

# Centre d'intérêt 3

## Conception d'un correcteur

PSI-MP : Lycée Rabelais



### Pré-requis

Ensemble du cours sur les asservissements

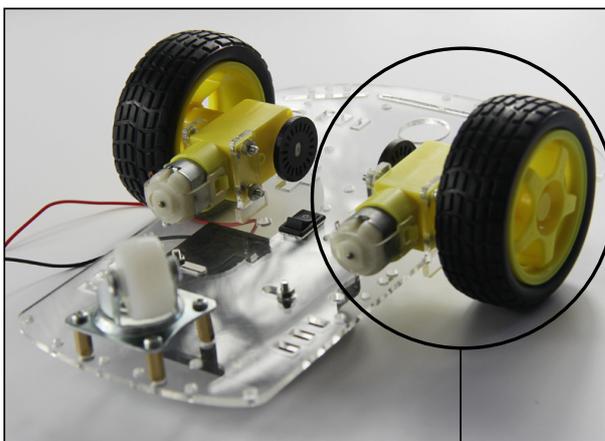


### Objectifs

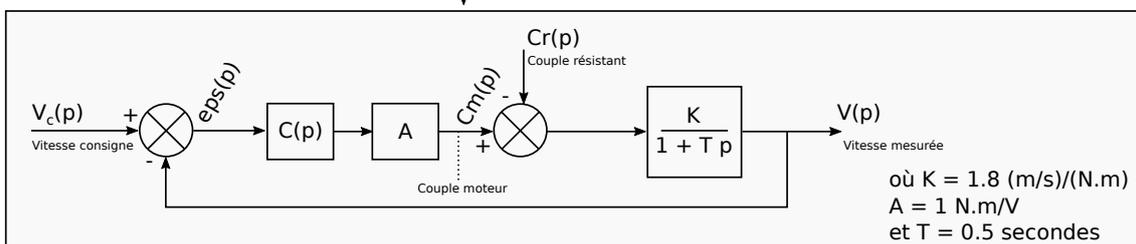
- Être capable de déterminer les conditions de stabilité d'un système
- Savoir régler un correcteur pour que celui-ci mène à un système stable
- Savoir analyser la précision d'un asservissement avec la classe de la FTBO
- Savoir analyser la sensibilité à la perturbation d'un asservissement compte-tenu de la présence éventuelle d'un intégrateur en amont de la perturbation
- Choisir un correcteur adapté au cahier des charges

## 1 Régulation de vitesse sur un robot

On s'intéresse ici à une régulation de vitesse sur un robot. Une étude dynamique préalable puis une simplification du schéma-bloc a permis d'obtenir le modèle proposé ci-dessous. Un extrait du cahier des charges est également fourni. On se propose de tester successivement différents correcteurs et de choisir celui qui permettra de vérifier le cahier des charges.



Cahier des charges	
Critère	Niveau
Ecart statique en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\epsilon_s = 0$
Ecart de traînage en vitesse en présence d'une perturbation échelon	$\epsilon_t = 0$
Marge de phase	$M_\phi > 45^\circ$
Pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain en boucle ouverte vaut 0 dB)	$\omega_{0dB} > 1 \text{ rad/s}$



### 1.1 Correcteur proportionnel : $C(p) = K_p$

Q1. Justifier brièvement la stabilité du système avec un tel correcteur.

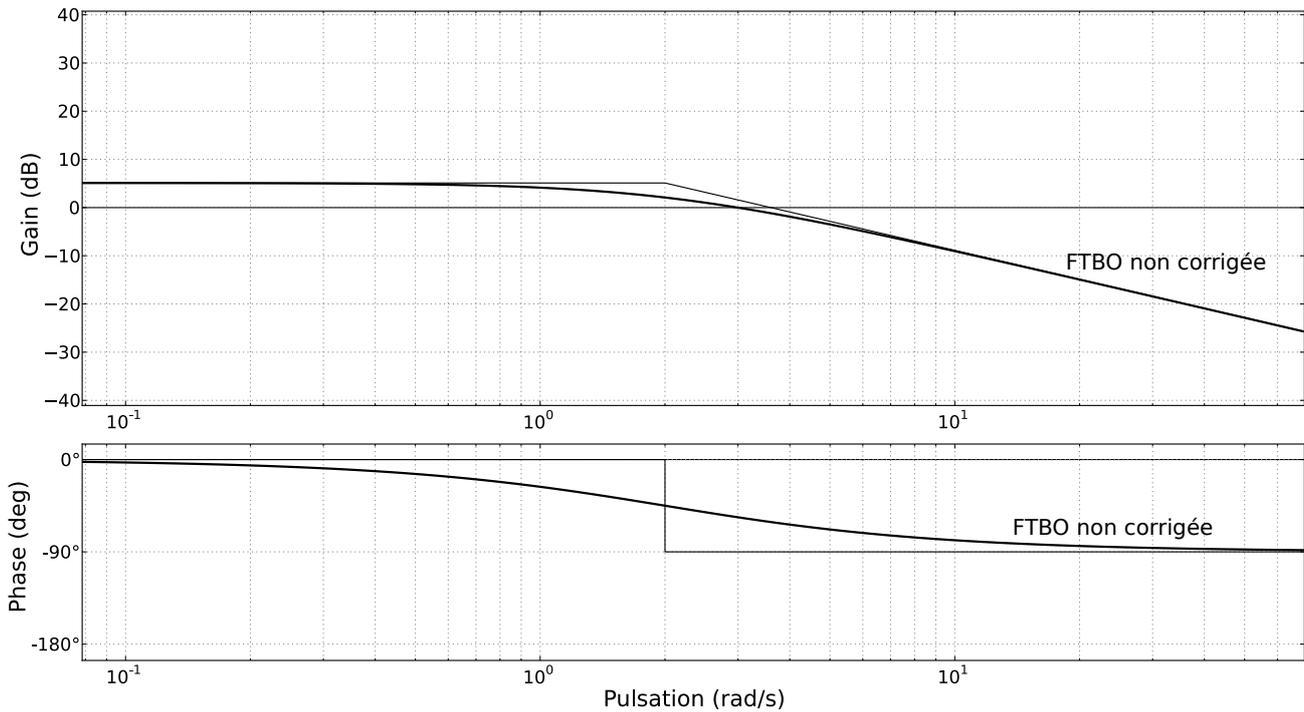
Q2. Le système est-il précis et/ou sensible à la perturbation pour des entrées en échelon ? On calculera les erreurs nécessaires.

