

A2017 – SI PSI



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

ÉPREUVE DE SCIENCES INDUSTRIELLES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

SCIENCES INDUSTRIELLES - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Renault Twizy

Dans le contexte actuel d'économie des énergies fossiles et de réduction des émissions de gaz nocifs, la Twizy est un quadricycle à propulsion électrique fabriqué par le constructeur automobile Renault. Elle constitue une alternative aux modes de déplacement urbains actuels. Se situant entre un scooter et une voiture, elle adopte un mode de propulsion entièrement électrique pour une autonomie d'environ 100 km. Son rayon de braquage très court et ses dimensions réduites lui permettent de stationner perpendiculairement au trottoir. Revers de la médaille, la Renault Twizy ne propose que deux places en tandem et un compartiment de 31 dm³ sous le siège arrière.

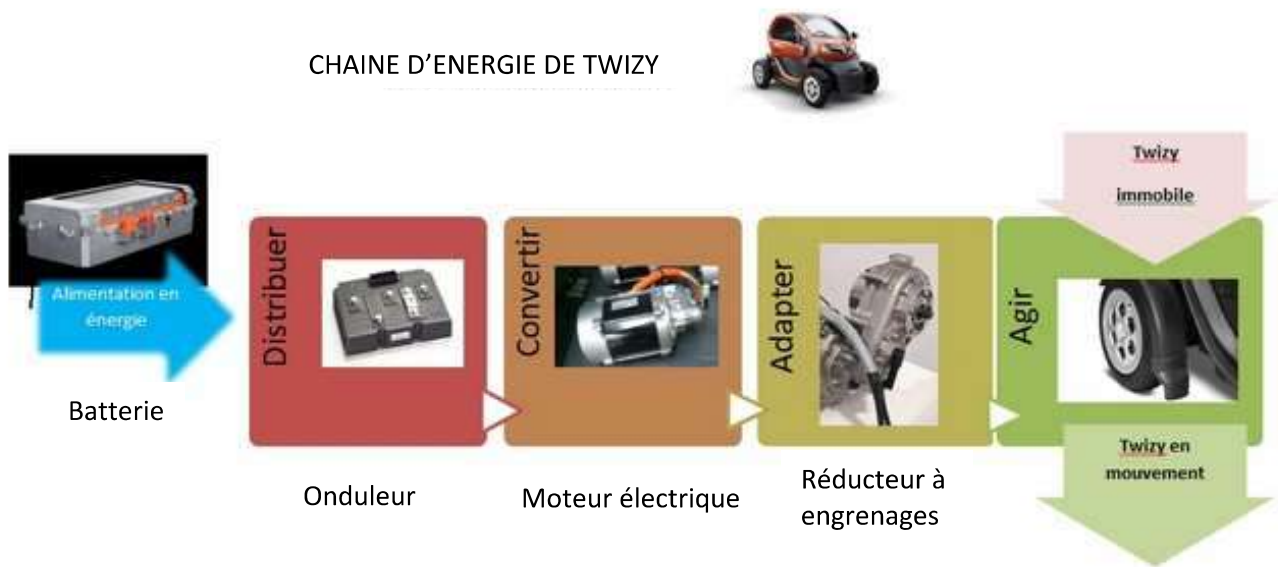


Logée sous le siège avant, la batterie, d'une capacité de 6,1 kWh (105Ah), se charge complètement en 3h30 sur une simple prise secteur via un câble d'une longueur de trois mètres.

Des informations nécessaires aux réponses du sujet sont fournies dans le diagramme partiel des exigences du véhicule Renault Twizy en **Annexe 1**. Il utilise le langage SysML.

ARCHITECTURE DE TWIZY:

La chaîne d'énergie de la Renault Twizy comprend une batterie au Lithium, un onduleur, un moteur électrique et un réducteur à engrenages. Ce réducteur est relié aux roues arrière par l'intermédiaire d'un différentiel conique qui n'est pas étudié dans ce sujet.



1 ETUDE DU CYCLE DE DEMARRAGE DU VEHICULE

Objectif : Etudier le cycle de démarrage du véhicule.

Le diagramme fourni en **Annexe 2** reprend la description du cycle de démarrage et d'arrêt du fonctionnement du véhicule Twizy en respectant la norme des diagrammes d'état définie dans le langage SysML.

Remarque : Quand toutes les conditions sont réunies, dans l'état « Marche Avant », il faut appuyer sur l'accélérateur pour faire avancer le véhicule.

Question 1 Après lecture du diagramme d'état, compléter les chronogrammes fournis sur le **document réponse** dans la configuration où le démarrage moteur du véhicule est déjà effectué et où l'on souhaite avancer.

2 VERIFICATION DES PERFORMANCES ANNONCEES DU VEHICULE

Objectif : Vérifier les caractéristiques fournies par le constructeur suite à un essai du véhicule effectué sur route horizontale suivant le protocole suivant :

- phase 1 : Démarrage à accélération maximale jusqu'à atteindre la vitesse maximale du véhicule ;
- phase 2 : Décélération sans freinage jusqu'à une vitesse stabilisée du véhicule ;
- phase 3 : Maintien de cette vitesse pendant un certain temps ;
- phase 4 : Décélération sans freinage jusqu'à arrêt du véhicule.

La figure **Annexe 3** donne les courbes d'évolution de différents paramètres du véhicule. Ces données sont relevées sur le bus CAN de la Twizy pendant l'essai décrit précédemment.

2.1 Vérification des exigences de vitesse, d'accélération maxi et de couple maxi disponible du véhicule

Question 2 A partir des courbes fournies en **Annexe 3** et sur le **document réponse**, commenter les courbes obtenues :

- sur la courbe de la vitesse du véhicule, tracer des segments verticaux permettant d'identifier les 4 phases du mouvement ;
- sur la courbe de courant, hachurer en **rouge** les phases consommatrices et en **bleu** les phases récupératrices d'énergie.

