figure 1** du **document réponse (DR)**. Le **tableau 1** fournit la description des ordres des moteurs et le **tableau 2** les informations reçues par la partie commande. Dans cette partie, les durées des phases d'accélération et de décélération sont négligées pour tous les mouvements.

Ordres moteurs	Rôle	Valeurs
Système de déplacement au sol : M_RoueG M_RoueD	Consigne de vitesse de la roue gauche Consigne de vitesse de la roue droite	Valeurs continues entre $-V_{max}$ et V_{max}
Bras rétractables : M_BrasG M_BrasD	Déplacement du bras gauche Déplacement du bras droit	0 pas de déplacement +1 sortie des bras -1 rentrée des bras
Système de déplacement vertical : M_PignonG M_PignonD	Consignes de vitesse des pignons gauches Consignes de vitesse des pignons droits	GV : grande vitesse PV : petite vitesse - GV / - PV : descente + GV / + PV : montée
Fourche télescopique : M_Fourche	Déplacement de la fourche	0 pas de déplacement +1 sortie de la fourche -1 rentrée de la fourche

Tableau 1 - Variables de sortie de la partie commande

Informations	Rôle
Capteurs fin de course (détecteur) : BrasG_sorti et BrasG_rentré BrasD_sorti et BrasD_rentré Fourche_sortie et Fourche_rentrée	Leur sortie vaut 1 si la position détectée est atteinte, 0 sinon Capteurs du bras rétractable gauche Capteurs du bras rétractable droit Capteurs de la fourche
Position courante du robot : alt_courante pos_courante	position verticale du robot position au sol du robot
Position à atteindre : bac (bac = 0 → prise de bac) pos_finale etag	présence de bac sur le robot (mission de prise ou de dépose de bac) position au sol d'arrivée numéro d'étagère (0 = étagère du bas) où se situe le bac à prendre

Tableau 2 - Variables d'entrée de la partie commande

On s'intéresse au scénario d'un robot allant chercher un bac sur l'étagère 1 (etag = 1). On notera que la distance verticale entre deux étagères est de 40 cm. Pour ce scénario, le temps est discrétisé $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec un pas de temps $t_{k+1} - t_k = \Delta t$ constant. On notera les constantes suivantes :

Temps de rentrée/sortie de la fourche	$2 \cdot \Delta t$
Temps de rentrée/sortie des bras rétractables	$2 \cdot \Delta t$
Valeurs de consigne pour le déplacement vertical	$GV = 5 / \Delta t \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $PV = \frac{1}{2} GV$

Q1. Compléter le chronogramme sur le **DR1** en suivant le scénario suivant :

- à t_0 , le robot reçoit une nouvelle destination (pos_finale et etag sont connus);
- à t_1 , le calcul de l'itinéraire est fini et le robot commence à se déplacer vers sa destination *pos_finale*, sa trajectoire est en ligne droite ($M_{RoueG} = M_{RoueD}$) et la consigne est de V_{max} ;
- à t_3 le robot arrive à *pos_finale* et commence à sortir les bras ;
- le robot monte et récupère le bac, puis redescend au sol ;
- une fois au sol, le robot retourne à sa position de départ (consigne de $-V_{max}$).

Partie II - Trajectoire du robot en phase de déplacement au sol

Objectif : étudier le comportement cinématique du robot en phase de déplacement au sol.

Pour ses déplacements au sol, le robot possède deux roues motrices **2** et **3** insérées dans deux chaînes de puissance différentes (et donc entraînées par deux moteurs différents). Pour assurer la stabilité au sol, deux autres roues laissées libres de leurs mouvements (dites « folles ») sont associées à un mécanisme permettant aux quatre roues d'être en contact avec le sol en permanence.

On s'intéresse à une trajectoire composée d'un segment droit, d'une courbe permettant au robot de tourner d'un quart de tour vers la gauche, puis d'un dernier segment droit (**figure 7**).

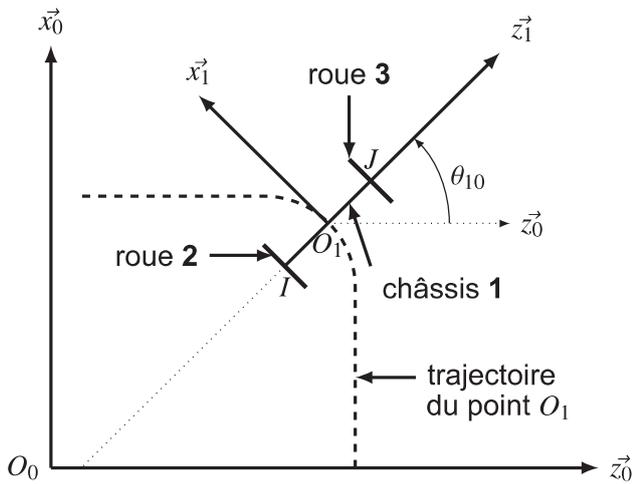


Figure 7 - Paramétrage du robot au sol

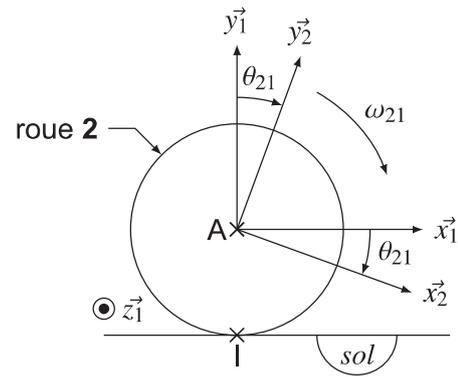


Figure 8 - Paramétrage de la roue 2 en contact avec le sol en I

Le robot est vu comme un ensemble de trois solides : le châssis 1, la roue gauche 2 en contact avec le sol 0 au point I et la roue droite 3 en contact avec le sol 0 au point J.

Les roues 2 et 3 sont en liaison pivot d'axe respectivement (A, \vec{z}_1) et (B, \vec{z}_1) avec le châssis 1 et on considérera qu'il y a roulement sans glissement de la roue 2 (respectivement roue 3) par rapport au sol 0 en I (respectivement en J). Pour des raisons de simplification, les roues « folles » ne sont pas étudiées ou représentées mais imposent que le châssis 1 ne peut être en rotation que selon \vec{y}_1 .

On définit :

- $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le référentiel supposé galiléen lié au sol 0. On notera que \vec{y}_0 est donc la verticale ascendante ;
- $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le référentiel lié au châssis 1, avec $\theta_{10} = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$, $\omega_{10}(t) = \frac{d\theta_{10}(t)}{dt}$ et la vitesse du robot $\vec{V}(O_1 \in 1/0) = V(t)\vec{x}_1$;
- $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le référentiel lié à la roue gauche 2, avec A le centre de la roue, $R = 20$ mm son rayon, $\theta_{21}(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ et $\omega_{21}(t) = \frac{d\theta_{21}(t)}{dt}$ (figure 8) ;
- $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le référentiel lié à la roue droite 3, avec B le centre de la roue, $R = 20$ mm son rayon, $\theta_{31}(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ et $\omega_{31}(t) = \frac{d\theta_{31}(t)}{dt}$ (paramétrage analogue à la roue 2) ;
- L la largeur du robot : $\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{O_1B} = \frac{L}{2}\vec{z}_1$.

Q2. À l'aide de la condition de roulement sans glissement en I, donner la relation entre $V(t)$, $\omega_{21}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

Q3. Par un raisonnement analogue, donner directement la relation entre $V(t)$, $\omega_{31}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

Q4. En déduire $\omega_{10}(t)$ en fonction de $\omega_{21}(t)$ et de $\omega_{31}(t)$.

On s'intéresse dans un premier temps à une trajectoire rectiligne. On note $\omega_{moy}(t)$ la vitesse de rotation des roues pour cette trajectoire pour une vitesse $V(t) = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Q5. Démontrer que pour une trajectoire rectiligne, $\omega_{21}(t) = \omega_{31}(t)$. En déduire $\omega_{moy}(t)$ et donner sa valeur.

On s'intéresse dans un deuxième temps à la réalisation du virage de 90° vers la gauche (figure 7). Pour cela, on fait varier la vitesse ω_{21} par une loi en trapèze et la vitesse ω_{31} par une seconde loi en

trapèze telle que $\dot{\omega}_{21}(t) = -\dot{\omega}_{31}(t)$, avec $\dot{\omega}_{21}$ et $\dot{\omega}_{31}$ les accélérations angulaires des roues 2 et 3 par rapport au châssis 1.

Q6. Donner dans ces conditions l'expression de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{10}(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{21}(t)$.

Ces lois de commande de vitesse des roues aboutissent à l'évolution de $\omega_{10}(t)$ au cours d'un virage de 90° donnée **figure 9**. La norme de l'accélération angulaire pendant les phases 1 et 3 est constante et notée γ_{10} .