Q3. Conclure quant au respect du cahier des charges.

### 1.2 Correcteur intégral : $C(p) = \frac{K_i}{p}$

Q4. Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système, notée  $FTBO(p)$ .

Q5. Tracer le diagramme de Bode de  $FTBO(p)$  sur le diagramme fourni ci-dessous.



Q6.a. Quelles valeurs numériques de  $K_i$  permettent de respecter le critère de stabilité du cahier des charges ?

Q6.b. Ces valeurs numériques de  $K_i$  permettent-elles de respecter le critère de "Pulsation de coupure en boucle ouverte" du cahier des charges ? Justifiez.

Q7.a. On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculez l'écart statique en suivi de consigne  $\varepsilon'_s$  engendré par une consigne en échelon d'amplitude  $V_0 = 5 \text{ m/s}$ .

Q7.b. On suppose  $V_c(p) = 0$ . Calculez l'écart statique en régulation  $\varepsilon''_s$  engendré par une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0} = 2 \text{ N.m}$ .

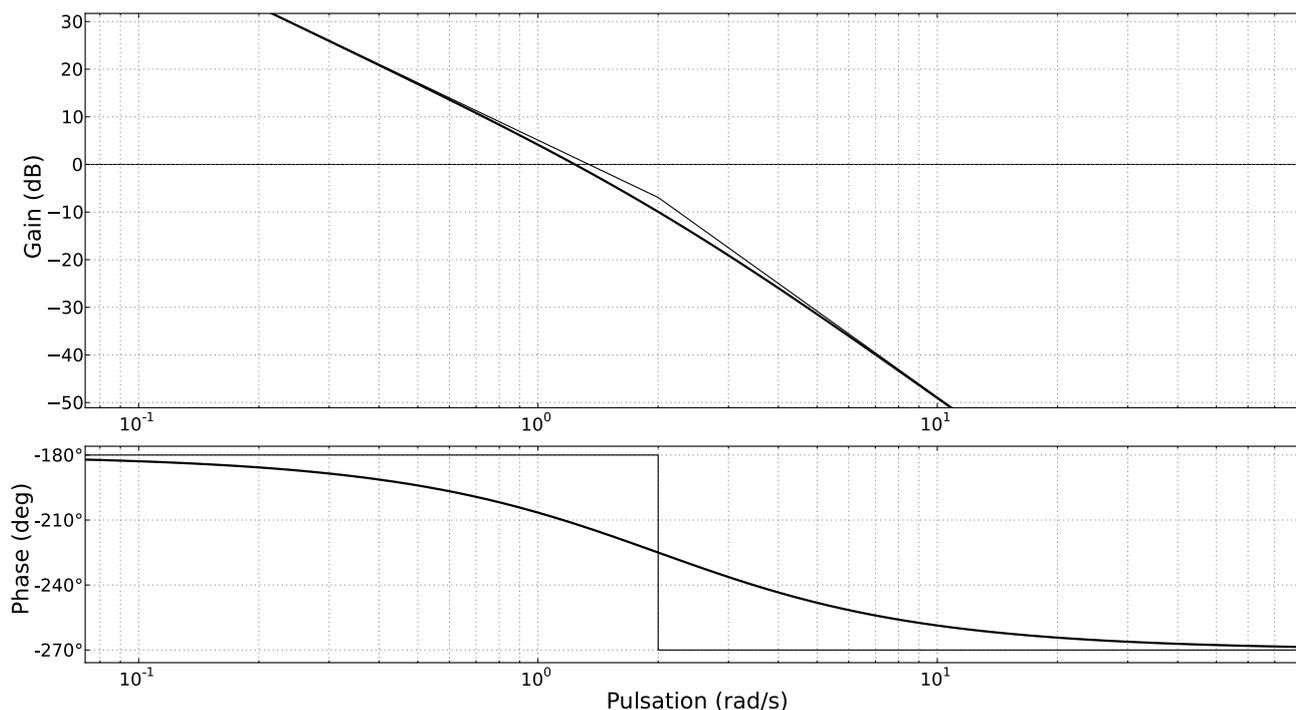
Q7.c. En déduire l'erreur statique totale  $\varepsilon_s = \varepsilon'_s + \varepsilon''_s$ . Le critère de précision est-il vérifié ? Justifiez.

Q8. On suppose  $C_r(p) = 0$ . Calculez l'expression de l'écart de traînage  $\varepsilon_v$  engendré par une consigne en rampe unitaire. Existe-t-il une valeur de  $K_i$  réaliste qui permette de vérifier le critère qui concerne l'erreur de traînage ? Justifiez.

### 1.3 Double correcteur intégral et correcteur à avance de phase : $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$

On décide maintenant d'utiliser le correcteur  $C(p) = C_a(p) \frac{1}{p^2}$  : produit du correcteur  $C_a(p) = K_c \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$  avec  $a > 1$ .

On donne ci-dessous le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système pour  $C_a(p) = 1$ .



**Q9.** Montrez que le système n'est pas stable sans la fonction  $C_a(p)$  ?

La fonction  $C_a(p)$  va nous permettre de stabiliser le système, et de respecter les critères de "Marge de phase" et de "Pulsation de coupure en boucle ouverte". Pour cela, il faut suivre la démarche suivante :

**Q10.** Combien de degrés de phase faut-il ajouter à la pulsation 1 *rad/s* pour obtenir une phase de  $-135^\circ$ ?

**Q11.** Tracez en fonction de  $a$ ,  $\tau$  et  $K_c$  les diagrammes asymptotiques de Bode (amplitude et phase) du correcteur  $C_a(p)$  avec  $a > 1$ . Précisez clairement les amplitudes ou les phases de toutes les asymptotes horizontales en fonction des différents paramètres. Précisez de même les pulsations des points particuliers.

**Q12.** La phase maximum  $\varphi_{max}$  ajoutée par  $C_a(p)$  peut être calculée par la formule :  $\sin\varphi_{max} = \frac{a-1}{a+1}$ . Calculez numériquement  $a$  pour obtenir la remontée de phase déterminée sur le diagramme de Bode à la question précédente.