Question 3 A partir des courbes fournies en **Annexe 3**, relever :

- la vitesse maxi et le temps d'accélération de 0 à 45 km/h. Conclure par rapport aux exigences souhaitées ;
- le couple maxi lors de l'essai. Cette donnée physique traduit la poussée du véhicule.

2.2 Vérification de l'exigence d'autonomie du véhicule

Une des exigences les plus importantes sur les véhicules électriques est l'autonomie. L'autonomie annoncée est certifiée par l'UTAC, organisme d'homologation du véhicule en cycle ECE-15 pour la norme européenne. L'autonomie de Renault Twizy est influencée par plusieurs variables qui elles-mêmes dépendent majoritairement du conducteur. La vitesse, le dénivelé des routes empruntées, ainsi que le style de conduite adopté en sont les principales. Ainsi par exemple, on réalise généralement autour de 80 km en utilisant une éco-conduite et autour de 50 km dans des conditions sévères d'usage.

La capacité de charge électrique d'une batterie s'exprime en **Ah**, l'ampère-heure. C'est la quantité d'électricité traversant une section d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité de 1 ampère pendant 1 heure.

Question 4 A l'aide de la courbe simplifiée du document réponse qui représente l'évolution de la **vitesse du véhicule** pour un cycle de fonctionnement classique, déterminer la distance parcourue lors d'un cycle de fonctionnement.

Question 5 A l'aide de la courbe simplifiée du document réponse qui représente l'évolution du **courant moteur** en fonction du temps pour le même cycle de fonctionnement :

- déterminer la capacité nécessaire en Ah pour parcourir cette distance ;
- en déduire l'autonomie en km du véhicule ;
- conclure sur le style de conduite lors de l'essai.

3 CHOIX DU MOTO-REDUCTEUR

Objectif : Mettre en place un modèle permettant de choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

L'Annexe 4 donne le paramétrage et les données nécessaires pour cette modélisation.

3.1 Choix de l'ensemble moto-réducteur

3.1.1 Equation de mouvement du véhicule

Objectif : Déterminer l'équation de mouvement nécessaire pour choisir l'ensemble moto-réducteur.

Notations :

- Puissance extérieure des actions mécaniques du solide i sur le solide j dans le mouvement de i par rapport à 0 : $P(i \rightarrow j/0)$;
- Puissance intérieure des actions mécaniques entre le solide i et le solide j : $P(i \leftrightarrow j)$;
- Energie cinétique du solide i dans son mouvement par rapport à 0 : $E_c(i/0)$.

Question 6 Rédiger les réponses aux questions suivantes dans le cadre prévu à cet effet du document réponse :

- écrire la forme générale du théorème de l'énergie puissance appliqué au véhicule en identifiant les différentes puissances extérieures, les différentes puissances intérieures et les énergies cinétiques des différents éléments mobiles en respectant les notations précédentes ;
- déterminer explicitement les différentes puissances extérieures ;
- déterminer explicitement les différentes puissances intérieures ;
- déterminer explicitement les énergies cinétiques ;
- en déduire une équation faisant intervenir C_m , N_1 , N_2 , v , ω_m , $\omega_{1/0}$, $\omega_{2/0}$;
- expliquer pourquoi l'équation obtenue n'est pas l'équation de mouvement du véhicule.

Si $\Sigma = \{1,2,3,4\}$ où les solides 1, 2, 3, 4 sont ceux présentés dans l'annexe 4, alors on pourra écrire que la résultante dynamique de l'ensemble Σ par rapport au sol (noté O) vérifie :

$$\vec{R}_{d\Sigma/O} \cdot \vec{z}_s = (\vec{R}_{d1/O} + \vec{R}_{d2/O} + \vec{R}_{d3/O} + \vec{R}_{d4/O}) \cdot \vec{z}_s = 0$$

Question 7 A partir des théorèmes généraux de la dynamique, déterminer une équation supplémentaire qui permet simplement de déterminer $(N_1 + N_2)$. Puis avec l'équation précédente, écrire l'équation de mouvement du véhicule.

Question 8 Déterminer en énonçant les hypothèses nécessaires les relations entre (v, ω_{10}) , (v, ω_{20}) et (ω_m, ω_{10}) .
Montrer que l'équation de mouvement du véhicule peut se mettre sous la forme

$$\frac{r \cdot C_m}{R} - F_r = M_{eq} \cdot \frac{dv}{dt} \text{ avec } F_r \text{ fonction de } m, \mu, g, R \text{ et } \alpha \text{ et } M_{eq} \text{ fonction } m, J_m, J_R, R \text{ et } r.$$

3.1.2 Détermination du coefficient de résistance au roulement μ .

Objectif : Déterminer le coefficient de résistance au roulement μ suite à une expérimentation.

Question 9 En utilisant les résultats de l'essai effectué en Annexe 3, il est possible de déterminer le coefficient de résistance au roulement μ . Proposer un protocole expérimental pour l'évaluer :

- justifier dans quelle phase se placer ;
- définir la variable mesurée ;
- définir les hypothèses nécessaires ;
- énoncer les équations utilisées pour déterminer μ (sans chercher à réaliser l'application numérique).

3.1.3 Choix du moto-réducteur

Objectif : Choisir un ensemble moto-réducteur afin d'obtenir les exigences d'accélération et de vitesse.

Les courbes de l'évolution de l'accélération maximale $\frac{dv}{dt}$ du véhicule obtenue pour 3 moteurs présélectionnés en fonction du rapport de transmission r issues de l'équation de mouvement du véhicule précédente sont fournies sur le **document réponse**.

Question 10 Déterminer la valeur minimale du rapport de transmission r_{\min} pour les 3 moteurs proposés qui permet d'obtenir l'accélération maximale moyenne souhaitée dans les exigences de l'**Annexe 1**.

Question 11 En fonction des données de l'**Annexe 4**, déterminer la valeur maximale du rapport de transmission r_{\max} qui permet d'obtenir au moins la vitesse maximale du véhicule souhaitée dans les exigences de l'**Annexe 1**.