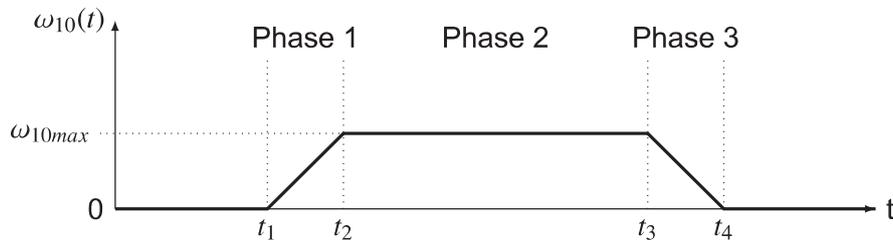


Figure 9 - Évolution de ω_{10} lors d'un virage de 90°

Q7. En faisant l'hypothèse que $t_1 = 0$, donner les expressions littérales de t_2 , de t_3 et de t_4 en fonction de ω_{10max} , de γ_{10} et de $\Delta\theta = 90^\circ$.

On propose plusieurs simulations de trajectoire pour différentes valeurs de ω_{10max} dont le point de départ est de coordonnées (0,0) (**figure 10**). À des fins de comparaison, la **figure 11** présente ces trajectoires en version normalisée (point de départ et d'arrivée de coordonnées (0,0) et (-1,1)).

Q8. À l'aide des **figure 10** et **figure 11**, commenter l'influence de ω_{10max} sur la trajectoire du robot lors d'un virage.

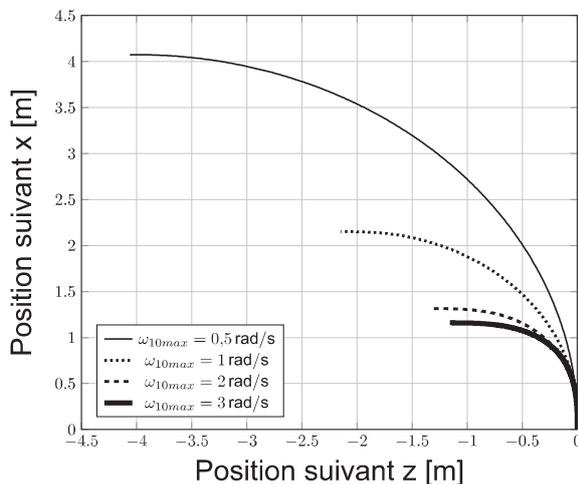


Figure 10 - Trajectoires selon plusieurs valeurs de ω_{10max}

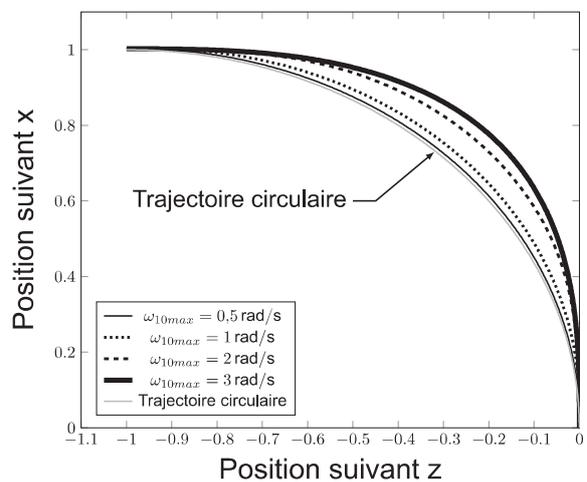


Figure 11 - Trajectoires normalisées selon plusieurs valeurs de ω_{10max}

Partie III - Sollicitation du robot en mouvement vertical

Objectif : déterminer la puissance des moteurs nécessaire pour assurer le mouvement vertical du robot.

Une fois le robot positionné aux pieds des racks, les bras rétractables sont déployés afin de mettre en contact les pignons sur les chaînes tendues le long des poteaux constituant les racks. La rotation des pignons entraînera alors l'ascension du robot, **figure 12** et **figure 13**.

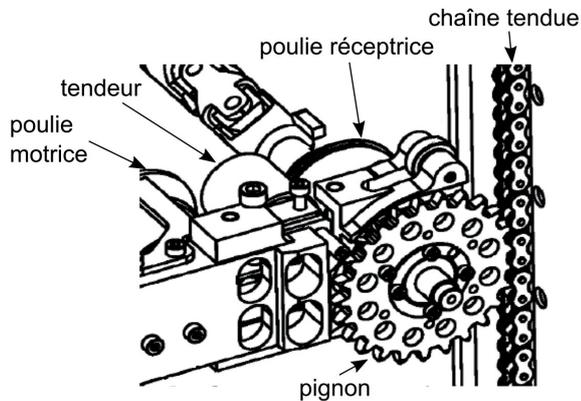


Figure 12 - Détail de l'engrènement d'un pignon sur la chaîne



Figure 13 - Vue du robot en montée (sans charge ni bac), avec pignons et chaînes re-dessinés

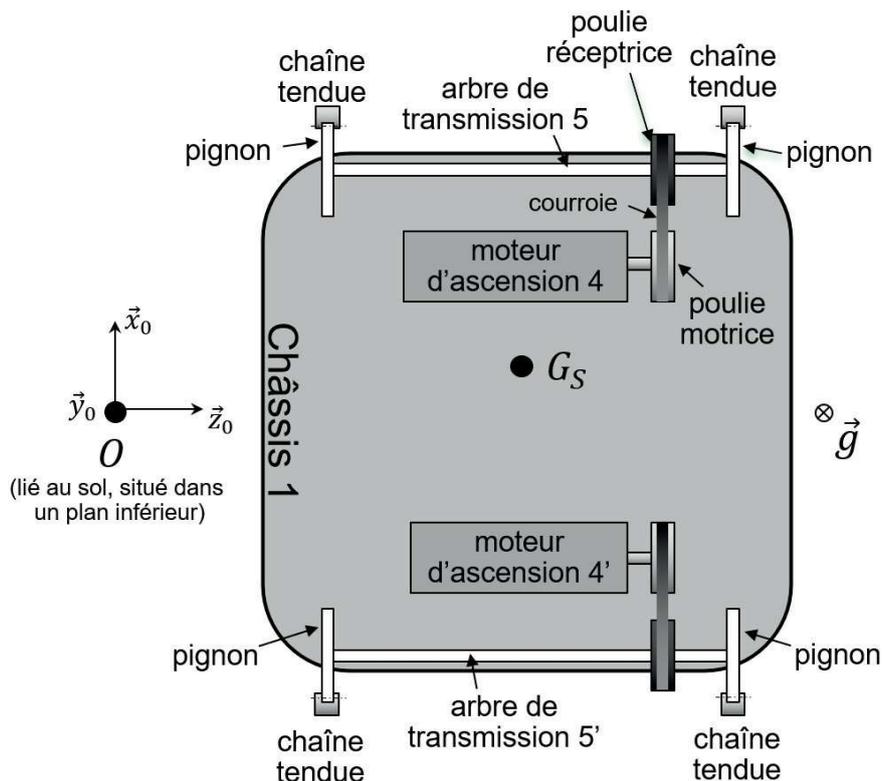


Figure 14 - Schématisation de la chaîne de puissance associée à l'ascension du robot. Vue de dessus du robot, pesanteur selon $-\vec{y}_0$.

La structure de la chaîne de puissance permettant l'ascension du robot est schématisée **figure 14**. Elle est composée de deux ensembles similaires, chacun étant constitué d'un moteur d'ascension et

d'un système poulie/courroie dont la poulie motrice est liée à l'arbre de sortie du moteur et la poulie réceptrice à un arbre de transmission. Ce dernier supporte également les deux pignons qui engrènent sur les chaînes tendues. La rotation des pignons va donc permettre de générer le mouvement vertical du robot. Un système annexe, non étudié ni représenté ici, permet de s'assurer que les pignons soient toujours en prise dans les chaînes.

Hypothèses et paramétrage

- On note $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le référentiel supposé galiléen lié au sol **0**.
- On note S l'ensemble des pièces en mouvement :

$S = \{\text{Châssis 1} + \text{Moteurs} + \text{Systèmes Poulie/Courroie} + \text{Arbres transmission} + \text{Pignons} + \text{Bac rempli}\}$, de masse m_S et de centre d'inertie G_S , tel que :

$$\vec{OG}_S = x_{G_S} \vec{x}_0 + y_{G_S}(t) \vec{y}_0 + z_{G_S} \vec{z}_0.$$

La position du centre de gravité n'est pas le centre géométrique du robot car la masse transportée est potentiellement excentrée.

