Centre d'intérêt 3

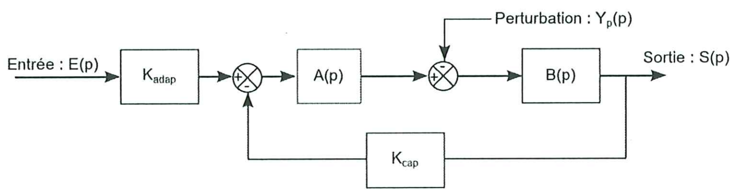
Asservissements

Précision

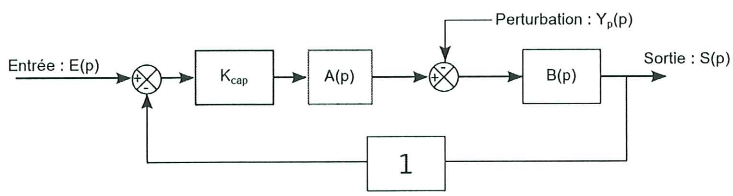
PSI - MP : Lycée Rabelais

Notion de précision

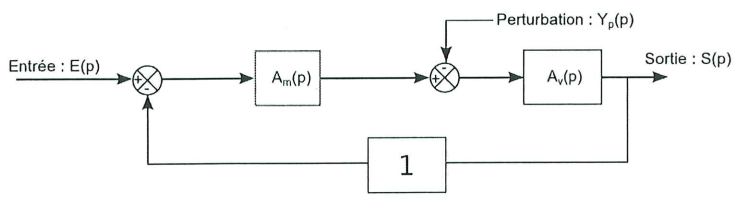
Il est possible de montrer qu'un système, soumis à une perturbation, peut toujours se mettre sous la forme suivante :



Pour que le système fonctionne correctement, il faut nécessairement que $K_{adap} = K_{cap}$, ce qui donne donc :



Ou encore :



Dans la suite du cours, on démontrera tous les résultats à partir d'un schéma-bloc avec un retour unitaire mais ces résultats seront valables dans le cas général d'un schéma-bloc quelconque.

On remarquera notamment qu'il est possible d'écrire : $S(p) = \mathrm{FTBF}(p) \cdot E(p) + H_p(p) \cdot Y_p(p)$

Avec :

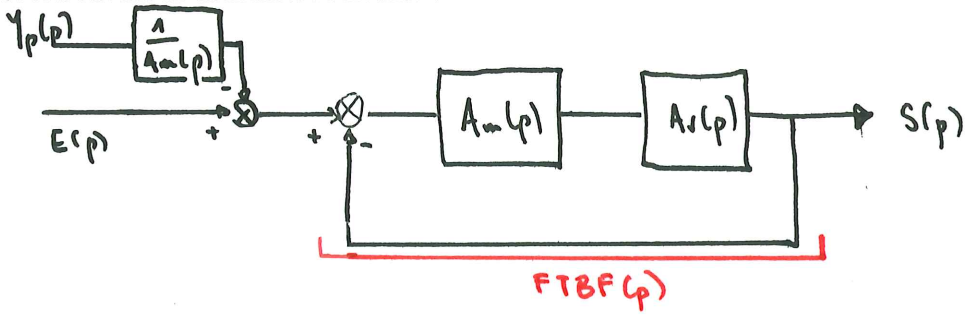
$$\mathrm{FTBF}(p) = \left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{Y_p(p)=0} = \frac{A_m(p) \cdot A_v(p)}{1 + 1 \cdot A_m(p) \cdot A_v(p)} = \frac{\mathrm{FTBO}(p)}{1 + \mathrm{FTBO}(p)}$$

Mais aussi :

$$H_p(p) = \left.\frac{S(p)}{Y_p(p)}\right|_{E(p)=0} = -\frac{A_v(p)}{1 + A_m(p)\cdot A_v(p)}$$

Ces deux résultats se retrouvent de la manière suivante :

SOLUTION 1 :

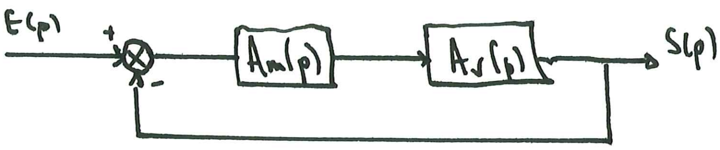


$$S(p) = \frac{A_m(p) \cdot A_v(p)}{1 + A_m(p) \cdot A_v(p)} \cdot \left(E(p) - \frac{1}{A_m(p)} \cdot Y_p(p) \right)$$

$$S(p) = \frac{A_m(p) \cdot A_v(p)}{1 + A_m(p) \cdot A_v(p)} \cdot E(p) - \frac{A_v(p)}{1 + A_m(p) \cdot A_v(p)} \cdot Y_p(p)$$