Question 12 A partir des résultats précédents, choisir parmi les 3 moteurs proposés, celui qui respecte les exigences d'accélération et de vitesse souhaitées permettant la plus grande plage possible pour le rapport de transmission.

3.2 Validation du choix constructeur du moto-réducteur

Objectif : Valider le choix du moto-réducteur fait par le constructeur.

Question 13 A partir de la vue 3D du réducteur choisi par le constructeur, fourni en **Annexe 5**, compléter le schéma cinématique du **document réponse**, calculer son rapport de transmission $r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}}$ et conclure.

4 MODELISATION DE LA MISE EN MOUVEMENT DU VEHICULE

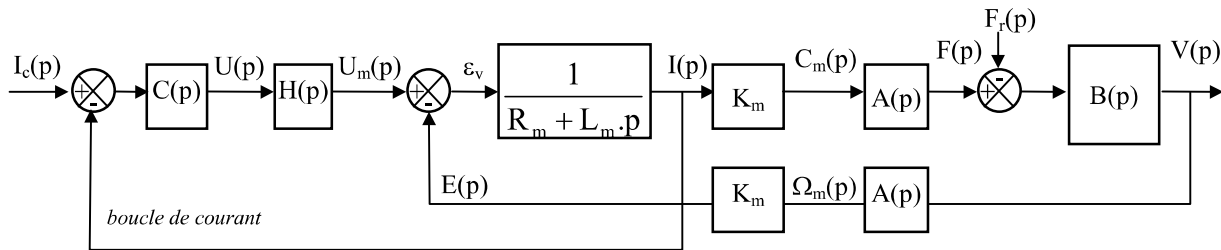
Objectif : Utiliser un modèle pour valider le choix de la machine électrique et du réducteur associé.

Le véhicule est équipé d'une machine électrique asynchrone alimentée par la batterie via un onduleur. Les commandes actuelles de ces machines permettent de se rapprocher du comportement d'une machine à courant continu.

On utilise le modèle d'une machine à courant continu en mode moteur, rappelé sur l'**Annexe 6**. Une boucle de courant permet d'éviter une surcharge de la machine électrique.

Nous rappelons l'équation de mouvement nécessaire pour la suite de l'étude : $\frac{r.C_m}{R} - F_r = M_{eq} \cdot \frac{dv}{dt}$

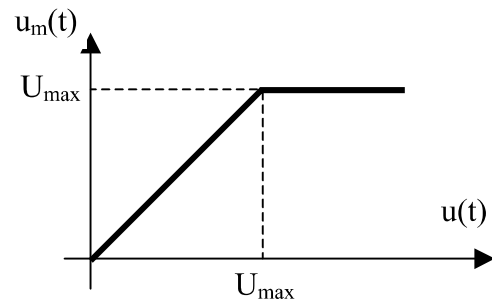
Le modèle du système est donné par le schéma bloc suivant :



Avec : $C(p) = R_m \left(1 + \frac{R_m}{L_m p}\right)$ le correcteur PI de la boucle de courant.

Le comportement du hacheur de fonction de transfert $H(p)$ en fonction de $u(t)$ est :

- $u_m(t) = u(t)$ si $u(t) \leq U_{max}$
- $u_m(t) = U_{max}$ si $u(t) > U_{max}$



4.1 Détermination du temps de réponse du véhicule lors de l'accélération avec une consigne de courant constante

Objectif : Mettre en place un modèle pour déterminer le temps de réponse du véhicule lors d'une accélération.

4.1.1 Détermination de la réponse en vitesse dans le cas où $u_m(t) \leq U_{max}$

Question 14 Appliquer la transformée de Laplace à l'équation de mouvement rappelée en début de section 4, lors d'une accélération. En déduire $A(p)$ et $B(p)$.

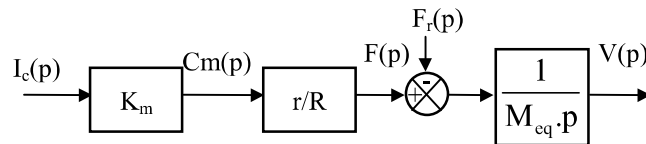
Question 15 Calculer, si $F_r(p) = 0$, la fonction de transfert $\frac{I(p)}{I_c(p)}$ avec les paramètres du schéma bloc, puis en remplaçant $A(p)$ et $B(p)$ à l'aide de la question précédente. On appellera $H_T(p)$ cette fonction de transfert et on l'exprimera sous forme canonique.

Question 16 Calculer le courant en régime établi $I(\infty)$ si $I_c(p)$ est un échelon d'amplitude I_0 . Montrer alors que

$$I(\infty) \approx I_0 \text{ sachant que } \frac{L_m \cdot K_m^2 \cdot (r/R)^2}{R_m^2 M_{eq}} = 5 \cdot 10^{-4} \ll 1.$$

La constante de temps électrique étant petite devant la constante de temps mécanique on supposera que la condition précédente est toujours vraie.

Le schéma bloc simplifié du véhicule si $i(t) = i_c(t)$ et $u_m(t) < U_{max}$ est :



Question 17 En utilisant le schéma bloc précédent, calculer $V(p)$ en fonction de $I_c(p)$ et $F_r(p)$ puis en utilisant le tableau fourni en **Annexe 7**, déterminer l'équation de la vitesse $v(t)$ du véhicule dans le cas où $i_c(t)$ et $F_r(t)$ sont des échelons respectivement d'amplitude I_0 et F_0 .

4.1.2 Détermination du temps de réponse en vitesse à partir de l'instant où $u_m(t)$ atteint U_{max}

Dans le schéma bloc, on note pour une variable x , $\Delta x(t) = x(t) - x_0$ avec $x_0 = x(t_0)$ et t_0 l'instant où $u_m(t)$ atteint U_{max} . En particulier $\Delta v(t) = v(t) - v_0$ avec v_0 la vitesse atteinte à la fin de la phase à accélération constante.

Question 18 La tension d'alimentation du moteur ne peut pas dépasser une valeur maximale U_{max} . Le régulateur la limitera automatiquement à cette valeur. Compléter le schéma bloc simplifié du véhicule du **document réponse** si $u_m(t) = U_{max}$.