- Le mouvement du châssis **1** par rapport au sol **0** est une translation de vitesse $v_a(t) \vec{y}_0 = \dot{y}_{G_S}(t) \vec{y}_0$. Ainsi $v_a(t)$ est la vitesse d'ascension du robot.
- On définit les vitesses de rotation du moteur **4** et de l'arbre de transmission **5** par rapport au châssis **1** par respectivement $\vec{\Omega}_{m/1} = \omega_{m1}(t) \vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{51}(t) \vec{z}_0$. Les vitesses de rotation du moteur **4'** ($\vec{\Omega}_{m'/1} = \omega_{m'1}(t) \vec{z}_0$) et de l'arbre de transmission **5'** ($\vec{\Omega}_{5'/1} = \omega_{5'1}(t) \vec{z}_0$) sont opposées respectivement à celles de **4** et de **5**.
- L'action mécanique du moteur **4** est modélisée par un torseur couple dont le moment sur son axe de rotation vaut $C_m(t)$. On suppose ici que les deux moteurs délivrent le même couple, mais en sens opposés.
- Les différents frottements (internes et externes) sont ramenés sur l'axe de rotation de chaque arbre de transmission et sont modélisés par un moment constant $C_f \vec{z}_0$ sur l'arbre **5**, $C'_f \vec{z}_0$ sur l'arbre **5'**. Ces deux couples sont opposés aux vitesses de rotation des arbres **5** et **5'**, de sorte que la valeur numérique de C_f est de signe opposé à celui de $\omega_{51}(t)$ et que la valeur numérique de C'_f est de signe opposé à celui de $\omega_{5'1}(t)$.
- On note respectivement R_m , R_r et R_p les rayons d'enroulement des poulies motrices et réceptrices et le rayon primitif des pignons.
- On note respectivement J_m et J_5 les moments d'inertie selon leurs axes de rotation d'un arbre moteur (poulie comprise) et d'un arbre de transmission (poulie et roues dentées comprises).
- L'attraction de pesanteur est portée par $-\vec{y}_0$ de sorte que $\vec{g} = -g \vec{y}_0$.
- L'inertie de la courroie est négligée.
- Le châssis inclut la batterie, les cartes électroniques et la connectique.

Q9. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique $E_c(S/\mathcal{R}_0)$ de l'ensemble S par rapport au repère \mathcal{R}_0 .

La liaison entre un pignon et une chaîne correspond à un roulement sans glissement sur le rayon primitif R_p du pignon.

Q10. Exprimer le vecteur de la vitesse d'ascension du robot $v_a(t) \vec{y}_0$ en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre moteur $\omega_{m1}(t)$. *****

Q11. En déduire l'expression de l'inertie équivalente notée J_{eq} de l'ensemble S rapportée à l'arbre moteur, en fonction de m_S , J_m , J_5 et des grandeurs géométriques. *Cela signifie donc que l'on pourra écrire $E_c(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_{m1}(t)^2$.*

***** **On prendra garde au signe de v_a en fonction du signe de ω_{m1} .**

- Q12.** Déterminer l'expression de la somme des puissances extérieures (galiléennes) et intérieures à l'ensemble S . On ne fera apparaître que $\omega_{m1}(t)$ comme variable cinématique.
- Q13.** Dédire des questions précédentes, en justifiant rigoureusement, l'expression du couple moteur $C_m(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{m1}(t)$ et des grandeurs caractéristiques constantes du système.

On donne **figure 15** le profil de vitesse choisi pour l'évolution de la vitesse verticale du robot pour un cycle de montée/descente et dans le **tableau 3** les valeurs numériques associées. On souhaite déterminer l'évolution correspondante du couple moteur.

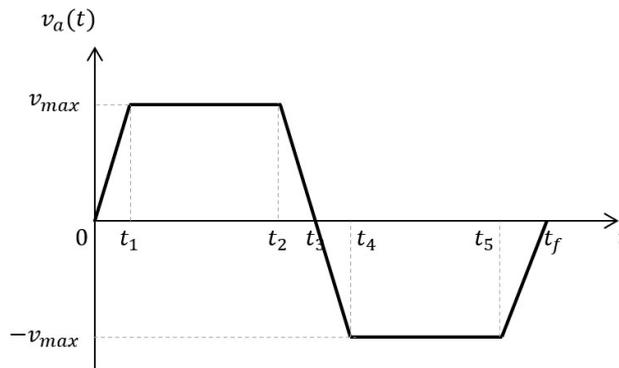


Figure 15 - Pilotage adopté pour la vitesse d'ascension pour un cycle de montée/descente

Données	
$R_m = R_r = 30 \text{ mm}$	$t_1 = 2 \text{ s}$
$ C_f = C'_f = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$	$t_2 = 8 \text{ s}$
$J_{eq} = 1,14 \cdot 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	$t_3 = 10 \text{ s}$
$R_p = 38 \text{ mm}$	$t_4 = 12 \text{ s}$
$v_{max} = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	$t_5 = 18 \text{ s}$
$m_s = 78 \text{ kg}$	$t_f = 20 \text{ s}$

Tableau 3 - Valeurs numériques utiles

- Q14.** Compléter le **DR2** en traçant l'évolution de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{m1}(t)$ au cours du temps.
- Q15.** Tracer sur le **DR3** l'évolution de C_f au cours du temps.

Il est alors possible, grâce aux travaux précédents, de calculer l'évolution du couple moteur $C_m(t)$ pour les différentes phases (**tableau 4**).

intervalle	de 0 à t_1	de t_1 à t_2	de t_2 à t_3	de t_3 à t_4	de t_4 à t_5	de t_5 à t_f
$C_m(t)$	-17 N·m	-15,5 N·m	-14 N·m	-12 N·m	-13,5 N·m	-15 N·m

Tableau 4 - Évolution de $C_m(t)$ au cours du temps.

D'après les exigences, le moteur envisagé pour la motorisation est capable de fournir une puissance mécanique de 1 000 W.

- Q16.** Après avoir précisé l'instant correspondant, déterminer la valeur numérique de la puissance maximale que le moteur devra développer pour assurer le mouvement étudié. Conclure quant au choix du moteur envisagé.

Partie IV - Asservissement de l'assiette du robot

Objectif : modéliser et mettre au point l'asservissement de l'inclinaison du robot.

Cette partie s'intéresse au contrôle de l'inclinaison du robot lors de la phase d'ascension, repérée par son angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale, noté $\alpha(t)$. Cette phase est schématisée **figure 16**, dans le cas horizontal ($\alpha = 0$) et dans le cas incliné ($\alpha \neq 0$). Les pignons sont ramenés dans le plan médian. Pour rappel, un sous-système non étudié ici permet de garantir le contact pignon/chaîne.

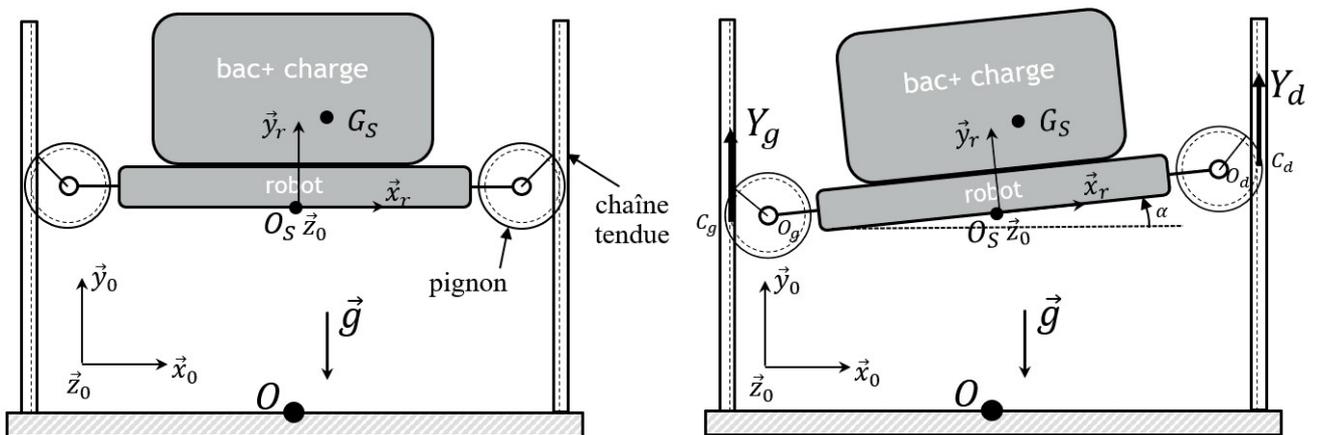


Figure 16 - Schématisation du robot en phase d'ascension, dans la configuration horizontale (à gauche) et inclinée (à droite).