**Q13.** Pour cette question, on pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe de phase.

**A.** Donnez l'expression en fonction de  $a$  et  $\tau$  de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la courbe de phase atteint son maximum.

**B.** En déduire la valeur numérique de  $\tau$  pour que  $\varphi_{max}$  soit ajoutée à la pulsation 1 *rad/s*.

**Q14.** Calculez numériquement la valeur à donner à  $K_c$  pour respecter les critères de "Marge de phase" et de "Pulsation de coupure en boucle ouverte" du cahier des charges ? Précisez la démarche utilisée.

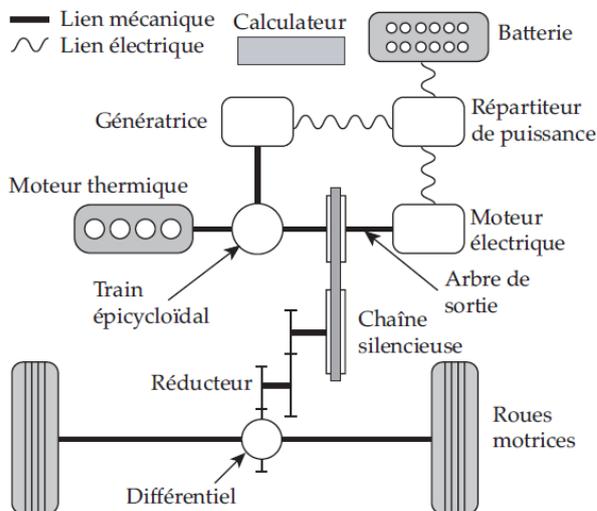
**Q15.A.** Les critères de précision sont-ils vérifiés ? Justifiez.

**Q15.B.** Ce correcteur permet-il de vérifier les critères du cahier des charges ? Justifiez.

## 2 Étude du véhicule hybride Toyota Prius

Dans le contexte actuel d'économie des énergies fossiles et de réduction des émissions de gaz nocifs, le système de propulsion hybride constitue une alternative intéressante à la propulsion classique par moteur thermique seul car il permet de réduire la consommation.

Il existe trois modes principaux de fonctionnement du véhicule hybride : tout électrique (moteur thermique à l'arrêt), hybride (les deux motorisations sont motrices), récupération d'énergie (moteur électrique à l'arrêt et recharge de la batterie). Dans la suite les notations simplifiées **ME**, **MT** et **GE** désignent respectivement le moteur électrique, le moteur thermique, et la génératrice électrique.

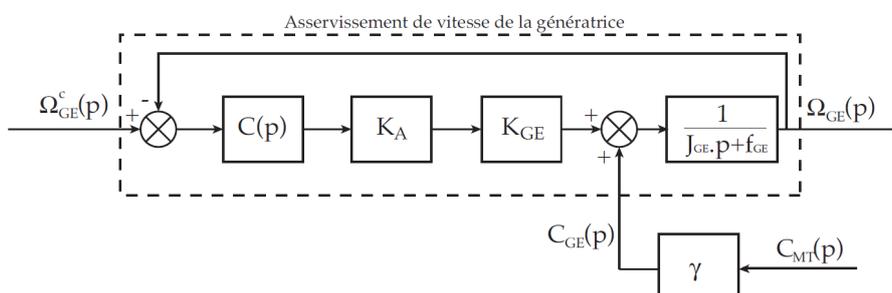


On s'intéresse ici au contrôle de la vitesse du moteur thermique en **fonctionnement hybride**. Dans ce mode, la vitesse de rotation du moteur thermique est réglée afin de le faire fonctionner à son rendement maximum. Ce contrôle ne pouvant être réalisé au niveau du papillon des gaz, c'est un asservissement en vitesse de la génératrice qui permet de contrôler l'ensemble des autres vitesses de rotation.

La consommation du véhicule est directement liée aux qualités de cet asservissement. Cette partie s'intéresse à la justification et au dimensionnement d'un correcteur approprié. Les performances attendues de cet asservissement sont les suivantes :

Critères	Niveaux
<b>Précision</b>	Écart en régime permanent : <ul style="list-style-type: none"> <li>nul vis-à-vis d'une commande en échelon du type <math>\omega_{GE}^c(t) = \omega_0 u(t)</math>, <math>\omega_0</math> est une constante et <math>u(t)</math> est la fonction échelon unitaire.</li> <li>nul vis-à-vis d'une perturbation constante du type <math>C_{MT}(t) = C_0 u(t)</math></li> </ul>
<b>Rapidité</b>	Pulsation de coupure à 0dB de la FTBO : $\omega_{0dB} = 1.5 \text{ rad/s}$
<b>Stabilité</b>	Marge de phase : $M_\varphi > 45^\circ$

Un asservissement (non étudié ici) régule le courant dans la génératrice. Ainsi, les comportements mécanique et électrique de la génératrice se modélisent par le schéma bloc (figure ci-dessous) où  $C_{MT}$  est assimilé à une perturbation extérieure.