Question 19 Le modèle précédent a permis de déterminer $\Delta V(p) = H_1(p) \cdot \Delta U(p) + H_2(p) \cdot F_r(p)$ avec

$$H_1(p) \approx \frac{1}{1 + \frac{R_m \cdot M_{eq}}{(K_m \cdot r/R)^2} p} \text{ et } H_2(p) \approx -\frac{\frac{R_m}{(K_m \cdot r/R)^2}}{1 + \frac{R_m \cdot M_{eq}}{(K_m \cdot r/R)^2} p}. \text{ Donner son temps de réponse à 5\%.}$$

4.1.3 Temps nécessaire pour passer d'une vitesse nulle à 95% de la vitesse maximale

Question 20 Donner l'allure de la réponse en vitesse du véhicule pour une consigne en courant constante telle que $u_m(t)$ croît de manière monotone jusqu'à U_{max} . Dédurre de ce qui précède le temps t_{max} pour passer d'une vitesse nulle à 95% de la vitesse maximale en fonction de r , R , M_{eq} , K_m , R_m , I_0 , v_0 et F_0 .

4.2 Validation du choix de la machine électrique et du réducteur associé

Objectif : Valider le choix de la machine électrique et du réducteur associé. Vérifier le modèle à partir d'une mesure sur le véhicule.

Question 21 Un calcul numérique utilisant les résultats précédents a permis d'obtenir la courbe du **document réponse**. Proposer un rapport de transmission permettant de respecter les exigences souhaitées. Conclure par rapport au réducteur choisi et donné en **Annexe 5**.

Question 22 Une mesure réalisée avec la pédale d'accélérateur à 100% est donnée sur le **document réponse**. On définit deux zones particulières de la réponse en vitesse du véhicule : zone 1 entre 0 et 15 km/h et zone 2 entre 15 et 45 km/h. Pour chaque zone de fonctionnement, proposer par identification, un modèle littéral de la vitesse du véhicule. Déterminer les valeurs numériques des constantes intervenant dans ces modèles (faire les tracés nécessaires). Justifier le choix de la zone 1 grâce à la courbe de couple.

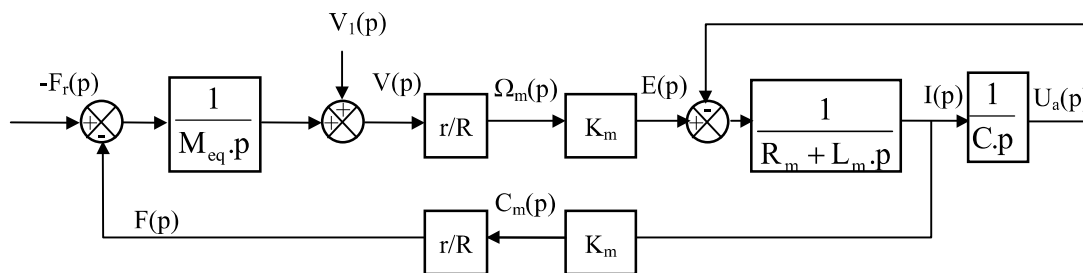
5 RECUPERATION D'ENERGIE

Objectif : étudier la capacité du véhicule à freiner grâce à la récupération de l'énergie.

La machine électrique fonctionne dans cette situation en **génératrice**.

L'accumulateur sera modélisé par un condensateur de capacité C.

Le modèle du système est donné par le schéma bloc suivant :



5.1 Influence de la capacité C sur les performances en décélération par récupération d'énergie

Objectif : étudier l'influence de la capacité sur la décélération du véhicule.

Question 23 Justifier les blocs $\frac{1}{R_m + L_m \cdot p}$ et $\frac{1}{C \cdot p}$.

Question 24 On pose $V(p) = H_3(p) \cdot V_1(p) + H_4(p) \cdot F_r(p)$. Calculer $H_4(p)$.

Pour la suite on donne :
$$H_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{(K_m \cdot r / R)^2}{M_{eq} \cdot p} \cdot \frac{C \cdot p}{(R_m + L_m p) \cdot C \cdot p + 1}}$$

Question 25 Déterminer, avec le théorème de la valeur initiale, la décélération a_0 à l'instant où le véhicule passe en récupération d'énergie avec $F_r(t) = F_0$ et $v_1(t) = v_0$ des constantes. On prendra $L_m = 0$ pour ce calcul car son effet n'est visible que pour un temps très faible (remarque : $v(t)$ vaut initialement v_0 , soit $v(t) = v_0 + \int a \cdot dt$ avec $a = \frac{dv}{dt}$).

Question 26 Déterminer la vitesse du véhicule v_∞ en régime établi si $F_r(t) = 0$ et $v_1(t) = v_0$ des constantes. Conclure sur l'influence de la capacité C du condensateur sur le freinage avec récupération d'énergie.