On présente **figure 17** la structure générale de l'asservissement associée à la phase étudiée. Cette inclinaison est modifiée grâce au différentiel de vitesse et de position des pignons gauche et droit. Un inclinomètre mesurant l'inclinaison du robot permet au calculateur de gérer l'asservissement.

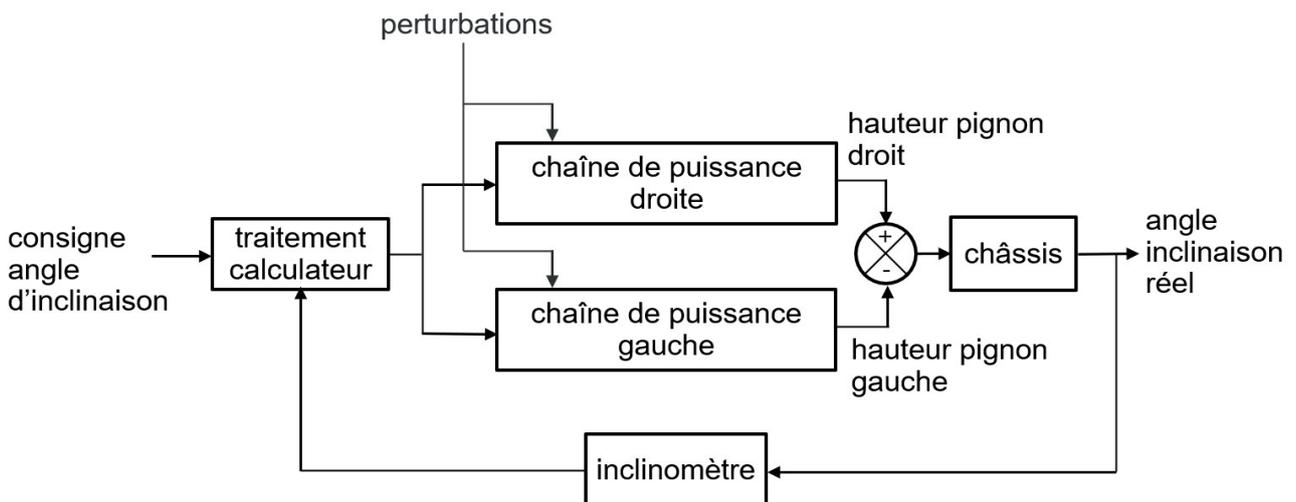


Figure 17 - Structure générale de l'asservissement en inclinaison du robot en phase d'ascension.

IV.1 - Modélisation de la motorisation

Un moteur d'ascension peut se modéliser comme une machine à courant continu dont on rappelle les équations :

$$u_m(t) = e(t) + R_m i_m(t) + L_m \frac{di_m(t)}{dt} ; e(t) = K_e \omega_{m1}(t) ; C_m(t) = K_c i_m(t) ; J_{eq} \frac{d\omega_{m1}(t)}{dt} = C_m(t) - C_r - C_f(t)$$

et dont les notations sont détaillées **tableau 5**. Le schéma-blocs correspondant est ébauché dans le **DR4**. Les notations des variables dans le domaine de Laplace sont répertoriées dans le **tableau 6**.

Variables	Constantes
$u_m(t)$: tension moteur (V)	$R_m = 3 \Omega$: résistance de l'induit
$i_m(t)$: intensité moteur (A)	$L_m = 1 \text{ mH}$: inductance de l'induit
$e(t)$: force contre-électromotrice (V)	$K_c = 2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$: constante de couple
$C_m(t)$: couple électromagnétique (N·m)	$K_e = 2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$: constante électrique
C_r : couple résistant dû à la pesanteur ramené sur l'arbre moteur (N·m)	$J_{eq} = 1, 14 \cdot 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$: inertie équivalente des pièces mobiles entraînées par le moteur, ramené sur l'arbre moteur
$C_f(t)$: couple résistant dû à l'ensemble des frottements secs ramené sur l'arbre moteur (N·m)	

Tableau 5 - Variables et valeurs numériques utiles

Notation temporelle	Notation Laplace	Notation temporelle	Notation Laplace
$e(t)$	$E(p)$	$u_m(t)$	$U_m(p)$
$i_m(t)$	$I_m(p)$	$\omega_{m1}(t)$	$\Omega_{m1}(p)$
$C_m(t)$	$C_m(p)$	$C_f(t)$	$C_f(p)$
échelon unitaire	$\frac{1}{p}$	C_r	$\frac{C_r}{p}$

Tableau 6 - Notations dans le domaine de Laplace

Q17. Compléter les blocs du **DR4** au niveau des « ... », avec les fonctions de transfert et variables manquantes dans le schéma-blocs du moteur.

Afin de prédire au mieux le comportement du robot, il est nécessaire de modéliser avec plus de précision le couple résistant C_r que subit chaque moteur. On ne s'intéresse d'abord qu'au moteur droit. La démarche est identique pour le moteur gauche.

Hypothèses et paramétrage

- On note $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le référentiel supposé galiléen lié au sol.
- On note S l'ensemble des pièces en mouvement :
 $S = \{\text{Châssis 1+Moteurs+Systèmes Poulie/Courroie+Arbres transmission+Pignons+Bac rempli}\}$, de masse m_S .
- L'attraction de la pesanteur est notée $-g\vec{y}_0$.
- On note α l'angle d'inclinaison du robot et $\mathcal{R}_0(O_S, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_0)$ le référentiel lié au robot, tel que $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_r) = (\vec{y}_0, \vec{y}_r)$.
- On supposera que l'angle α reste très petit.
- On note G_S le centre d'inertie de l'ensemble S , tel que $\overrightarrow{OG}_S = \overrightarrow{O\tilde{O}_S} + \overrightarrow{O_S G_S}$ avec $\overrightarrow{O\tilde{O}_S} = h\vec{y}_0$ et $\overrightarrow{O_S G_S} = x_{G_S}\vec{x}_r + y_{G_S}\vec{y}_r$. La position du centre de gravité n'est pas le centre géométrique du robot car la masse transportée est potentiellement excentrée.

- On note O_g et O_d les centres des pignons gauche et droit ramenés dans le plan d'étude. On note C_g et C_d les points d'engrènement entre les pignons et les chaînes, de sorte que :

$$\overrightarrow{O_g O_S} = \frac{L}{2} \vec{x}_r - a \vec{y}_r, \overrightarrow{O_S O_d} = \frac{L}{2} \vec{x}_r + a \vec{y}_r, \overrightarrow{O_g O_d} = L \vec{x}_r, \overrightarrow{C_g O_g} = \overrightarrow{O_d C_d} = R_p \vec{x}_r.$$
- Les actions mécaniques aux points C_g et C_d seront modélisées par les glisseurs simplifiés suivants :

$$\left\{ \mathcal{T}^{C_g}_{\text{chaîne} \rightarrow \text{pignon gauche}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_g} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathcal{T}^{C_d}_{\text{chaîne} \rightarrow \text{pignon droit}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_d \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_d}.$$

- Le couple résistant C_r dû à la pesanteur sera distingué pour chaque moteur. On note C_r^g le couple résistant appliqué à l'arbre moteur gauche et C_r^d pour le moteur droit.

Il est rappelé que compte tenu du fait que les rayons primitifs des poulies sont identiques et que la transmission est considérée comme parfaite, tout se passe comme si chaque moteur était directement en prise sur l'arbre du pignon correspondant.

Q18. En se plaçant à l'équilibre statique et en précisant la démarche, déterminer les expressions de Y_g et Y_d en fonction de m_S , g , L , R_p et de x_{G_S} . On rappelle que l'angle α est supposé très petit.

Q19. En déduire l'expression des couples C_r^g et C_r^d .

La fonction de transfert du moteur sans perturbation s'écrit :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_{m1}(p)}{U_m(p)} = \frac{1/K_e}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K_e K_c} p + \frac{LJ_{eq}}{K_e K_c} p^2}.$$

Il est alors possible de modifier le schéma-blocs initial du moteur (**DR4**), avec perturbation, pour le mettre sous la forme proposée **figure 18**, dans laquelle $P(p)$ dépend du signal dû à la perturbation $C_f(p) + \frac{C_r}{p}$.

Q20. Exprimer $H_p(p)$ en fonction des caractéristiques du moteur. Préciser l'unité de $P(p)$.

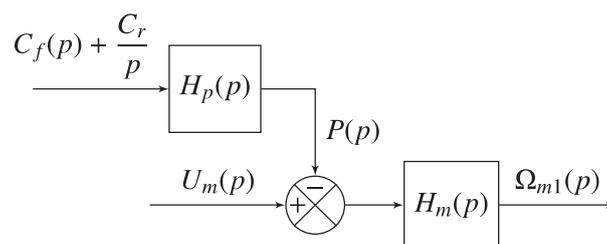


Figure 18 - Schéma-blocs modifié du moteur

Dans la suite, le signal $P(p)$ sera distingué en un signal $P_d(p)$ pour le moteur droit et $P_g(p)$ pour le moteur gauche.