SOLUTION 2 :

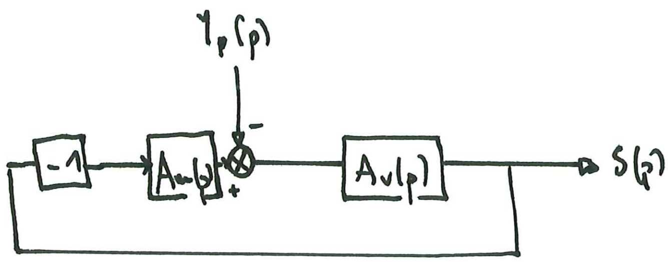
- $FTBF(p) = \left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{Y_p(p)=0}$

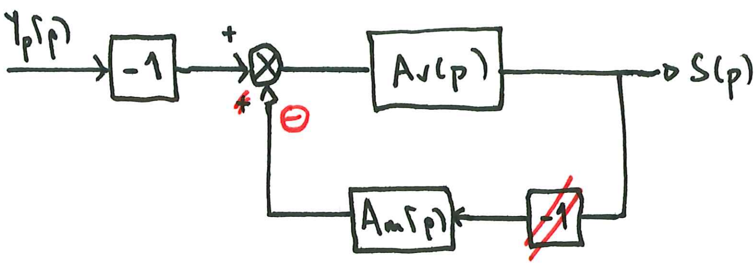


$$= \frac{A_m(p) \cdot A_v(p)}{1 + A_m(p) \cdot A_v(p)}$$

- $H_p(p) = \left.\frac{S(p)}{Y_p(p)}\right|_{E(p)=0}$

$$= -\frac{A_v(p)}{1 + A_m(p) \cdot A_v(p)}$$





La précision se caractérise en général par le calcul de l'**erreur en régime permanent**, qui est la différence entre l'entrée consigne et la sortie. On attend *a priori* que la sortie tende vers la consigne. Calculons alors :

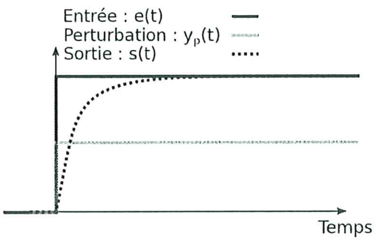
$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \to +\infty} e(t) - s(t)$$

$$= \lim_{p \to 0^+} p \cdot (E(p) - S(p))$$

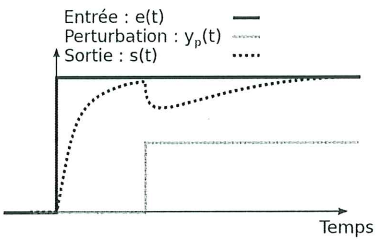
$$= \lim_{p \to 0^+} p \cdot (E(p) - FTBF(p) \cdot E(p) - H_p(p) \cdot Y_p(p))$$

$$= \underbrace{\lim_{p \to 0^+} p \cdot (1 - FTBF(p)) \cdot E(p)}_{\text{Erreur en poursuite : erreur vis-à-vis de l'entrée consigne}} - \underbrace{\lim_{p \to 0^+} H_p(p) \cdot Y_p(p)}_{\text{Erreur en régulat° : erreur vis-à-vis de la perturbat°}}$$

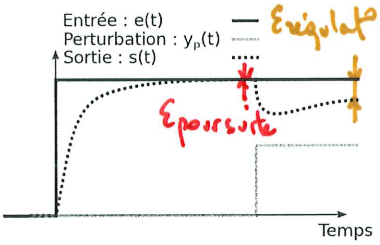
D'un point de vue du vocabulaire, on dira alors :



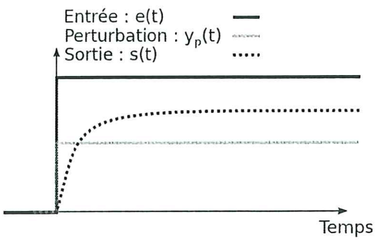
$\varepsilon_{poursuite} = 0$
$\varepsilon_{régulation} = 0$
⊳ Le système est précis vis-à-vis d'une entrée consigne en échelon et insensible à une perturbation en échelon.