5.2 Validation du modèle et choix technologiques pour le freinage

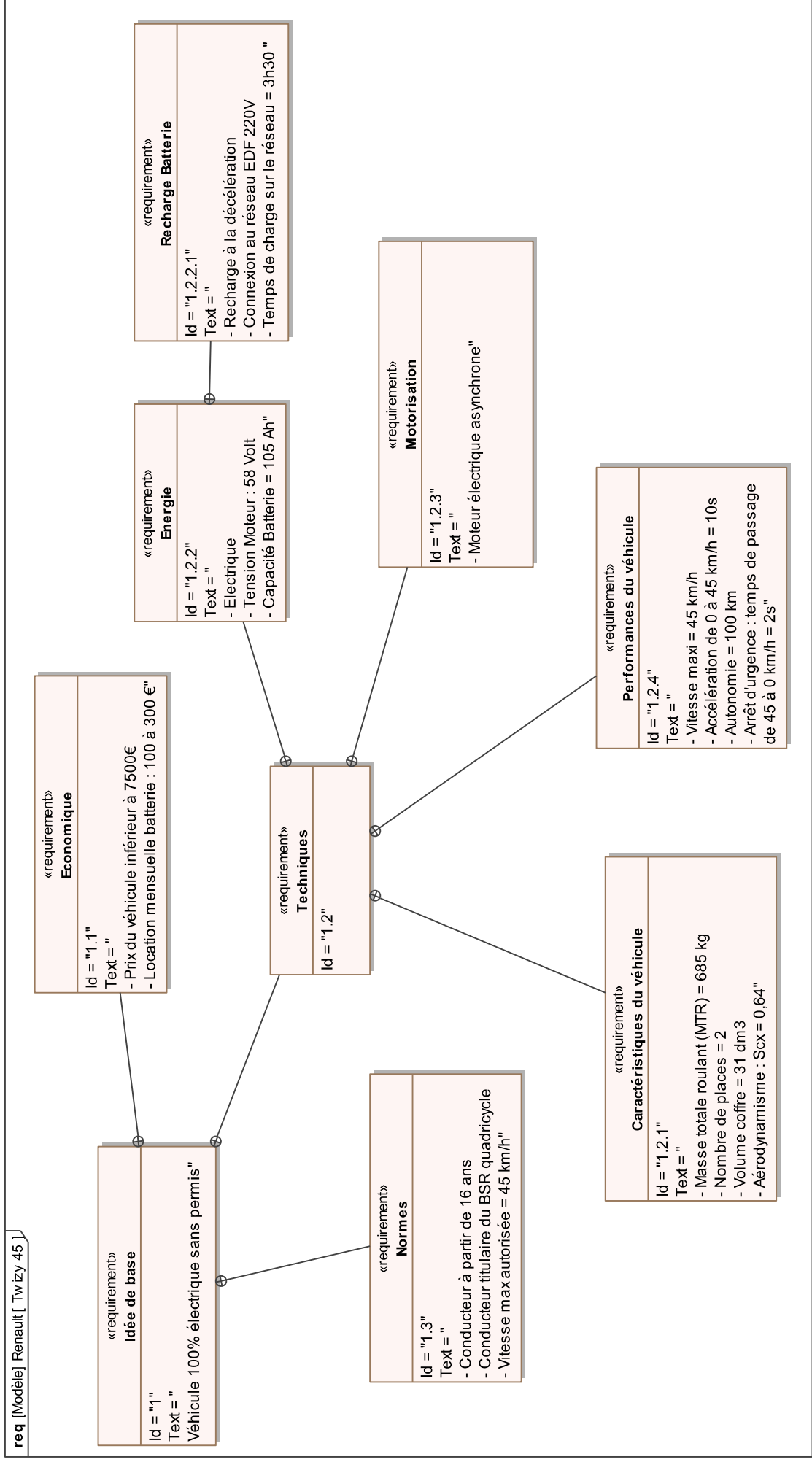
Objectif : vérifier si le freinage par récupération d'énergie est suffisant.

Le modèle précédent a permis de simuler le comportement du véhicule en récupération d'énergie en fonction de la charge C de l'accumulateur. D'autre part, une mesure de décélération a été réalisée sur le véhicule avec une consigne de vitesse nulle et une vitesse initiale proche de 45 km/h.

Question 27 Déterminer à partir des courbes issues de la simulation (voir courbes fournies sur le document réponse) les temps nécessaires pour réduire la vitesse de 30% puis 50%. (Faire les tracés nécessaires). Comparer les résultats obtenus par simulation à la mesure fournie sur le **document réponse**. Conclure sur le modèle utilisé et en particulier sur le résultat de la question précédente.

Question 28 Justifier que le freinage par récupération d'énergie est insuffisant. Quel organe supplémentaire serait indispensable pour assurer la sécurité.

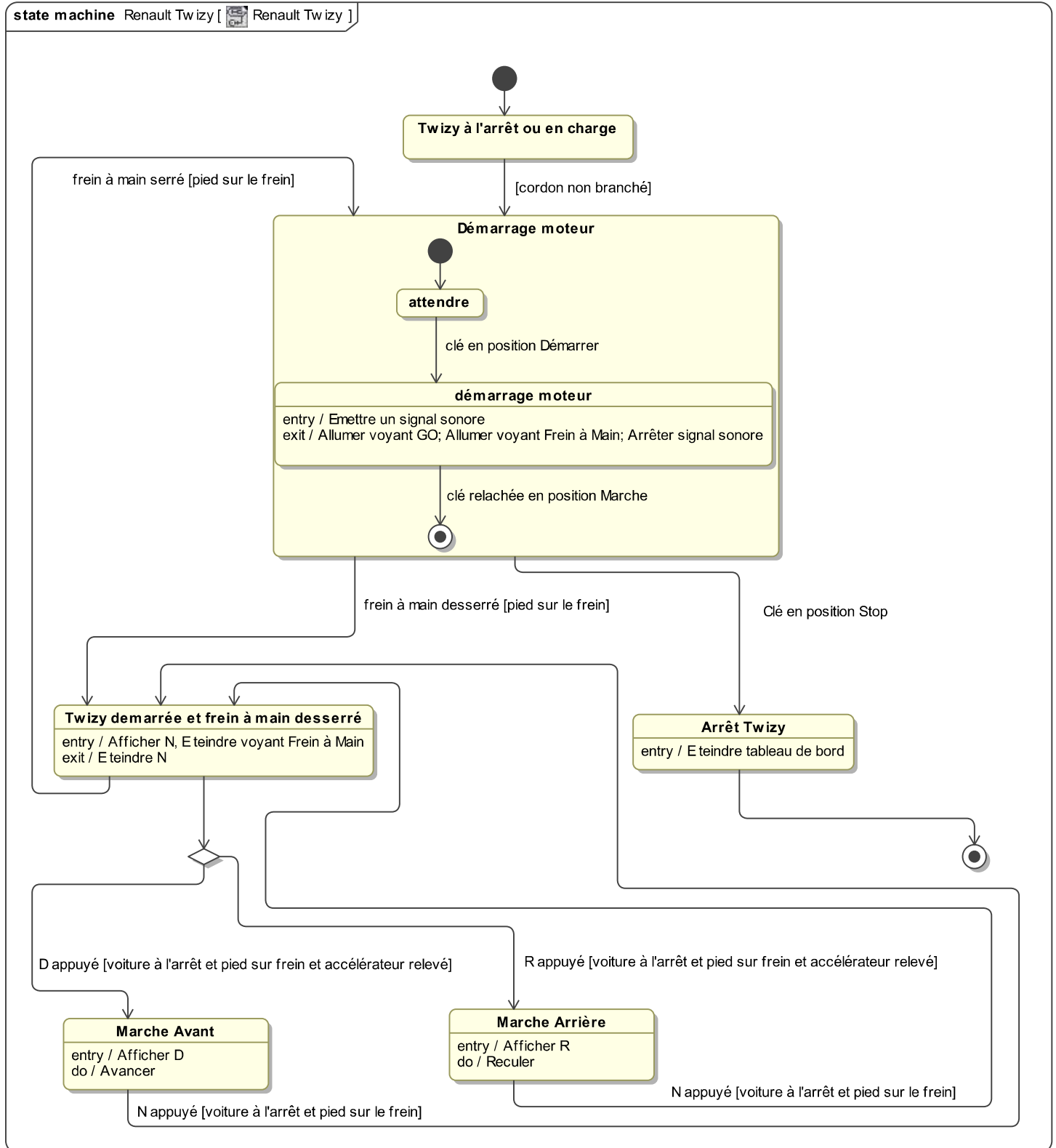
Annexe 1 : SYSML (Diagramme des exigences parties)