IV.2 - Mise en place et correction de l'asservissement

Les activités précédentes permettent de mettre en place la modélisation complète de l'asservissement en inclinaison du robot dans la phase d'ascension (**figure 19**) en considérant que l'angle d'inclinaison reste petit. Les différentes variables dans le domaine de Laplace introduites sont détaillées dans le **tableau 7**.

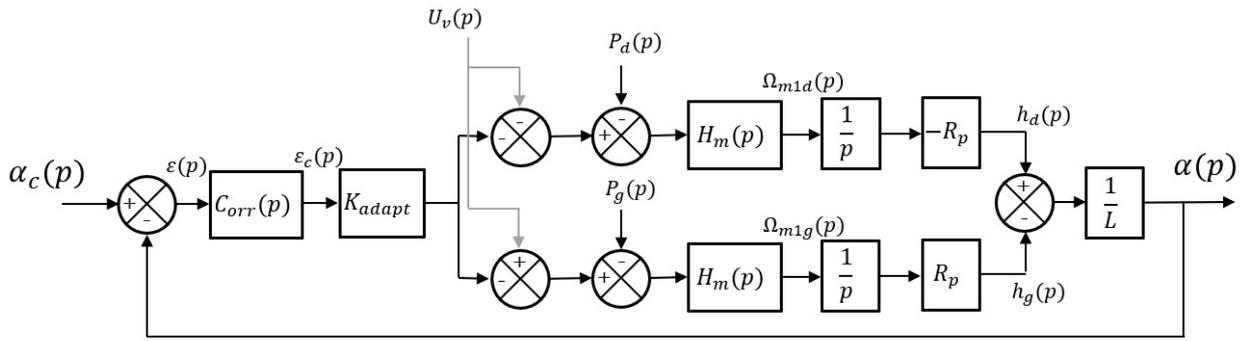


Figure 19 - Schéma-blocs de l'asservissement en inclinaison, en phase de mouvement vertical

Variables	
$\alpha_c(p)$: consigne angulaire d'inclinaison	$\alpha(p)$: angle d'inclinaison du robot
$\varepsilon(p)$: écart	$\Omega_{m1d}(p)$: vitesse de rotation moteur droit
$\varepsilon_c(p)$: écart corrigé	$\Omega_{m1g}(p)$: vitesse de rotation moteur gauche
$P_g(p)$: perturbation moteur gauche	$P_d(p)$: perturbation moteur droit
$h_g(p)$: altitude point O_g	$h_d(p)$: altitude point O_d
$U_v(p)$: tension de consigne correspondant à la vitesse d'ascension souhaitée	K_{adapt} : gain adaptateur
Fonctions de transfert	
$H_m(p)$: fonction de transfert du moteur	$C_{orr}(p)$: correcteur
R_p : rayon primitif du pignon	$L = \ \overrightarrow{O_g O_d}\ $

Tableau 7 - Définition des variables et fonctions de transfert (dans le domaine de Laplace)

Q21. Justifier les signes du comparateur ayant pour entrées $h_d(p)$ et $h_g(p)$.

Q22. Exprimer $h_d(p)$ et $h_g(p)$ en fonction des variables $\varepsilon_c(p)$, $U_v(p)$ et $P_d(p)$ ou $P_g(p)$.

On suppose maintenant que la charge contenue dans le bac est centrée sur le robot, c'est-à-dire $P_d(p) = -P_g(p)$.

Q23. Montrer qu'il est alors possible de mettre le schéma-blocs initial sous la forme présentée par la figure 20. Pour cela, exprimer $H_{eq}(p)$ en fonction du contenu des blocs du schéma initial de la figure 19.

Q24. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte (notée $H_{BO}(p)$) de ce système en fonction de $H_m(p)$, $C_{orr}(p)$, K_{adapt} et des paramètres géométriques. Préciser son ordre et sa classe si $C_{orr}(p) = 1$.

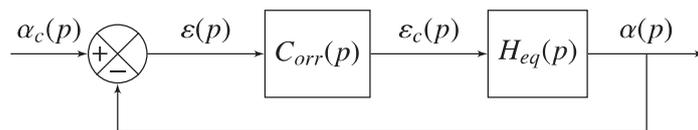


Figure 20 - Schéma-blocs simplifié de l'asservissement en inclinaison

On donne sur le DR5 la réponse fréquentielle (en boucle ouverte) et la réponse indicielle (en boucle fermée) du système non corrigé (c'est-à-dire pour $C_{orr}(p) = 1$). Attention les courbes sont sur les pages 5/8 et 6/8 du document réponse.

Q25. Répondre sur le **DR5** : vérifier si les exigences associées à l'asservissement en inclinaison du robot sont vérifiées. Mettre en place les tracés permettant la vérification des critères considérés.

Quels que soient les résultats précédents, la fonction de transfert $H_{eq}(p)$ sera désormais prise de la forme :

$$H_{eq}(p) = \frac{K_{eq}}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \text{ avec } \tau_2 > \tau_1 .$$

Q26. Sur le **DR5**, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondant aux tracés proposés.

Q27. En déduire les valeurs numériques de τ_1 et de τ_2 .

Afin d'améliorer les performances de l'asservissement, on se propose d'introduire un correcteur de type proportionnel intégral : $C_{orr}(p) = K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p}$.

~~**Q28.** Justifier le choix d'un tel correcteur.~~

AIDE : Cela revient simplement à choisir $T_i = \tau_2$.

Q29. Donner la valeur de T_i permettant de compenser le pôle dominant de $H_{eq}(p)$ et en déduire la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ sous forme canonique.

Les diagrammes de Bode obtenus avec la valeur de T_i déterminée **Q29** sont tracés **figure 21**, en prenant $K_p = 1$.

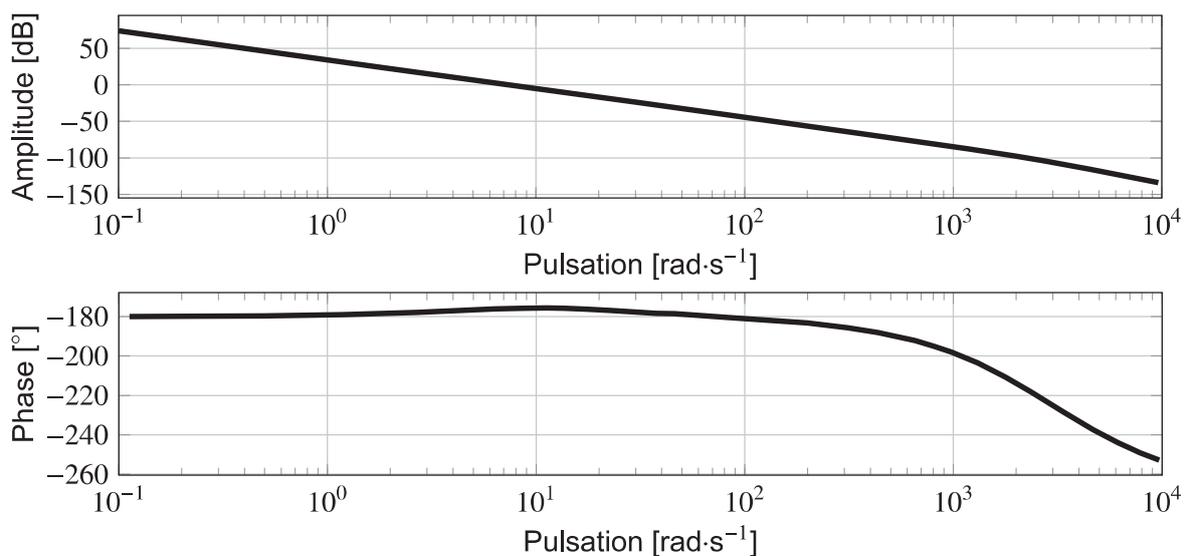


Figure 21 - Diagrammes de Bode avec correcteur PI ($K_p = 1$ et T_i choisi **Q29**)

On décide maintenant d'associer au correcteur précédent un correcteur à avance de phase (voir **annexe 1, page 19**) de paramètres a et T_{av} , de sorte que :

$$C_{orr}(p) = K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p} \cdot \frac{1 + a T_{av} p}{1 + T_{av} p} \text{ avec } a > 1 .$$

Q30. Justifier le choix d'un tel correcteur.

Q31. Déterminer la valeur de a permettant d'apporter la phase nécessaire au niveau de la pulsation ω_{0dB} visée ($20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) permettant de respecter la marge de phase.

