Centre d'intérêt 3

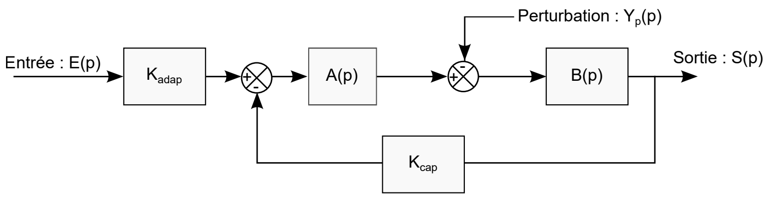
Asservissements

Précision

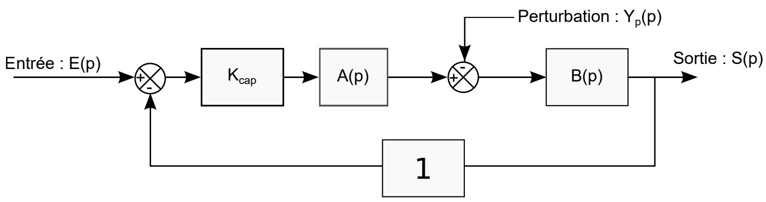
PSI - MP : Lycée Rabelais

Notion de précision

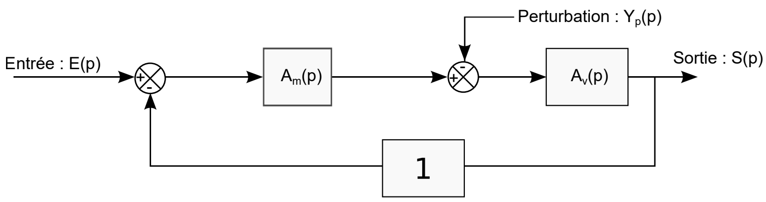
Il est possible de montrer qu'un système, soumis à une perturbation, peut toujours se mettre sous la forme suivante :



Pour que le système fonctionne correctement, il faut nécessairement que $K_{adap} = K_{cap}$, ce qui donne donc :



Ou encore :



Dans la suite du cours, on démontrera tous les résultats à partir d'un schéma-bloc avec un retour unitaire mais ces résultats seront valables dans le cas général d'un schéma-bloc quelconque.

On remarquera notamment qu'il est possible d'écrire : $S(p) = \text{FTBF}(p) \cdot E(p) + H_p(p) \cdot Y_p(p)$

Avec :

$$\text{FTBF}(p) = \left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{Y_p(p)=0} = \frac{A_m(p) \cdot A_v(p)}{1 + 1 \cdot A_m(p) \cdot A_v(p)} = \frac{\text{FTBO}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

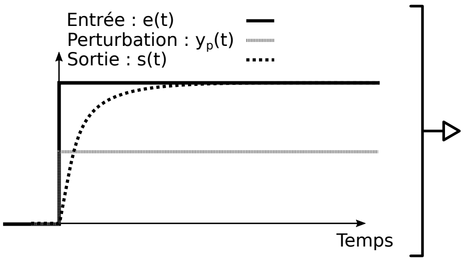
Mais aussi :

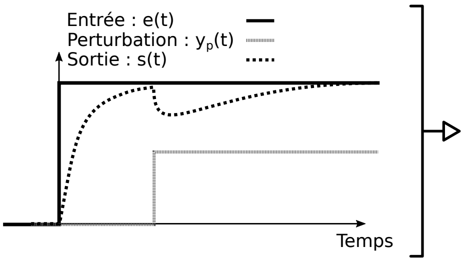
$$H_p(p) = \left.\frac{S(p)}{Y_p(p)}\right|_{E(p)=0} = -\frac{A_v(p)}{1 + A_m(p) \cdot A_v(p)}$$

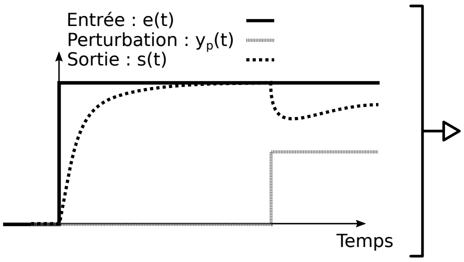
Ces deux résultats se retrouvent de la manière suivante :

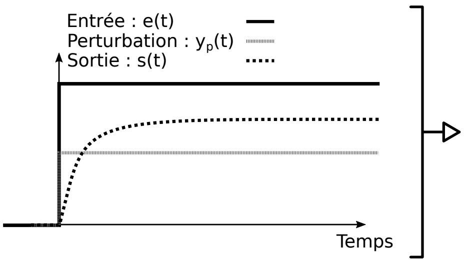
La précision se caractérise en général par le calcul de l'**erreur en régime permanent**, qui est la différence entre l'entrée consigne et la sortie. On attend *a priori* que la sortie tende vers la consigne. Calculons alors :