Renault Twizy.

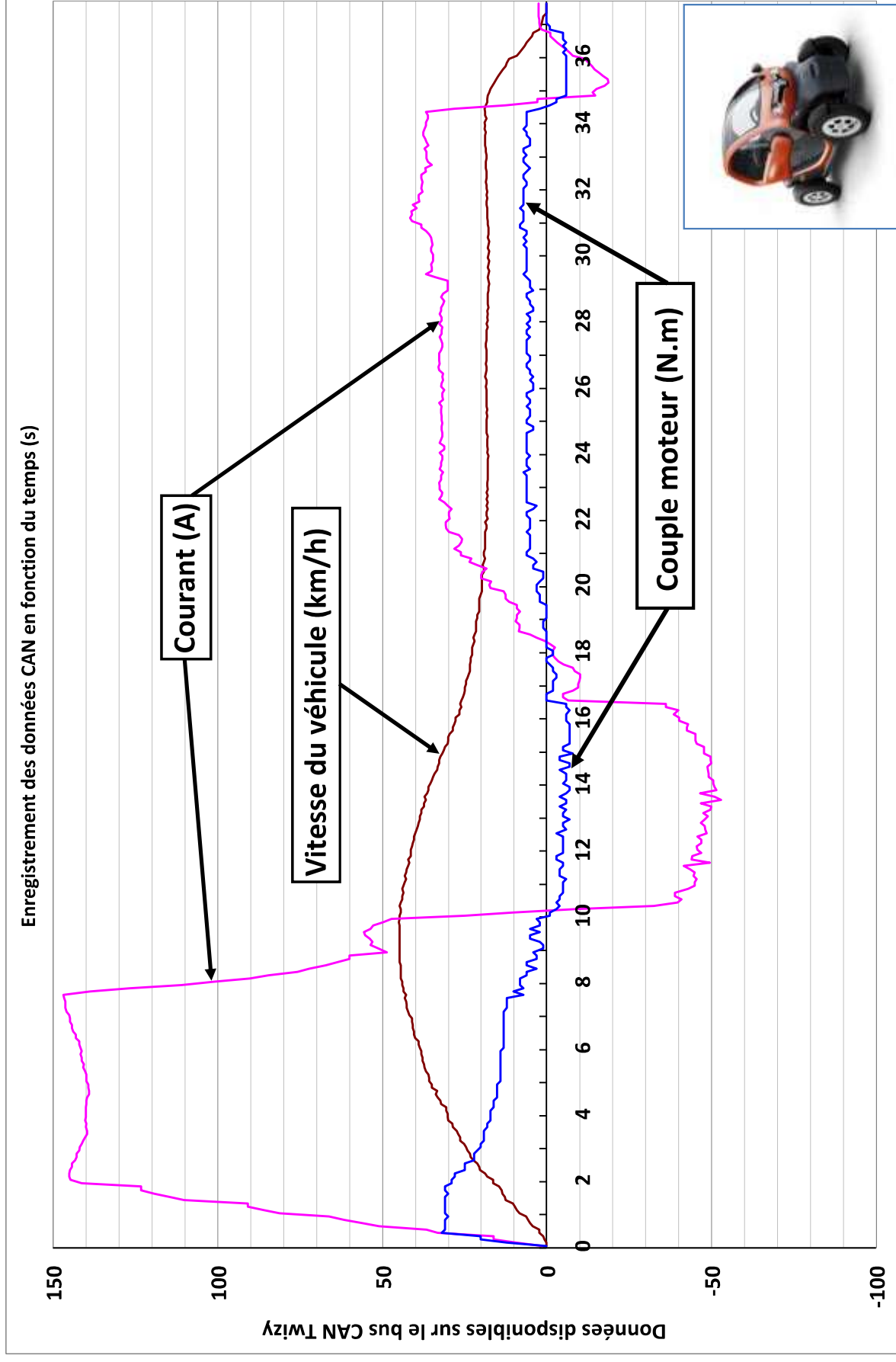
Annexe 2 : SYSML

(Diagramme d'état partiel)