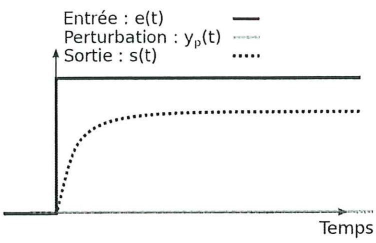
⊳ Idem.



$\varepsilon_{poursuite} = 0$
$\varepsilon_{régulation} \neq 0$
⊳ Le système est précis vis-à-vis d'une entrée consigne en échelon et sensible à une perturbat° en échelon.



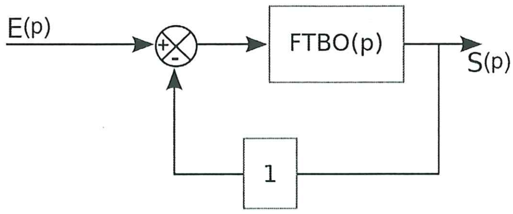
$\varepsilon_\infty \neq 0$
⊳ Le système n'est pas précis (impossible de définir si l'erreur est "en poursuite" ou "en régulation").



$\varepsilon_{poursuite} \neq 0$
$\varepsilon_{régulation} = 0$ mais $Y_p(p) = 0$
⊳ Le système n'est pas précis pour une entrée en échelon.

1 Détermination de la précision pour un problème de poursuite

On a montré précédemment que le système pouvait se ramener au schéma-bloc suivant :



On suppose une FTBO quelconque pouvant alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}} \frac{1 + a_1.p + ... + a_n.p^n}{1 + b_1.p + ... + b_d.p^d} \quad \text{avec :}$$

- α, la classe de la **FTBO** du système (correspond au nombre d'intégrations - $\alpha \in \mathbb{N}^+$) ;
- et K_{BO}, le gain de la **FTBO**.

L'erreur en poursuite en régime permanent, c'est-à-dire l'erreur lorsque t tend vers l'infini, se calcule de la manière suivante :

$$\varepsilon_{poursuite} = \lim_{p \to 0^+} p \cdot (1 - FTBF(p)) \cdot E(p)$$

$$= \lim_{p \to 0^+} p \cdot \left(1 - \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}\right) \cdot E(p)$$

$$= \lim_{p \to 0^+} p \cdot \frac{1}{1 + FTBO(p)} \cdot E(p)$$

$$\text{et} \quad FTBO(p) \underset{p \to 0^+}{\sim} \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}}$$

$$\varepsilon_{poursuite} = \lim_{p \to 0^+} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_{BO}}{p^{\alpha}}} \cdot E(p)$$

On voit ici que l'erreur en régime permanent ne dépend que :

- du gain statique de la FTBO : K_{BO},
- de la classe de la FTBO : α,
- du type d'entrée.

Pour que l'erreur en régime permanent soit faible, il faut donc :

- qu'il y ait le plus d'intégrateurs possible (α grand) ;
- que le gain statique de la FTBO K_{BO} soit le plus grand possible.

Ces besoins s'opposent aux conditions de stabilité du système. **Le respect des conditions de stabilité et le respect des conditions de précision sont donc des notions antagonistes.**

1.1 Erreur statique

L'entrée est un échelon, on a donc :

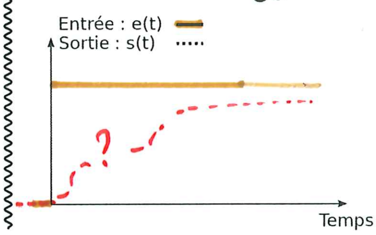
$$e(t) = E_0 \cdot u(t) \text{ (avec } u \text{ l'échelon unitaire) et dans le domaine de Laplace } E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\text{et donc } \varepsilon_s = \lim_{p \to 0^+} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO}}{p^\alpha}} \cdot E_0$$

Calculons l'erreur en fonction de la classe du système :

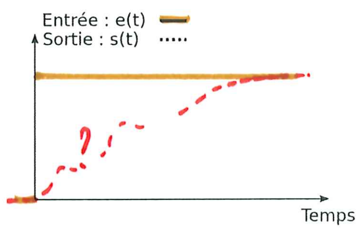
Si $\alpha = 0$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{1 + K_{BO}} \cdot E_0$$



Si $\alpha \geq 0$

$$\varepsilon_s = 0$$



Conclusion :

- Pour une entrée en échelon, le système sera précis s'il y a au moins 1 intégrateur dans la FTBO.
- S'il n'y a pas d'intégration dans la FTBO, on peut diminuer l'erreur en augmentant le gain K_{BO} de la FTBO.