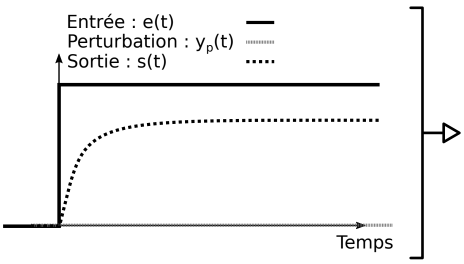
D'un point de vue du vocabulaire, on dira alors :





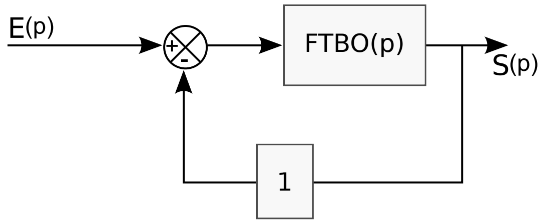






1 Détermination de la précision pour un problème de poursuite

On a montré précédemment que le système pouvait se ramener au schéma-bloc suivant :



On suppose une FTBO quelconque pouvant alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{K_{BO}}{p^\alpha} \frac{1 + a_1.p + ... + a_n.p^n}{1 + b_1.p + ... + b_d.p^d} \quad \text{avec :}$$

- α, la classe de la **FTBO** du système (correspond au nombre d'intégrations - $\alpha \in \mathbb{N}^+$) ;
- et K_{BO}, le gain de la **FTBO**.

L'erreur en poursuite, en régime permanent, c'est-à-dire l'erreur lorsque t tend vers l'infini, se calcule de la manière suivante :

On voit ici que l'erreur en régime permanent ne dépend que :

- du gain statique de la FTBO : K_{BO},
- de la classe de la FTBO : α,
- du type d'entrée.

Pour que l'erreur en régime permanent soit faible, il faut donc :

- qu'il y ait le plus d'intégrateurs possible (α grand) ;
- que le gain statique de la FTBO K_{BO} soit le plus grand possible.

Ces besoins s'opposent aux conditions de stabilité du système. **Le respect des conditions de stabilité et le respect des conditions de précision sont donc des notions antagonistes.**

1.1 Erreur statique

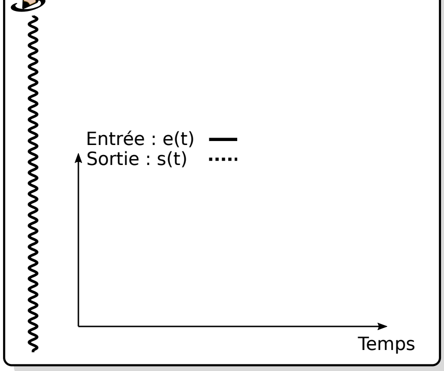
L'entrée est un échelon, on a donc :

$$e(t) = E_0 \cdot u(t) \text{ (avec } u \text{ l'échelon unitaire) et dans le domaine de Laplace } E(p) = \frac{E_0}{p}$$

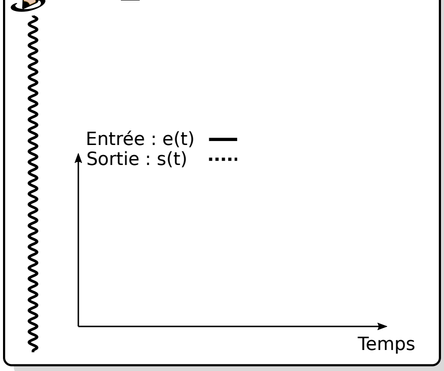
$$\text{et donc } \varepsilon_s = \lim_{p \to 0^+}$$

Calculons l'erreur en fonction de la classe du système :

Si $\alpha = 0$



Si $\alpha \geq 0$



Conclusion :

- Pour une entrée en échelon, le système sera précis s'il y a au moins ... intégrateur dans la FTBO.
- S'il n'y a pas d'intégration dans la FTBO, on peut diminuer l'erreur en