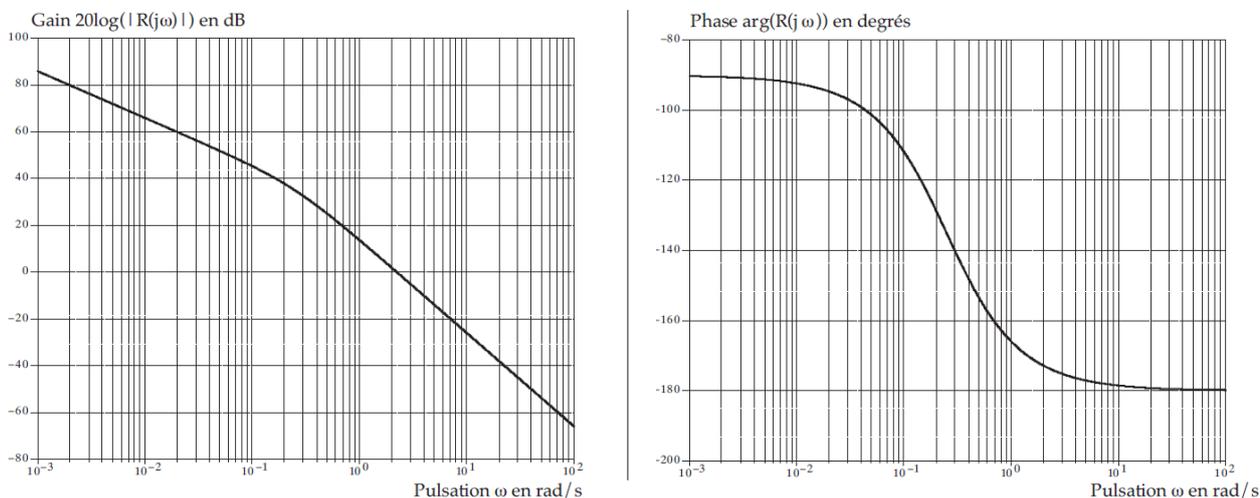


Avec :  $K_{GE} = 2 \text{ Nm/A}$  ;  $K_A = 0,5 \text{ A/V}$  ;  $J_{GE} = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  ;  $f_{GE} = 0,05 \text{ Nm/s}$  et  $\gamma = 0,28$ .

**Q1.** Déterminer l'expression de  $\Omega_{GE}(p)$  en fonction de  $\Omega_{GE}^C(p)$  et de  $C_{MT}(p)$ .

**Q2.** Expliquer pourquoi un asservissement avec correction unitaire ( $C(p) = 1$ ) ne permet pas de satisfaire le cahier des charges.

**Le premier correcteur envisagé est un correcteur intégral**, tel que  $C(p) = C_1(p) = \frac{K_i}{p}$ . Le diagramme de Bode de la fonction en boucle ouverte  $FTBO(p) = R(p)$  est fourni ci-dessous pour  $K_i = 1$ .



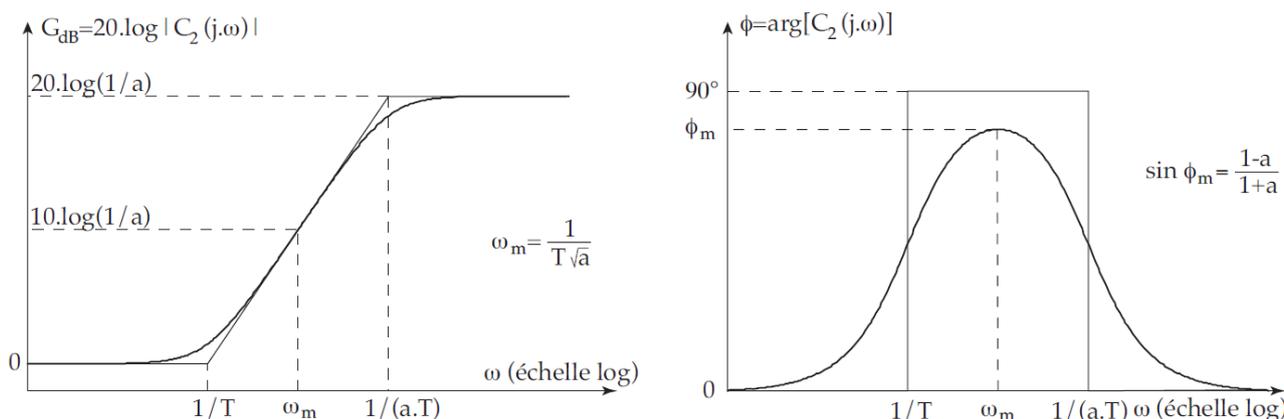
**Q3.** Vérifier qu'un tel correcteur permet bien de vérifier les exigences de précision du cahier des charges.

**Q4.** Qu'en est-il des autres exigences ?

On envisage maintenant l'utilisation d'une **correction intégrale associée à une correction à avance de phase**. La fonction de transfert de ce second correcteur est notée :

$$C(p) = C_1(p) \cdot C_2(p) = \frac{K_i}{p} \frac{1 + Tp}{1 + aTp} \quad \text{avec } a < 1$$

Le diagramme de Bode du correcteur  $C_2(p)$  est donné ci-dessous :



Afin d'apporter le maximum de marges de stabilité, on décide de placer  $\omega_m$  en  $\omega_{0dB}$ .

**Q5.** Déterminer  $\phi_m$  pour que la marge de phase soit effectivement de  $45^\circ$ . En déduire la valeur de  $a$  et de  $T$ .

**Q6.** Déterminer finalement  $K_i$  pour que la pulsation  $\omega_{0dB}$  soit effectivement la pulsation de coupure à 0 dB.

**Q7.** Que pensez-vous de la marge de gain du système ?

**Q8.** Conclure sur les capacités du correcteur à satisfaire l'ensemble des critères du cahier des charges.

### 3 Vision en réalité augmentée pour hélicoptère

Les hélicoptères sont des aéronefs dont l'un des intérêts est de pouvoir effectuer des vols proches du relief. Suivant les conditions climatiques (tempête de sable, brouillard ou vol de nuit par exemple), la propre vision du pilote et l'instrumentation de navigation classique peuvent être insuffisantes pour assurer la sécurité du vol. Pour pallier cela, la société Thalès propose un système de vision en réalité augmentée composée du casque TopOwl et d'un FLIR (Forward Looking InfraRed).