1.2 Erreur de trainage

L'entrée est une rampe, on a donc :

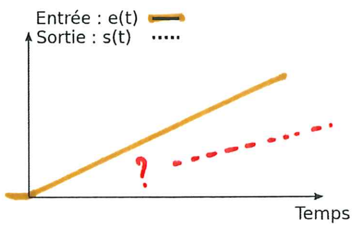
$$e(t) = V_0 \cdot t \cdot u(t) \text{ (avec } u \text{ l'échelon unitaire) et dans le domaine de Laplace } E(p) = \frac{V_0}{p^2}$$

$$\text{et donc } \varepsilon_t = \lim_{p \to 0^+} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO}}{p^\alpha}} \cdot \frac{V_0}{p} = \lim_{p \to 0^+} \frac{1}{p + \frac{K_{BO}}{p^{\alpha-1}}} \cdot V_0$$

Calculons l'erreur en fonction de la classe du système :

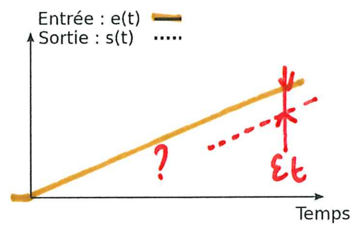
Si $\alpha = 0$

$$\varepsilon_t = +\infty$$



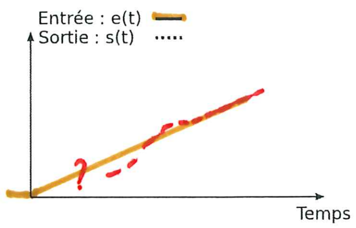
Si $\alpha = 1$

$$\varepsilon_t = \frac{V_0}{K_{BO}}$$



Si $\alpha \geq 2$

$$\varepsilon_t = 0$$



Conclusion :

- Pour une entrée en rampe, le système sera précis s'il y a au moins deux intégrateurs dans la FTBO.

- S'il n'y a pas d'intégration dans la FTBO, l'erreur sera infinie.
- S'il y a exactement un intégrateur, on peut diminuer l'erreur en augmentant le gain statique de la FTBO.

1.3 Erreur en parabole

L'entrée est une parabole, on a donc :

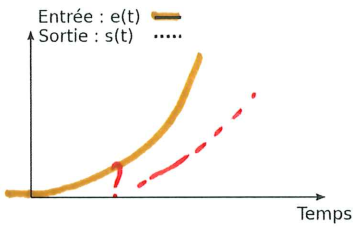
$$e(t) = A_0 \cdot t^2 \cdot u(t) \text{ (avec } u \text{ l'échelon unitaire) et dans le domaine de Laplace } E(p) = \frac{A_0}{p^3}$$

$$\text{et donc } \varepsilon_p = \lim_{p \to 0^+} \frac{1}{p^2 + \frac{K_{BO}}{p^{\alpha - 2}}} \cdot A_0$$

Calculons l'erreur en fonction de la classe du système :

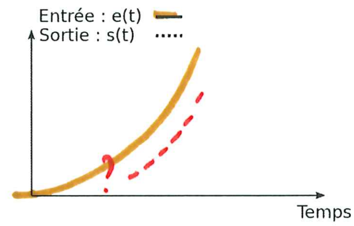
Si $\alpha < 2$

$\varepsilon_p = +\infty$



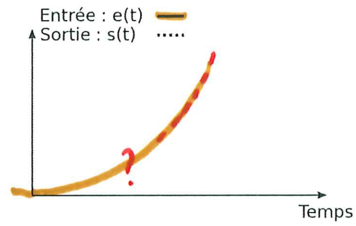
Si $\alpha = 2$

$\varepsilon_p = \frac{A_0}{K_{BO}}$



Si $\alpha > 2$

$\varepsilon_p = 0$



Conclusion :

- Pour une entrée en rampe, le système sera précis s'il y a au moins trois intégrateurs dans la FTBO.
- S'il y a exactement deux intégrateurs, on peut diminuer l'erreur en augmentant le gain statique de la FTBO.