Q32. En déduire la valeur de T_{av} qu'il faut choisir.

Le dernier réglage à effectuer est celui de K_p . Pour cela, on exploite une simulation numérique paramétrique, qui donne les résultats **figure 22**.

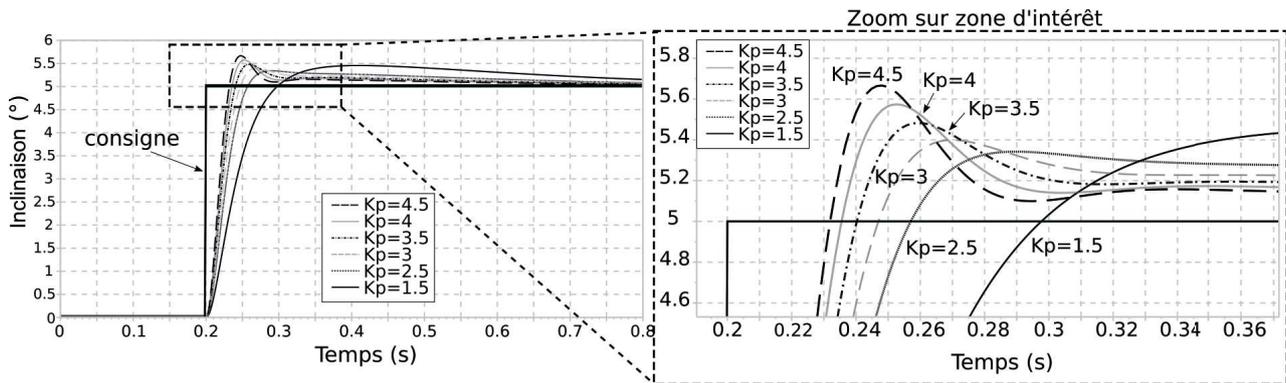


Figure 22 - Réponse indicielle pour différentes valeurs de K_p

Q33. À l'aide de la **figure 22**, donner une valeur approchée de K_p permettant de respecter les exigences observables. Préciser ces exigences.

Les travaux précédents permettent de régler au mieux le correcteur permettant l'asservissement en inclinaison du robot.

Partie V - Conception et choix technologiques

Dans cette dernière partie, on souhaite définir les contraintes géométriques associées à la conception du robot. Il s'agit notamment de dimensionner les éléments suivants :

- les batteries : en lien avec le critère d'autonomie imposant un fonctionnement d'une heure.
- la cinématique du robot en déplacement horizontal.

V-1- Dimensionnement des batteries

Afin de valider les batteries choisies, un essai a été réalisé. Durant cet essai, le robot s'est déplacé dans l'entrepôt et a réalisé les tâches demandées.

La tension aux bornes de la batterie est de 12 V. Le relevé temporel du courant fourni par la batterie est enregistré dans un fichier de données au format " CSV " dont un extrait est présenté ci-contre.

Ces résultats ont été exploités par un programme Python dont le script partiel est donné sur la page suivante.

Celui-ci définit trois tableaux notés I_{bat} , P_{bat} et t , qui contiennent respectivement les valeurs numériques du courant fourni par la batterie (en A), de la puissance disponible en sortie de la batterie (en W) ainsi que des instants échantillonnés (en s).

1	Time (s)	Current actual value [A]
2	0.041	0
3	0.1	208
4	0.159	0
5	0.218	0
6	0.277	0

Le concepteur envisage l'utilisation d'une batterie ayant une capacité de 37 A.h. On rappelle qu'un Wattheure peut être exprimé en Joules : $1 \text{ W.h} = 3\,600 \text{ J}$. On cherche à valider ce choix technologique.

Script Python fourni pour construire les tableaux Ibat, Pbat et t.

```
7 # import fonctions tracé
8 from scipy import *
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import xlrd
11
12
13 # Chemin d'accès au fichier mesure Levage.csv
14 path = r"D:\test.CSV"
15
16 # Définition Classeur - Feuille
17 classeur = xlrd.open_workbook(path)
18 feuille = classeur.sheet_by_index(0)
19
20 # Définitions des constantes
21 n = 3666 #n représente le nombre d'échantillons.
22 Ubat = 12 V
23
24 # Définitions des variables sous forme de tableaux
25 t = []
26 Pbat = []
27 Ibat = []
28
29 # Lecture des données depuis le fichier excel
30 for i in range(n): #i varie de 0 à n-1
31     #ajout d'un élément au tableau t
32     t.append(float(feuille.cell_value(i+1,0)))
33     #ajout d'un élément au tableau Ibat
34     Ibat.append(float(feuille.cell_value(i+1,1)))
```

Q34. Sur le **DR**, compléter le script python, à partir de la ligne 35, afin de construire les valeurs de la puissance électrique fournie par la batterie stockées dans le tableau Pbat avec les éléments calculés à partir des données mesurées et des caractéristiques de la batterie en supposant la tension batteries Ubat constante. Compléter la définition de la fonction energie(p,t) qui prend en argument deux tableaux p et t contenant les valeurs respectivement de la puissance et des instants d'échantillonnages et qui renvoie l'énergie consommée.

L'exécution de cette fonction python donne l'énergie consommée lors de l'essai : $W_{mes} = 42 \text{ kJ}$.

Il est également possible d'accéder à :

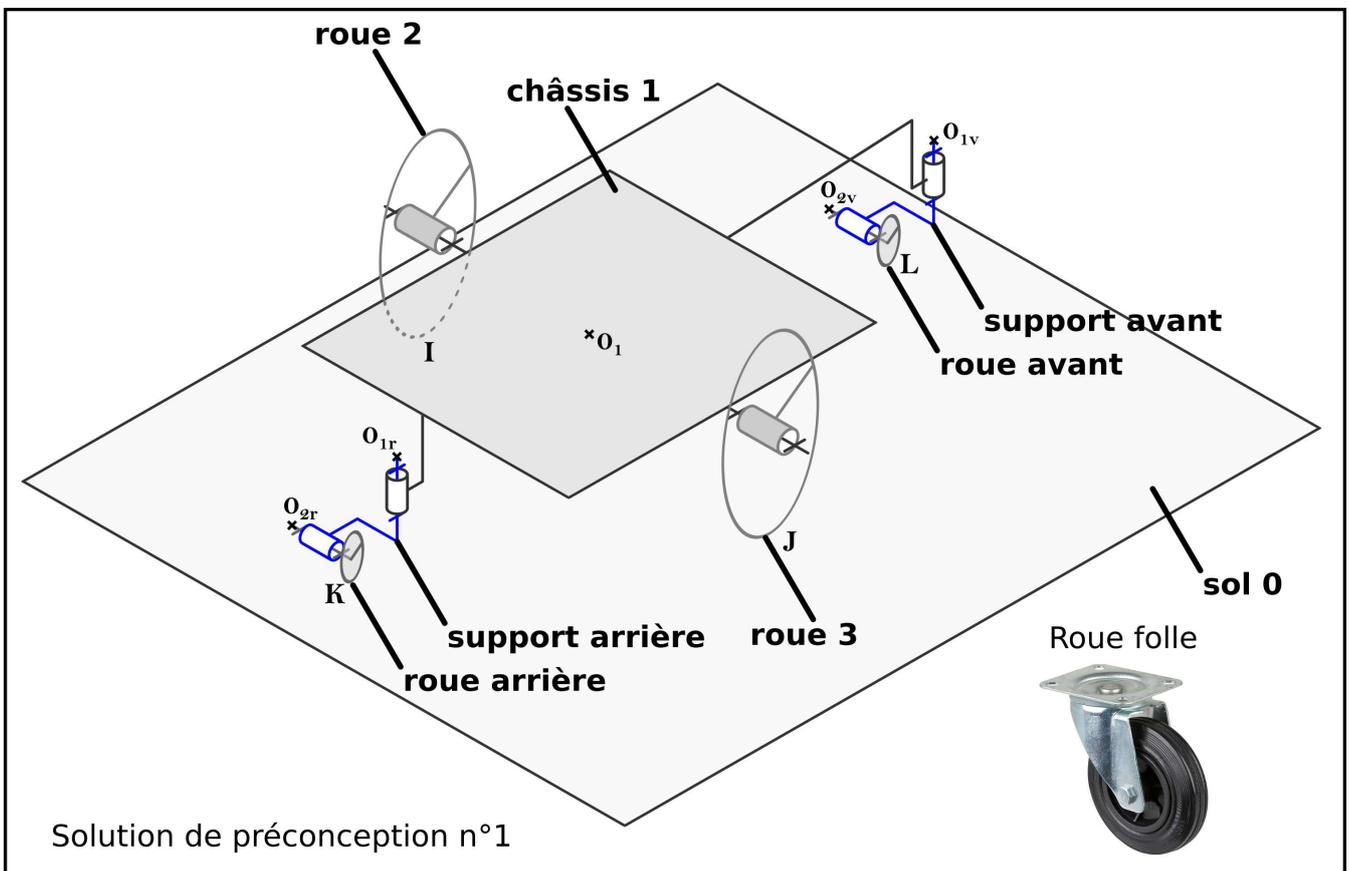
- . t[0] qui renvoie alors 1534.56 et
- . t[3665] qui renvoie 2132.12 .