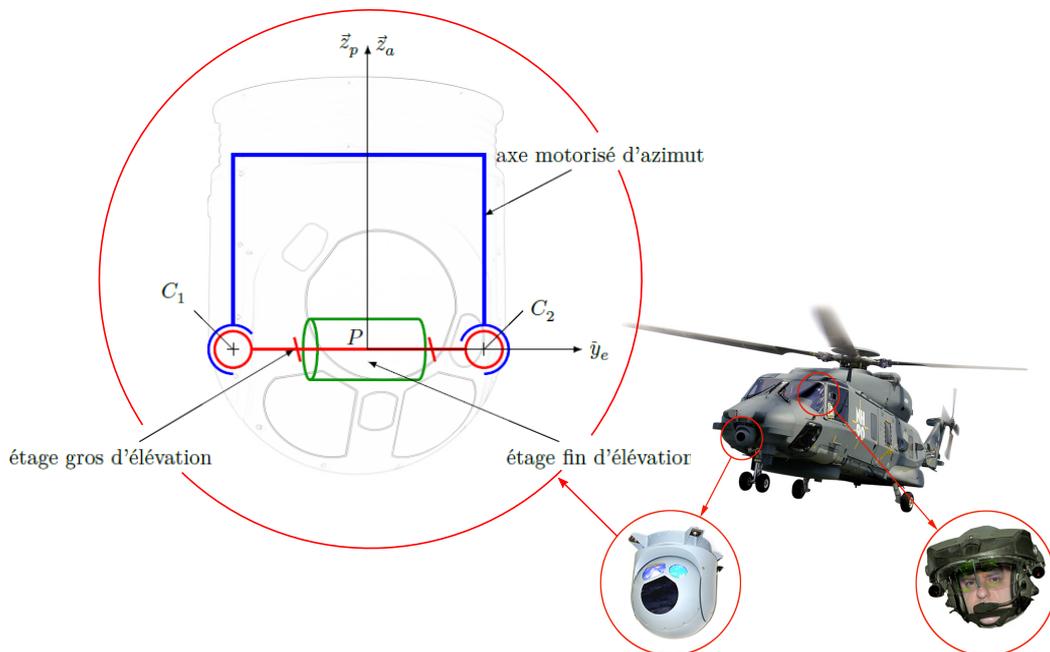
La vision en réalité augmentée consiste à venir projeter sur la visière du casque TopOwl une image prise par une des caméras du FLIR. L'image projetée se superpose au paysage visible à travers la visière de façon à améliorer la vision du pilote. De nuit, par temps de brouillard ou de tempête, l'image peut être une image infra-rouge ou thermique. En plus de l'image, des informations peuvent être ajoutées sur la projection ; par exemple des données GPS, des routes, des informations de vol.

Le FLIR est une boule optronique modulaire pouvant intégrer plusieurs capteurs différents dont une caméra thermique, une caméra couleur TV HD, ainsi qu'une caméra très bas niveau de lumière. **Cet ensemble est orientable** et gyroscopé.

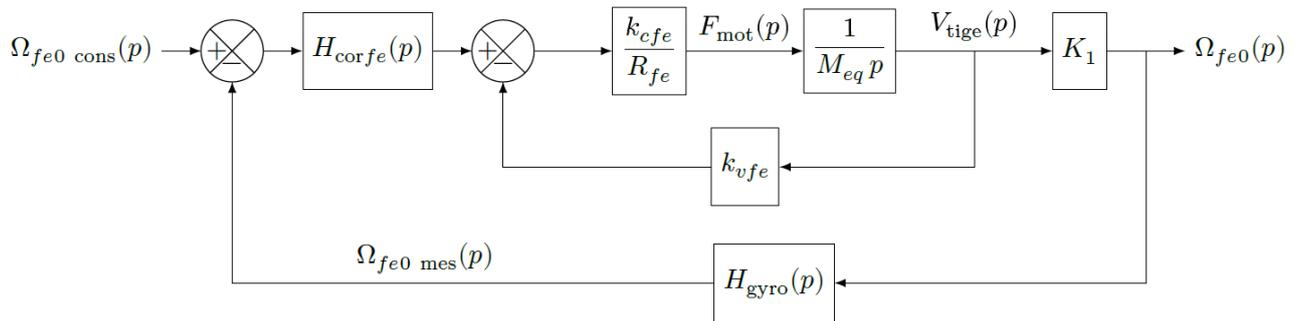
Le FLIR, fixé à l'hélicoptère, est constitué :

- d'un axe motorisé d'azimut orientable en rotation par rapport au porteur autour de l'axe ;
- d'un ensemble de caméras, appelé charge, encastré sur un axe motorisé d'élévation orientable en rotation par rapport à l'axe motorisé d'azimut.

Afin de limiter l'influence des vibrations du porteur sur la ligne de visée et augmenter la précision de son orientation, les ingénieurs ont choisi de décomposer l'axe motorisé d'élévation en deux étages. Le premier étage, appelé étage gros d'élévation (*ge*), est en prise directe avec l'air et est donc soumis aux effets aérodynamiques lors des mouvements du porteur. Le second, appelé étage fin d'élévation (*fe*), est protégé des effets aérodynamiques grâce au carter sphérique solide de l'étage gros. Ce choix de motorisation permet d'atteindre des accélérations et des vitesses élevées. Cependant, l'amplitude du mouvement de l'étage fin est limitée. **On s'intéresse ici à la commande de l'étage fin d'élévation.** Un gyroscope permet de mesurer l'orientation en fin d'élévation. Une étude préalable a permis de déterminer :  $H_{gyp}(p) = \frac{1}{1+\tau_{gyro}p}$  avec  $\tau_{gyro} = 1.6ms$ .



Les performances attendues sont données dans le tableau de la figure ci-dessous. La consigne de vitesse  $\dot{\theta}_{fe0\ cons}(t) = \omega_{fe0\ cons}(t)$  est calculée à partir de la détection de posture de la tête du pilote et des informations d'orientation de l'hélicoptère.



Critère	Valeur
Temps de réponse à 5%	< 40 ms
Ecart statique	nul
Marge de phase	$\Delta\Phi = 60^\circ$

$$\begin{aligned}
 k_{cfe} &= 10,2 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1} \\
 k_{vfe} &= 10,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1} \\
 \text{on note } K_{fe} &= k_{cfe} = k_{vfe} \\
 R_{fe} &= 7,5 \Omega
 \end{aligned}$$

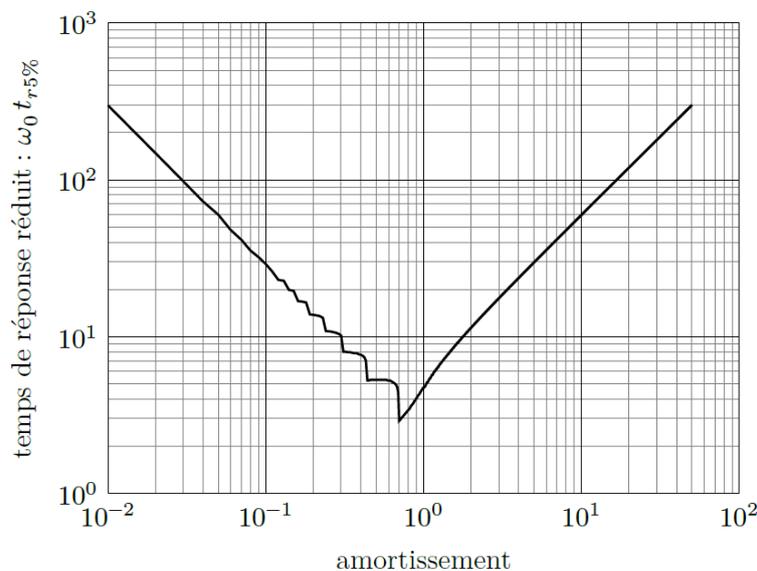
Dans un premier temps, l'asservissement de vitesse n'est pas corrigé, c'est-à-dire que  $H_{corfe}(p) = 1$ .