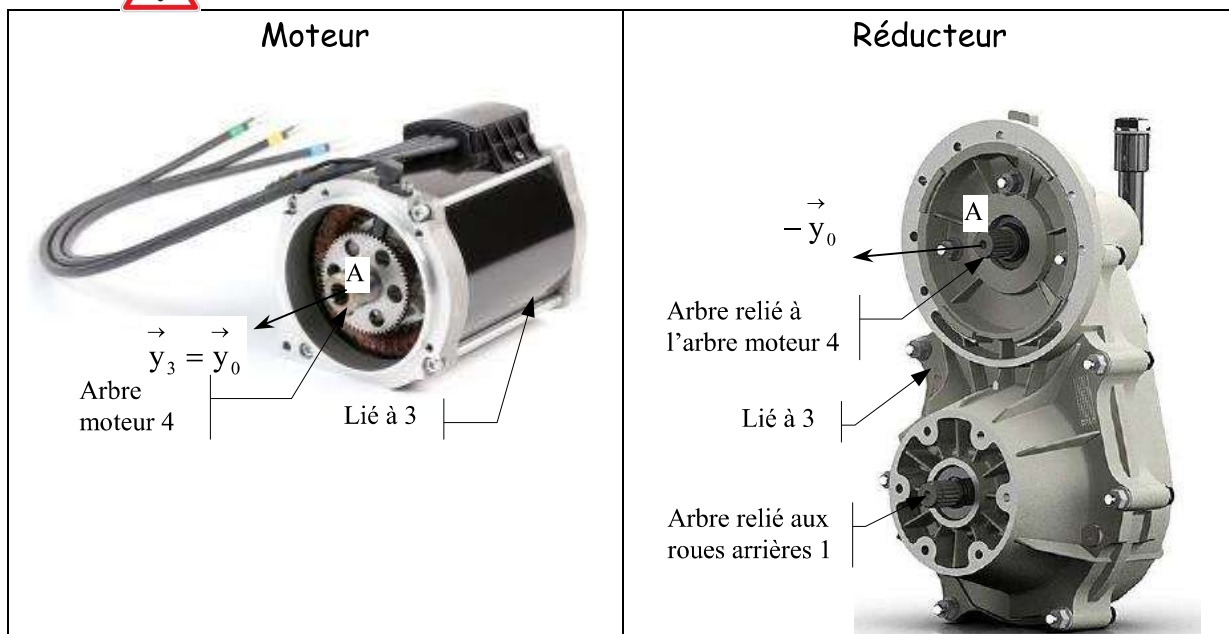
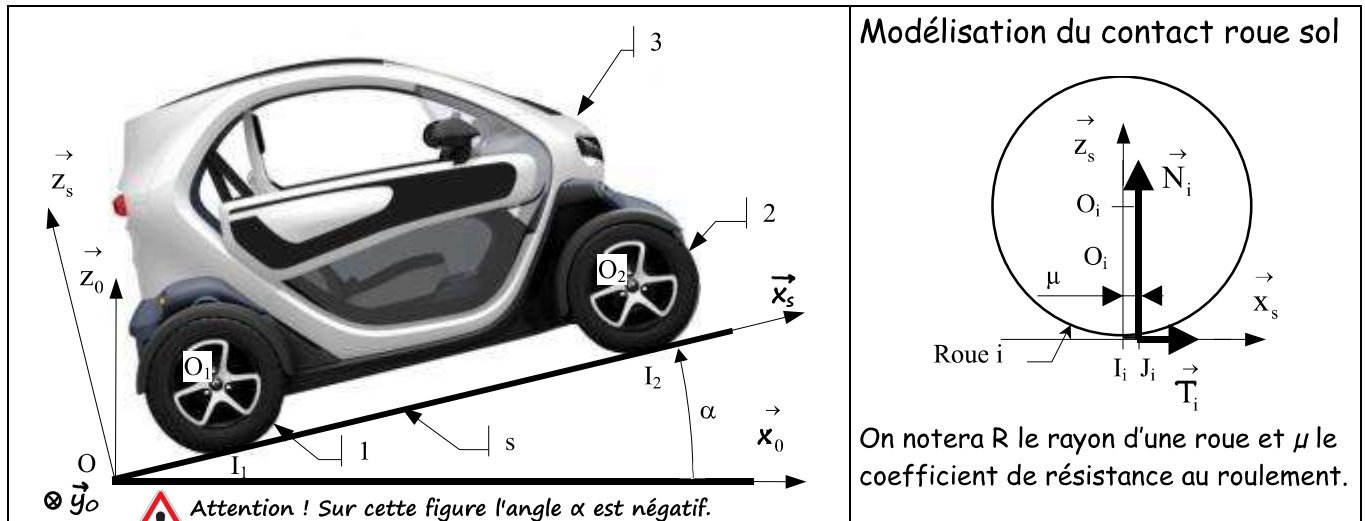
Renault Twizy.

Annexe 3 : essai routier



Renault Twizy.

Annexe 4 : Paramétrages, notations et hypothèses



La voiture se déplace sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale où $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_s) = (\vec{z}_0, \vec{z}_s)$ et $\vec{y}_0 = \vec{y}_s$.

- Le vecteur \vec{z}_0 est vertical ascendant et on notera g l'accélération de la pesanteur.
- Le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen.
- Le centre de gravité de l'ensemble voiture et charges est supposé rester dans le plan de symétrie de la voiture $(O, \vec{x}_s, \vec{z}_s)$
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue - sol.
- Les roues roulent sans glisser sur le sol en I_i .
- Le coefficient de résistance au roulement μ est identique pour tous les contacts roue - sol : $\mu = 3.10^{-3}$ m. On pose $\vec{T}_i = \mu \vec{x}_s$, avec $\mu > 0$, si le déplacement du véhicule est suivant $+\vec{x}_s$ (ce qui est supposé ici).
- Les frottements de l'air sur le véhicule seront négligés.
- Seules les roues arrière sont motrices. Elles sont mises en rotation par un unique ensemble moto-réducteur.

Actions mécaniques

Le torseur des actions mécaniques du sol sur un ensemble, avant ou arrière, de roues est :

$$\{F(s \rightarrow i)\}_{J_i} = \begin{Bmatrix} T_i \vec{x}_s + N_i \vec{z}_s \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } J_i \in (0, \vec{x}_s, \vec{z}_s) \text{ et } i = 1 \text{ (roues arrière) ou } 2 \text{ (roues avant)}$$

Attention au modèle retenu ici. Il y a bien roulement sans glissement en I_i et donc $\vec{V}(I_i \in i/O) = \vec{0}$.