Q35. À partir des caractéristiques de la batterie données et en considérant une disponibilité de 80 % de sa charge (20 % de sa capacité énergétique ne seront donc pas utilisés), déterminer le temps d'utilisation possible du robot. Vérifier la cohérence de ce résultat avec le cahier des charges donné par le constructeur.

V-2- Dimensionnement de la cinématique du robot

On donne, sur la page suivante, une proposition de cinématique, nommée "préconception n°1", pour le déplacement horizontal du robot.

Le robot est alors muni de deux roues " folles ", l'une à l'avant et l'autre à l'arrière du Skypod.



Dans cette solution :

- les contacts entre le sol et les roues sont des contacts ponctuels ;
- toutes les liaisons sont des liaisons pivots.

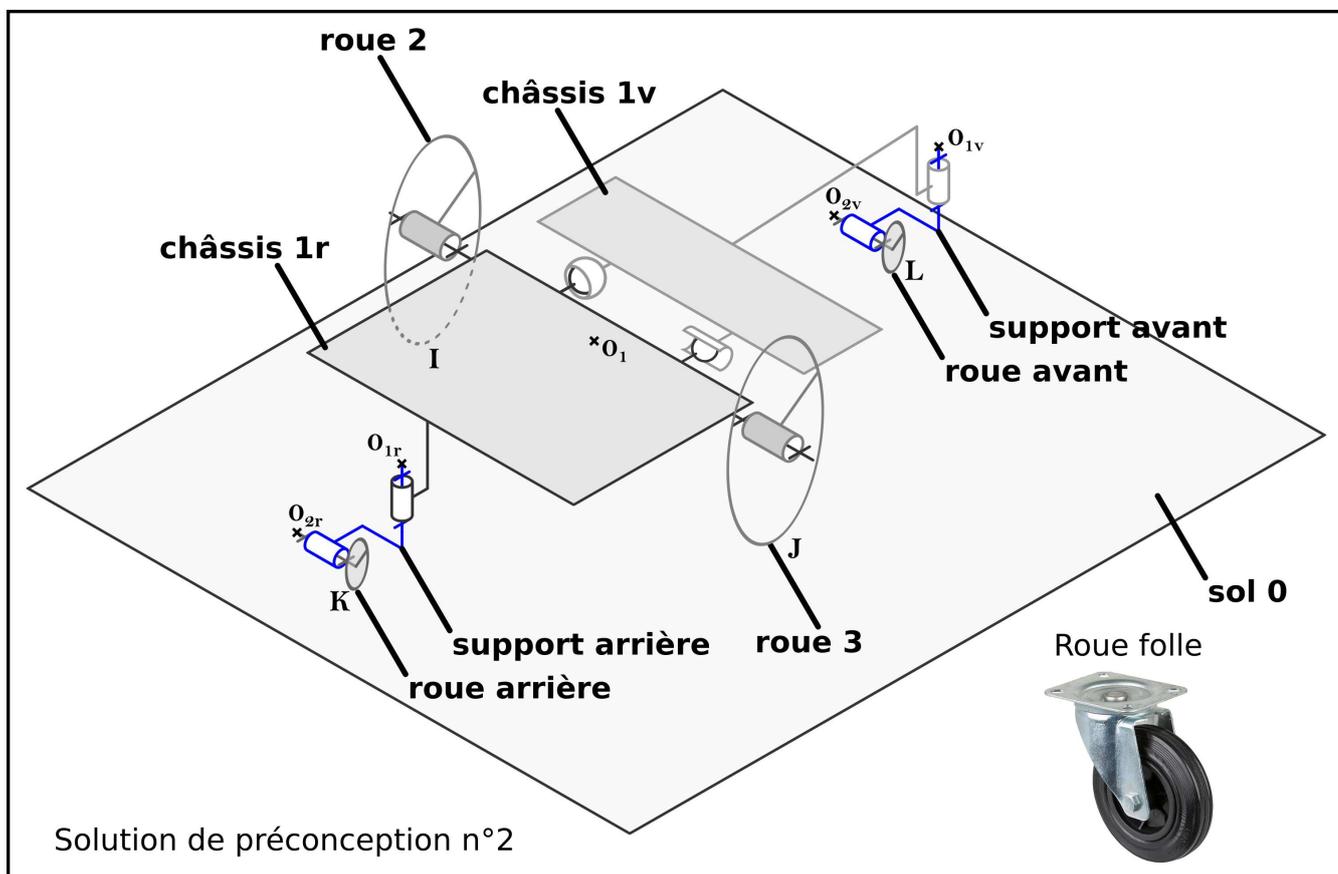
Q36. Mettre en place le graphe de liaison. Nommer les liaisons sans préciser leur caractérisation. Calculer ensuite le degré d'hyperstatisme associé à cette solution.

Q37. Montrer, à travers un schéma, qu'un tel mécanisme ne permettrait pas de remonter une rampe telle que celle présentée sur l'image ci-dessous.



On se propose de modifier la liaison entre le châssis et le support avant pour palier le problème constaté.

Q38. Proposer une liaison adaptée et représenter cette dernière sur votre document-réponse. Cette liaison pourra par la suite être équipée d'un actionneur ou d'un ressort de rappel pour éviter le basculement, mais la représentation de cet ajout n'est pas demandé ici. Montrer que le mécanisme proposé est alors isostatique.



Une autre solution est proposée ci-dessus. Ici, le châssis est composé de deux parties notées 1r et 1v assemblées par une liaison rotule et une liaison sphère-cylindre. Le reste du mécanisme est inchangé.

Q39. Mettre en place le graphe de liaison. Nommer les liaisons sans préciser leur caractérisation. Calculer ensuite le degré d'hyperstatisme associé à cette solution. Conclure.

ANNEXE 1

Caractéristiques du correcteur à avance de phase

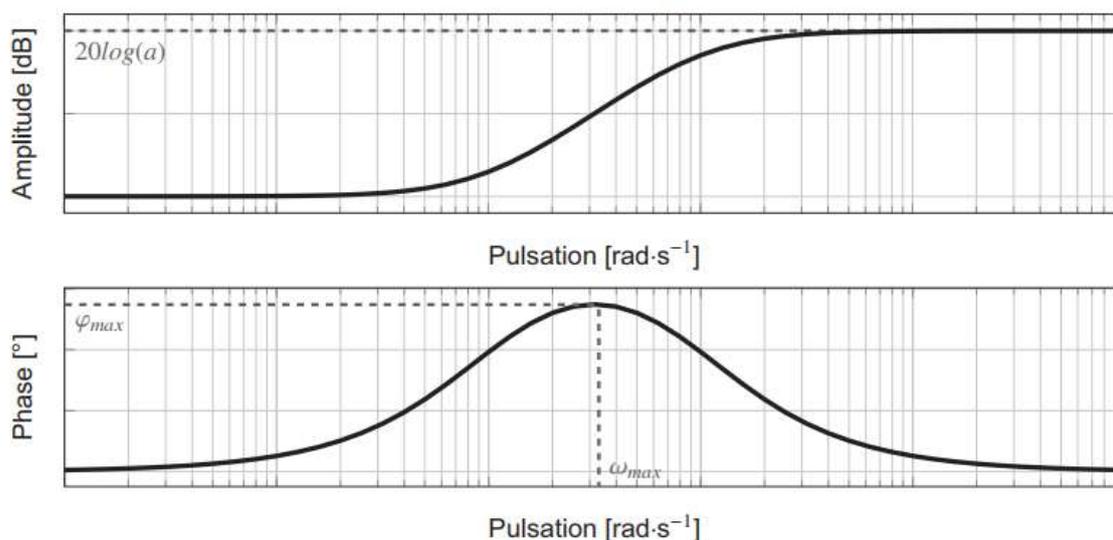


Figure 24 - Diagrammes de Bode du correcteur à avance de phase (sans gain) $\frac{1 + aT_{av}p}{1 + T_{av}p}$

$$\text{avec : } a > 1, \sin(\varphi_{max}) = \frac{a-1}{a+1} \text{ et } \omega_{max} = \frac{1}{T_{av} \sqrt{a}}$$