1.4 Récapitulatif

À retenir :

Type d'entrée	Échelon	Rampe	Parabole
Domaine temporelle	$e(t) = E_0.u(t)$	$e(t) = V_0.t.u(t)$	$e(t) = A_0.t^2.u(t)$
Domaine de Laplace	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	$E(p) = \frac{A_0}{p^3}$
FTBO de **classe** 0	$\frac{E_0}{1 + K_{BO}}$	$+\infty$	$+\infty$
FTBO de **classe** 1	0	$\frac{V_0}{K_{BO}}$	$+\infty$
FTBO de **classe** 2	0	0	$\frac{A_0}{K_{BO}}$

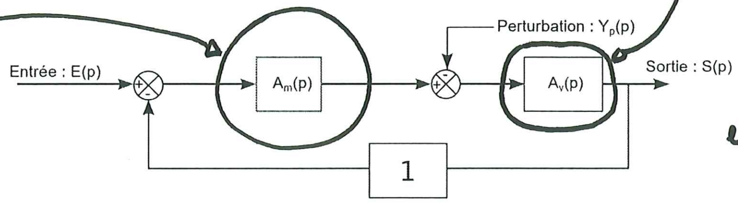
K_{BO} : gain statique de la FTBO.

2 Détermination de la précision pour un problème de régulation

Reprenons le schéma-bloc général évoqué en introduction.

AVAL de la perturbation

AMONT de la perturbation



et $H_p(p) = -\dfrac{A_v(p)}{1+A_m(p).A_v(p)}$

On a montré que l'erreur en régime permanent s'écrivait :

$$\varepsilon_\infty = \underbrace{\lim_{p\to 0^+} p.(1-FTBF(p)).E(p)}_{\text{Erreur en poursuite}} - \underbrace{\lim_{p\to 0^+} p.H_p(p).Y_p(p)}_{\text{Erreur en régulation}}$$

Considérons les fonctions de transfert $A_m(p)$ et $A_v(p)$ écrites sous les formes canoniques suivantes :

$$A_m(p) = \frac{K_m}{p^{\alpha_m}} \frac{1+a_{1m}.p+\ldots+a_{nm}.p^{n_m}}{1+b_{1m}.p+\ldots+b_{dm}.p^{d_m}} \quad \text{et} \quad A_v(p) = \frac{K_v}{p^{\alpha_v}} \frac{1+a_{1v}.p+\ldots+a_{nv}.p^{n_v}}{1+b_{1v}.p+\ldots+b_{dv}.p^{d_v}}$$

L'erreur en régulation, pour une perturbation en échelon de la forme $Y_p(p) = \dfrac{Y_0}{p}$, se calcule donc de la manière suivante :

$$\varepsilon_{régulation} = -\lim_{p\to 0^+} -\cancel{p}.\frac{A_v(p)}{1+A_m(p).A_v(p)}.\frac{Y_0}{\cancel{p}}$$

$$= \lim_{p\to 0^+} \frac{-\dfrac{K_v}{p^{\alpha_v}}}{1+\dfrac{K_m}{p^{\alpha_m}}.\dfrac{K_v}{p^{\alpha_v}}}.Y_0$$

$$= \lim_{p\to 0^+} \frac{K_v.p^{\alpha_m}}{p^{\alpha_m+\alpha_v}+K_m.K_v}.Y_0$$

Cas où il n'y a pas d'intégrateur en amont de la perturbation : $\alpha_m = 0$.

$$\varepsilon_{régulation} = \lim_{p\to 0^+} \frac{K_v}{p^{\alpha_v}+K_m.K_v}.Y_0$$

- Si $\alpha_v = 0$: $\varepsilon_{régulation} = \dfrac{K_v}{1+K_m.K_v}.Y_0 \neq 0$
- Si $\alpha_v > 0$: $\varepsilon_{régulation} = \dfrac{1}{K_m}.Y_0 \neq 0$

Cas où il y a un intégrateur en amont de la perturbation : $\alpha_m \geq 1$.

$\varepsilon_{régulation} = 0$!

À retenir :

S'il y a un intégrateur *en amont* de la perturbation, alors le système sera insensible à cette perturbation si elle est en échelon.

En amont signifie placé entre le comparateur qui permet le calcul de l'écart et le soustracteur associé à la perturbation.