**Q1.** Exprimer littéralement et sous forme canonique la fonction de transfert  $H_{fe1}(p) = \frac{\Omega_{fe0}(p)}{\Omega_{fe0\ cons}(p)}$  en fonction des données.

Compte tenu des temps de réponse à observer, on montre que  $H_{fe1}(p)$  peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :

$$H_{fe1}(p) \approx \frac{0,5}{1 + 3,65 \times 10^{-1}p + 6 \times 10^{-4}p^2}$$

**Q2.** En utilisant l'abaque donnée ci-dessous, déterminer le temps de réponse à 5% et l'écart statique de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation en réponse à un échelon de vitesse unitaire. Conclure sur le respect des performances en rapidité et en précision.



On propose d'utiliser un correcteur proportionnel intégral de la forme  $H_{corfe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right)$ . La fonction de

transfert en boucle ouverte de l'asservissement en vitesse de l'étage fin d'élévation devient alors

$$H_{BOfe}(p) = K_{pfe} \left( 1 + \frac{1}{T_{ife}p} \right) \frac{1}{1 + 0,75p} \frac{1}{1 + 1,6 \times 10^{-3}p}$$

La figure issue du document réponse et donnée ci-dessous correspond aux tracés des diagrammes de Bode réels de  $H_{BOfe}(p)$  pour  $K_{pfe} = 1$  et  $T_{ife} = 0,1$  s, puis  $T_{ife} = 0,01$  s.

**Q3.** Sur cette même figure du document réponse, tracer le diagramme de phase asymptotique de Bode de  $H_{BOfe}(p)$  pour  $T_{ife} = 0,1$  s, en indiquant la pulsation  $1/T_{ife}$ .

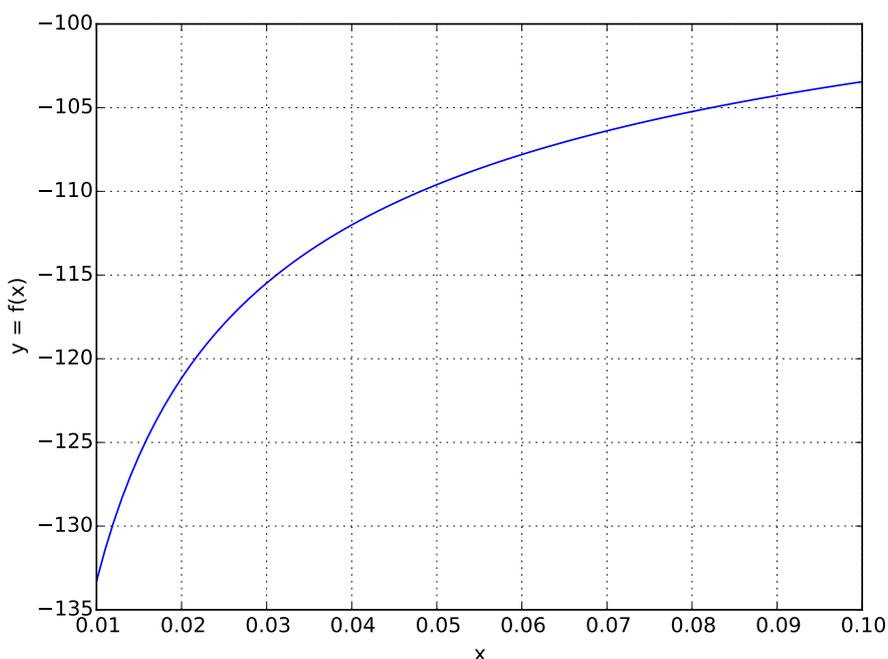
La lecture du tracé réel de la phase met en évidence un maximum local à la pulsation  $\omega_{max}$  telle que  $\omega_{max} \in [1/T_{ife}; 600]$  en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q4.** En supposant que le tracé réel semi-logarithmique de la phase est symétrique autour de  $\omega_{max}$  de telle sorte que  $\omega_{max}$  est la moyenne logarithmique de  $1/T_{ife}$  et  $1/(1,6 \times 10^{-3})$ , déterminer  $\omega_{max}$ . Calculer ensuite la valeur de  $T_{ife}$  comprise dans la décade  $[0,01 \text{ s}; 0,1 \text{ s}]$  en vous aidant du graphique  $y = f(x)$  donné ci-dessous et qui permet de régler ce maximum à  $-120^\circ$ .

**Q5.** Pour cette valeur de  $T_{ife}$  calculée avec  $K_{pfe} = 1$  et à partir des tracés réels du document réponse, calculer la valeur de  $K_{pfe}$  qui permet de respecter le critère de marge de phase.