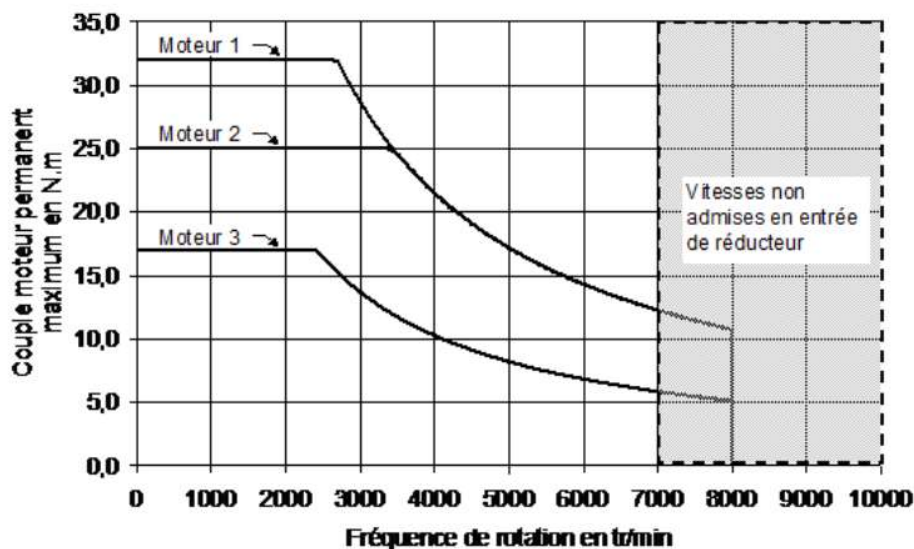
MAIS le torseur de l'action mécanique du sol sur l'ensemble de roues i s'applique, lui, au point J_i .

C'est cette particularité qui permet de faire apparaître la résistance au roulement et donc :

$$P_{O \rightarrow 1/O} \neq 0 \text{ et } P_{O \rightarrow 2/O} \neq 0$$

Le moteur permet d'appliquer un couple entre 3 et 4 tel que $\{F(3 \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_0 \end{Bmatrix}$

Courbes caractéristiques de différents moteurs :



Masses et inerties

Moment d'inertie du rotor moteur autour de son axe (A, \vec{y}_0) : $J_m = 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$.

Moment d'inertie ^{seule} d'une roue autour de son axe (O_i, \vec{y}_0) : $J_R = 0,1 \text{ kg.m}^2$.

Moment d'inertie du réducteur ramené sur l'arbre moteur 4 : $J_{red} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$.

Masse du véhicule en charge : $m = 685 \text{ kg}$.

Centre de gravité du véhicule en charge sera noté : G .

Les autres inerties seront négligées.

Grandeurs cinématiques

Soit ω_m la vitesse de rotation de l'arbre moteur 4 par rapport à 3, ω_{13} la vitesse de rotation des roues arrière 1 par rapport à 3 et ω_{23} la vitesse de rotation des roues avant 2 par rapport à 3.

On notera r le rapport de transmission du réducteur tel que $\omega_m = r \cdot \omega_{13}$.

On appellera $\vec{V}(G, 3/0) = \vec{V}_{3/0} = v \vec{x}_s$ la vitesse du véhicule.

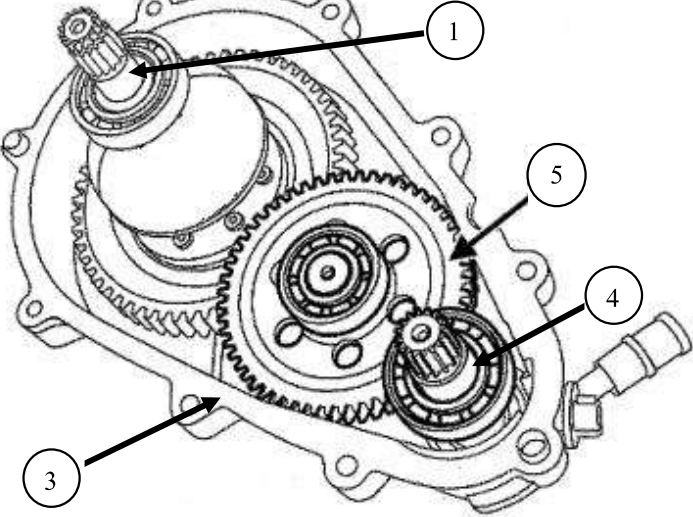
Les roues ont un rayon $R = 280 \text{ mm}$.

Attention : ici, $r > 1$ est bien le rapport de "transmission" avec :

$$r = \frac{1}{\text{rapport de réduction}}$$

Renault Twizy.

Annexe 5 : Paramétrages du réducteur



$Z_4 = 17$ dents
 $Z_{5a} = 57$ dents
 $Z_{5b} = 17$ dents
 $Z_1 = 68$ dents

vue 3D (sans le 1/2 carter supérieur) du réducteur

Annexe 6 : Equations de la machine à courant continu

Mode moteur

$$u_m(t) = e(t) + R_m.i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt}$$

$$c_m(t) = k_m.i(t)$$

$$e(t) = k_m.\omega_m(t)$$

Mode génératrice


$$e(t) = u_a(t) + R_m.i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt}$$

$$c_m(t) = k_m.i(t)$$

$$e(t) = k_m.\omega_m(t)$$

Annexe 7 : Table de transformées de Laplace

f(t) , t > 0	F(p)
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t ²	$\frac{2}{p^3}$
e ^{-at}	$\frac{1}{p + a}$



Attention ! On rappelle que si les conditions initiales ne sont pas nulles, on aura : $L[f'](p) = p.F(p) - f(0^-)$.
 avec f, la fonction dans le domaine temporel
 et F sa représentation symbolique dans le domaine de Laplace.