ANNEXE 2

Extrait du cahier des charges du robot

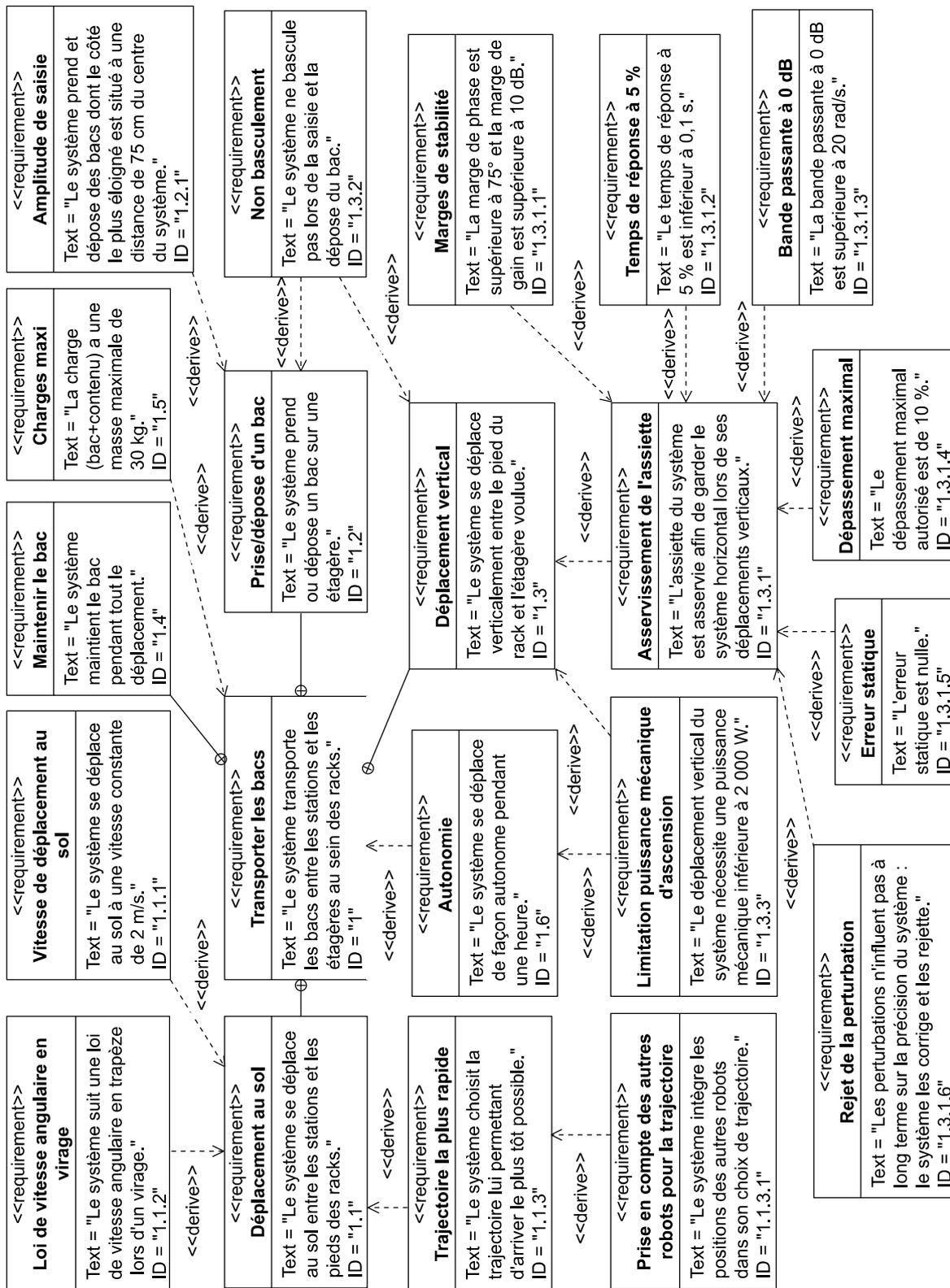


Figure 25 - Diagramme d'exigence extrait du cahier des charges du robot



Numéro d'inscription

Numéro de table

Né(e) le

Nom : _____

Prénom : _____

Emplacement
QR Code

Filière : **MP**

Session : **2024**

Épreuve de : **SCIENCES INDUSTRIELLES**

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

MP7SI

DOCUMENT RÉPONSE

**Ce Document Réponse doit être rendu dans son intégralité avec la copie
(le QR Code doit être collé sur la première page de la copie).**

Diverses syntaxes en Python

Python	
<code>L.insert(pos,val)</code>	insère la valeur <code>val</code> en position <code>pos</code> dans la liste <code>L</code>
<code>[e for e in r if cond]</code>	crée une liste et insère les éléments <code>e</code> contenus dans <code>r</code> si <code>e</code> respecte la condition (<code>cond</code> prend la valeur <code>True</code>).
<code>{k : v for k in r}</code>	crée un dictionnaire et insère les clés <code>k</code> contenues dans <code>r</code> en les associant à la valeur <code>v</code> .

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

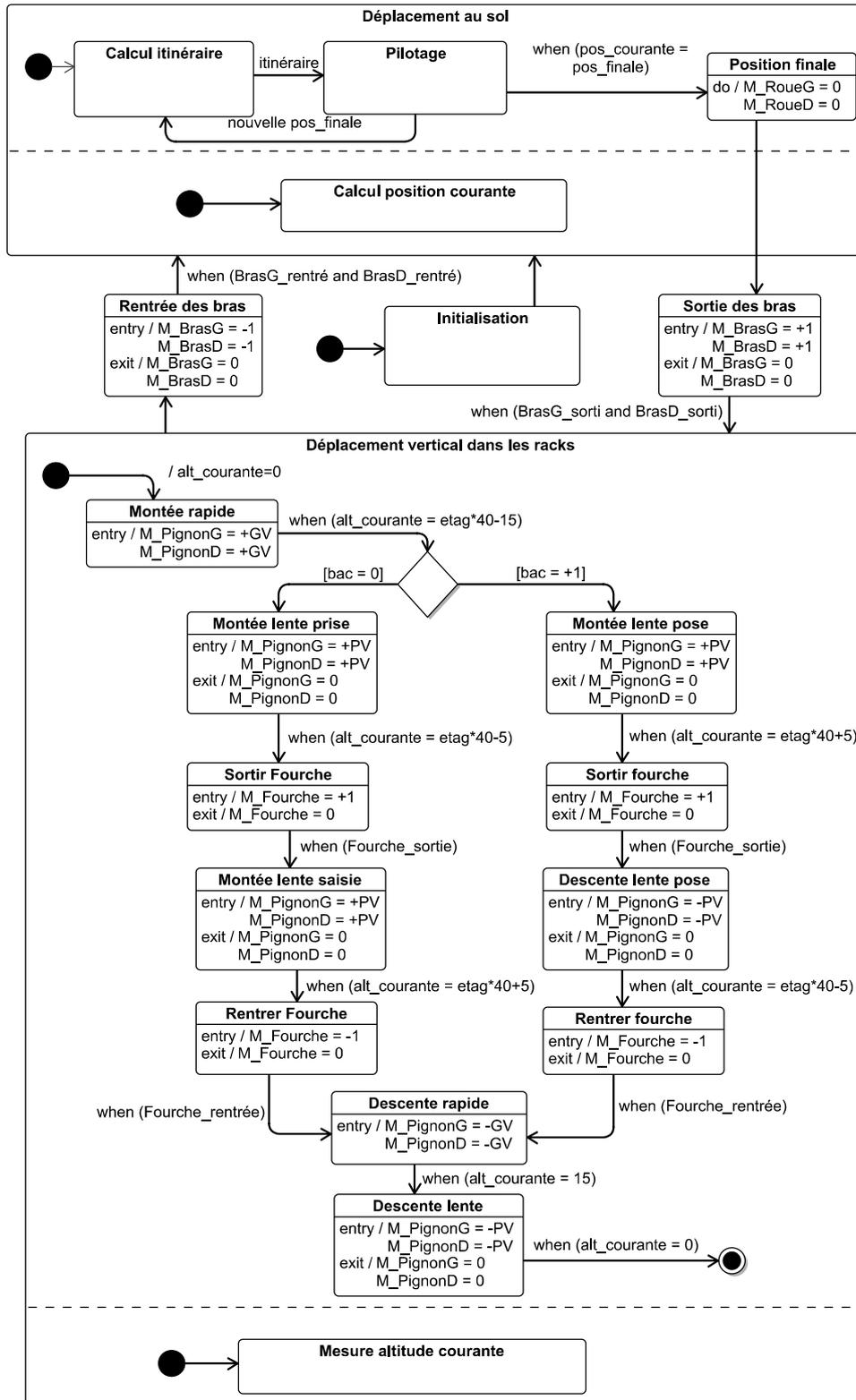


Figure 1 - Diagramme d'état décrivant le comportement du robot