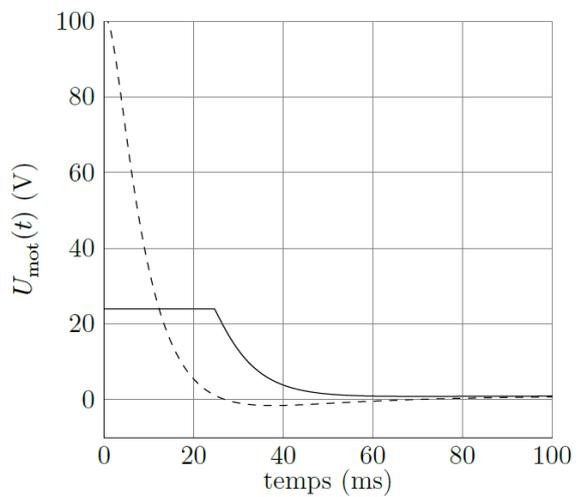
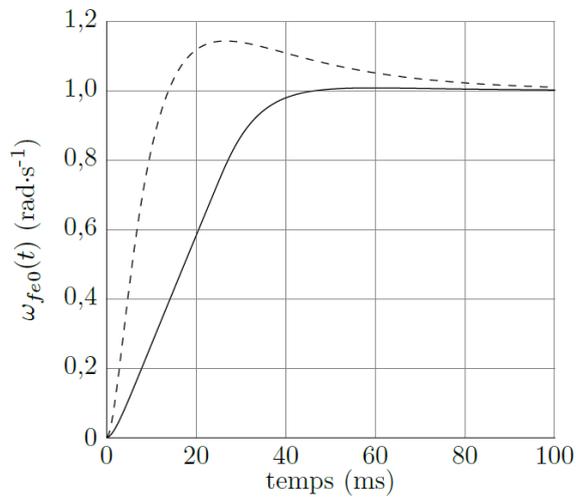
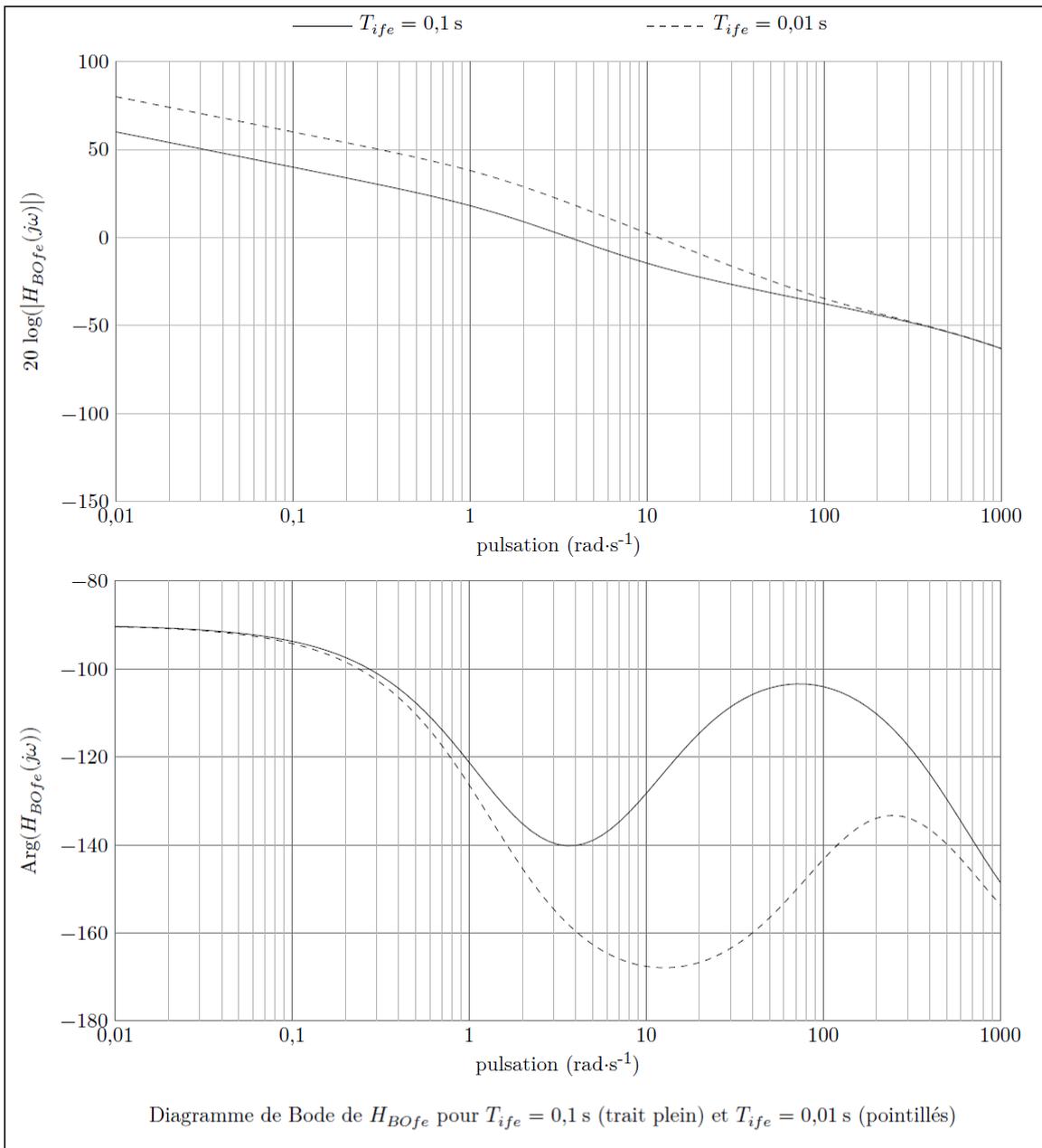
Le modèle est complété en utilisant les réglages déterminés aux questions précédentes. Afin de prendre en compte les caractéristiques du moteur linéaire, une saturation d'alimentation du moteur à 24 V est ajoutée ainsi qu'une modification de la commande associée qui n'est pas étudiée ici et qui ne modifie pas les réglages précédent. La réponse simulée  $\omega_{fe0}(t)$  de l'étage fin d'élévation à une consigne de vitesse en échelon  $\omega_{fe0\text{ cons}}(t) = 1 \text{ rad/s}$  est donnée en fin d'exercice.

**Q6.** Définir le temps pendant lequel la tension du moteur linéaire a été saturée et expliquer les effets de cette saturation sur les performances simulées par rapport aux performances simulées en gardant le modèle linéaire. Conclure sur la pertinence de la prise en compte de la saturation et sur les performances de l'étage fin d'élévation.



