

Résolution d'une équation $f(x) = 0$

PSI - MP : Lycée Rabelais

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Cette solution existe si $f(a) \times f(b) < 0$. Les méthodes pour approcher la valeur de α consistent à construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$.

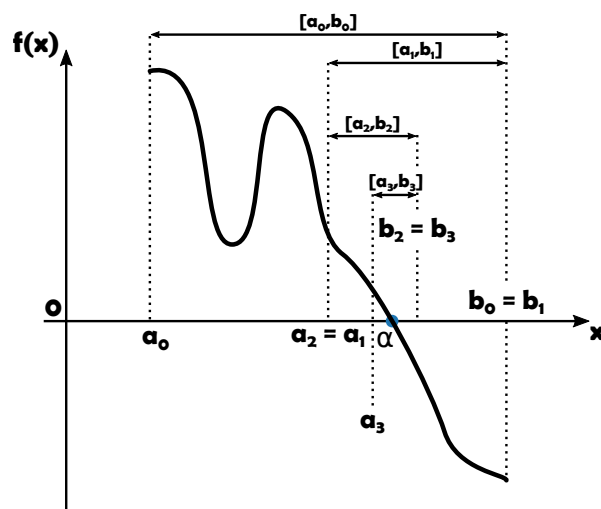
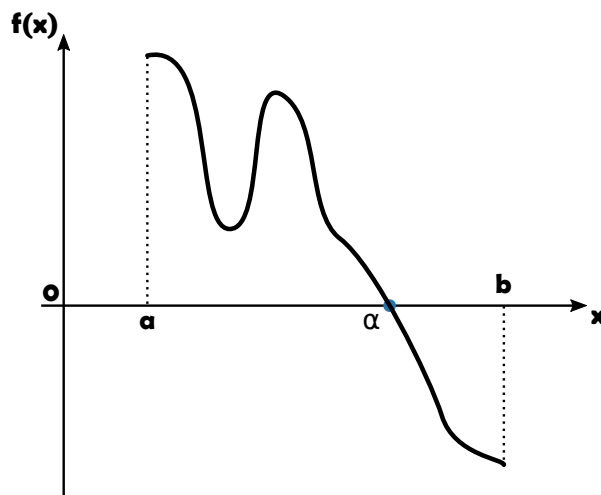
On fixe usuellement une tolérance ε (valeur fixée). On peut utiliser plusieurs critères d'arrêt :

- Critère absolu : $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$
- Critère relatif : $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| < \varepsilon$
- Critère résiduel : $|f(x_n)| < \varepsilon$

1 Méthode de dichotomie

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Calculer le point milieu m de l'intervalle $[a, b]$.
2. Évaluer le signe de $f(a) \times f(m)$.
3. En déduire le sous-intervalle $[a, m]$ ou $[m, b]$ dans lequel chercher la solution.
4. Repartir à l'étape 1 tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié.



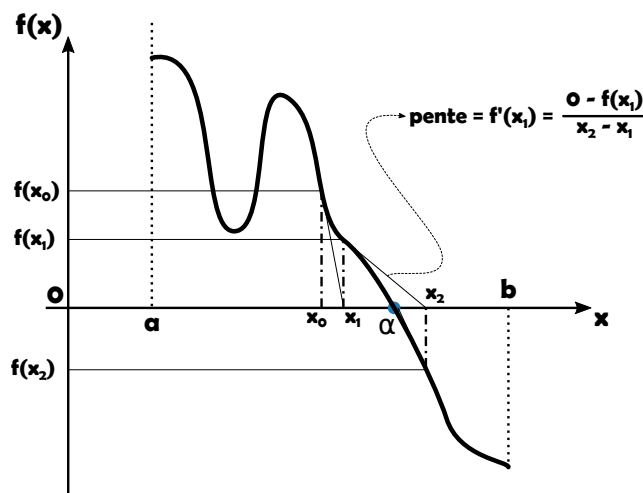
2 Méthode de Newton

Pour cette méthode, la fonction f doit être dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour résoudre l'équation $f(\alpha) = 0$, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Calculer une valeur $x_0 \in [a, b]$.
2. Construire la valeur suivante $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
3. Repartir à l'étape 2 tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié.

Pour retrouver la relation de récurrence, il faut écrire la pente $f'(x_i)$ en un point $(x_i, f(x_i))$.



Exercice d'application

On considère la fonction $f(x) = \sin(\sin(x)) - \sin(\sin(2x))$. On veut trouver la solution $\alpha \in [1, 2]$ de l'équation $f(\alpha) = 0$.

Question 1. Définir la fonction f .

Question 2. Tracer la courbe représentative de la fonction sur l'intervalle souhaité en utilisant le script ci-dessous :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def f(x):
5     return .....
6
7 Lx = np.linspace(.....) ## documentation numpy fournie ci-dessous
8
9 Lf = f(Lx) ## fonctionne car tableaux numpy !
10
11 plt.plot(Lx, Lf)
```

Documentation numpy

Le module numpy permet de gérer notamment des vecteurs et des tableaux. La plupart des opérations sur les listes peuvent s'appliquer sur les tableaux numpy. Quelques opérations élémentaires sont données ci-dessous :

- `A = numpy.zeros((a,b))` crée un tableau de `a` lignes et `b` colonnes.
- `numpy.shape(A)` donne le tuple associé à la taille de `A` (ici `(a,b)`).
- `A[i]` permet d'accéder à la ligne `i` au complet.
- `A[i,j]` permet d'accéder à la valeurs stockée à l'indice `i` de la ligne et `j` de la colonne (cela est équivalent à `A[i][j]`). Les slices du type `A[i:j, :k]` permettent de parcourir une portion du tableau (mais ce n'est pas équivalent à `A[i:j][:k]`).
- La fonction `append` ne fonctionne pas pour des tableaux numpy !

`numpy.linspace(start , stop , num)` renvoie un vecteur numpy de `num` valeurs régulièrement réparties sur l'intervalle `[start , stop]`.

Question 3. Postuler sur la solution à trouver.

Question 4. Déterminer la solution $\alpha \in]a, b[$ par la méthode de dichotomie

Question 5. Calculer puis définir la fonction `fprim(x)` qui renvoie la dérivée de la fonction f .

Question 6. En déduire la solution $\alpha \in]a, b[$ par la méthode de Newton.