1.2 Erreur de trainage

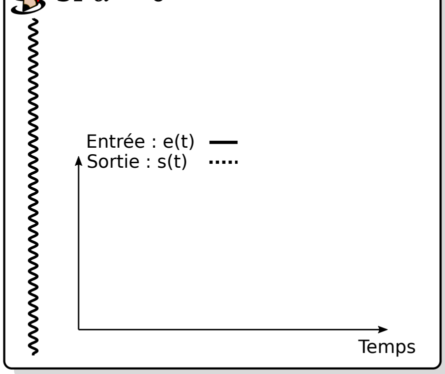
L'entrée est une rampe, on a donc :

$$e(t) = V_0 \cdot t \cdot u(t) \text{ (avec } u \text{ l'échelon unitaire) et dans le domaine de Laplace } E(p) = \frac{V_0}{p^2}$$

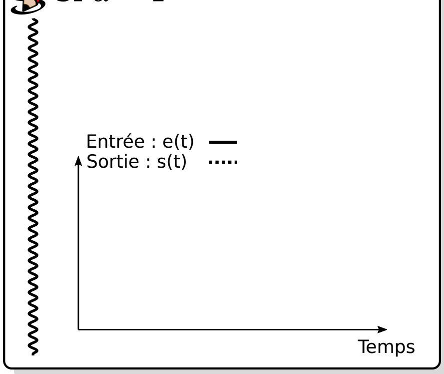
$$\text{et donc } \varepsilon_t = \lim_{p \to 0^+}$$

Calculons l'erreur en fonction de la classe du système :

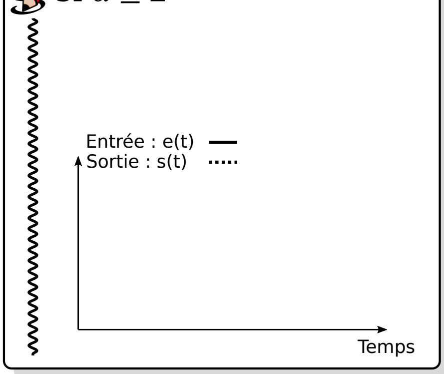
Si $\alpha = 0$



Si $\alpha = 1$



Si $\alpha \geq 2$



Conclusion :

- Pour une entrée en rampe, le système sera précis s'il y a au moins deux intégrateurs dans la FTBO.

- S'il n'y a pas d'intégration dans la FTBO, l'erreur sera infinie.
- S'il y a exactement un intégrateur, on peut diminuer l'erreur en augmentant le gain statique de la FTBO.

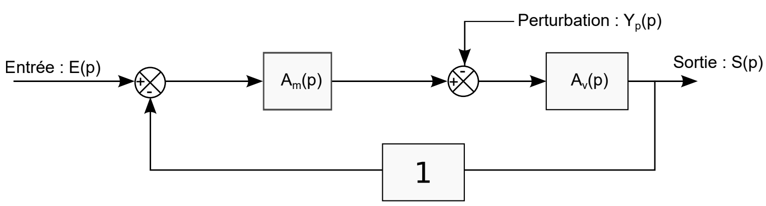
1.3 Récapitulatif

À retenir :

Type d'entrée	Échelon	Rampe
Domaine temporelle	$e(t) = E_0.u(t)$	$e(t) = V_0.t.u(t)$
Domaine de Laplace	$E(p) = \dfrac{E_0}{p}$	$E(p) = \dfrac{V_0}{p^2}$
FTBO de **classe** 0		
FTBO de **classe** 1		
FTBO de **classe** 2		

2 Détermination de la précision pour un problème de régulation

Reprenons le schéma-bloc général évoqué en introduction.



On a montré que l'erreur en régime permanent s'écrivait :

Considérons les fonctions de transfert $A_m(p)$ et $A_v(p)$ écrites sous les formes canoniques suivantes :

$$A_m(p) = \frac{K_m}{p^{\alpha_m}} \frac{1 + a_{1m}.p + ... + a_{nm}.p^{n_m}}{1 + b_{1m}.p + ... + b_{dm}.p^{d_m}} \quad \text{et} \quad A_v(p) = \frac{K_v}{p^{\alpha_v}} \frac{1 + a_{1v}.p + ... + a_{nv}.p^{n_v}}{1 + b_{1v}.p + ... + b_{dv}.p^{d_v}}$$

L'erreur en régulation, pour une perturbation en échelon de la forme $Y_p(p) = \dfrac{Y_0}{p}$, se calcule donc de la manière suivante :

Cas où il n'y a pas d'intégrateur en amont de la perturbation : $\alpha_m = 0$.

Cas où il y a un intégrateur en amont de la perturbation : $\alpha_m \geq 1$.

À retenir :

S'il y a un intégrateur *en amont* de la perturbation, alors le système sera insensible à cette perturbation si elle est en échelon.

En amont signifie placé entre le comparateur qui permet le calcul de l'écart et le soustracteur associé à la perturbation.