Tracé obtenu pour la fonction :

$$f(x) = -90 + \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1,6 \times 10^{-3}}}\right) - \arctan\left(\frac{0,75}{\sqrt{x \cdot 1,6 \times 10^{-3}}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{1,6 \times 10^{-3}}{x}}\right)$$



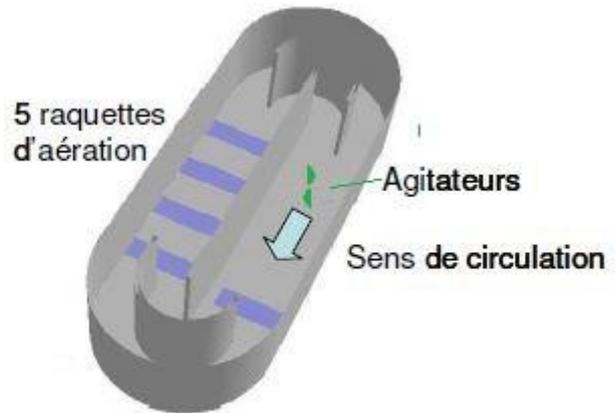
----- sans saturation  
 —— avec saturation

## 4 Valorisation des eaux usées

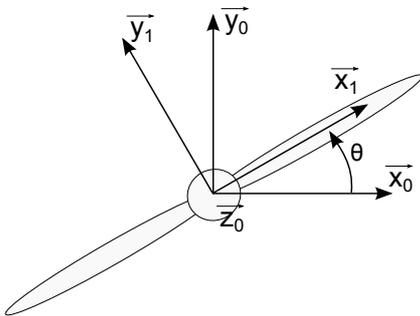
Le poste qui consomme entre 60 et 70 % de la dépense énergétique d'une station d'épuration est l'aération d'un des bassins. Elle se fait de manière couplée en insufflant de l'air à l'aide de diffuseurs et en créant un déplacement de l'eau à l'aide d'un agitateur à hélice. L'étude porte sur ce dispositif.

Le rôle de l'agitation dans les bassins à boues activées est d'homogénéiser les flots bactériens (ensemble de bactéries sur lesquelles viennent s'agglomérer des impuretés) et l'eau à traiter par une mise en circulation du fluide et un maintien en suspension de la biomasse, afin d'optimiser l'activité biologique de dépollution.

Critères	Valeurs
Précision statique	Ecart nul
Temps de réponse à 5%	20 s maxi
Dépassement	10% maxi



On suppose que l'hélice est en liaison pivot parfaite avec le bâti (noté 0). La rotation de l'hélice est obtenue par un moteur à courant continu. L'hélice est donc soumise à un couple moteur  $C_m(t)$ . Son moment d'inertie autour de son axe de rotation est noté  $J$  (avec  $J = 50 \text{ kg.m}^2$ ). La cinématique de la liaison est représentée par le paramètre  $\theta$  où  $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ . **Compte-tenu de la vitesse de rotation faible de l'hélice, on néglige l'effet de l'eau sur celle-ci.**



**Q1.** Montrez que l'application du principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir l'équation suivante :

$$\Omega(p) = \frac{1}{J.p} C_m(p)$$

où  $\Omega(p)$  représente la vitesse de rotation de l'hélice dans le domaine de Laplace.

Les autres équations issues de la modélisation du moteur à courant continu sont les suivantes :

Avec :

$$\begin{aligned} C_m(t) &= K_i i(t) \\ U_m(t) &= L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e(t) \\ e(t) &= K_e \omega(t) \end{aligned}$$

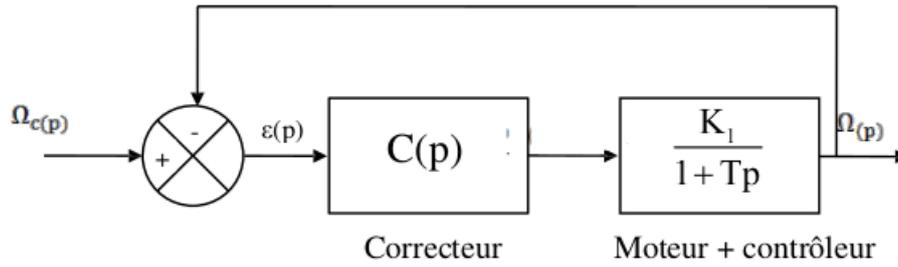
- $K_e = 1,3 \text{ V}/(\text{rad/s})$  : la constante de force électromotrice
- $K_i = 1,3 \text{ Nm/A}$  : la constante de couple
- $R = 3 \Omega$  : la résistance interne du moteur
- $L = 9 \text{ mH}$  : l'inductance interne du moteur

**Q2.** Mettre en place le schéma bloc issu de cette modélisation. L'entrée du schéma sera la tension d'alimentation  $U_m(p)$  et la sortie sera la vitesse de rotation de l'hélice  $\Omega(p)$ .

**Q3.** Calculer la fonction de transfert  $\frac{\Omega(p)}{U_m(p)}$ . Mettre cette fonction sous forme canonique. Faire l'application numérique.

**Q4.** Montrer que la fonction de transfert trouvée dans la question précédente peut s'approximer par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \frac{K_1}{1 + Tp} \text{ avec } T \sim 90 \text{ s et } K_1 = 0,77 \text{ (rad/s)/V}$$



On insère le moteur et son contrôleur dans un schéma à retour unitaire comme indiqué sur la figure ci-dessus. Dans un premier temps, on considère que le correcteur est un correcteur proportionnel de gain unitaire :  $C(p) = 1$ .

**Q5.** Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et l'écrire sous forme canonique. Déterminer littéralement puis numériquement l'écart statique **relatif** pour une entrée en échelon et le temps de réponse à 5%. Conclure.

On utilise maintenant un correcteur ayant la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = K_{cor} \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

Pour que ce correcteur fonctionne efficacement, il faut choisir la valeur de  $T_i$  afin de compenser le pôle dominant de la motorisation.

**Q6.** Écrire la condition sur  $T_i$  qui permet de compenser le pôle dominant de la motorisation. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et l'écrire sous forme canonique. Déterminer littéralement l'écart statique (en %) et le temps de réponse à 5%. Quelle valeur de  $K_{cor}$  faut-il choisir pour vérifier le cahier des charges ? Avec cette valeur de  $K_{cor}$ , y a-t-il un risque d'obtenir des dépassements ?

**Q7.** Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte. Déterminer les marges de stabilité de ce système. Conclure.