Centre d'intérêt 1

Principe fondamental de la dynamique

PSI - MP : Lycée Rabelais

Pré-requis

Notions de mécaniques (cinématique, actions mécaniques, principe fondamental de la statique)

Maths : géométrie vectorielle, intégration, matrice

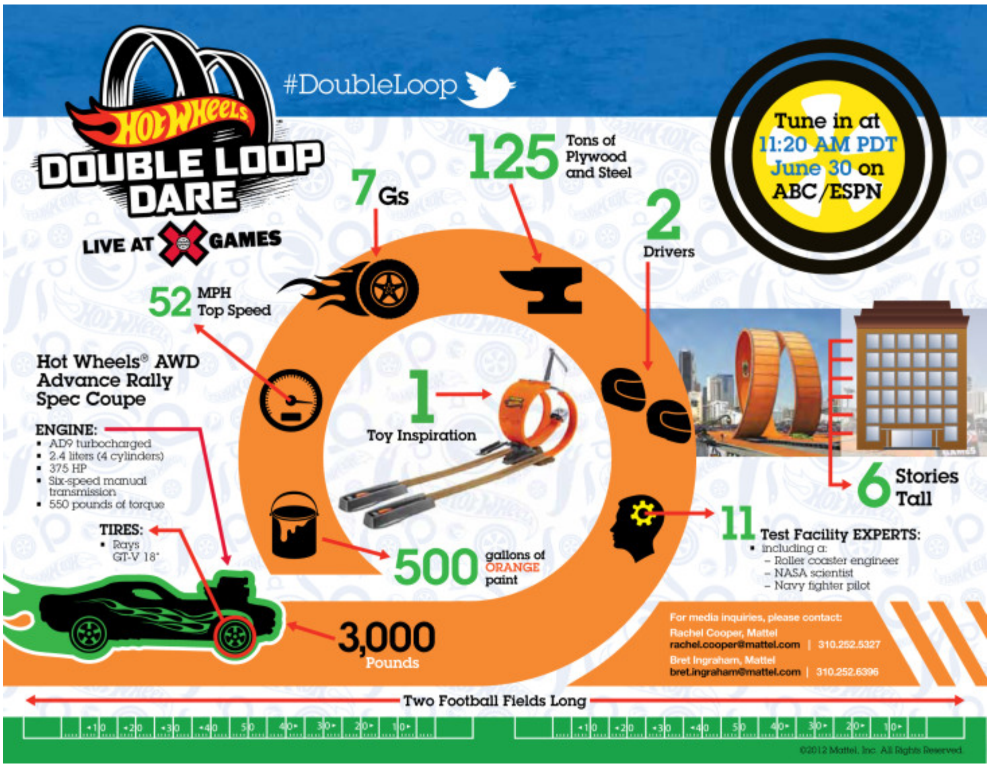
Objectifs

Calculer/Simplifier/Transporter une matrice d'inertie

Être capable de déterminer une équation de mouvement dans le cas général

Être capable de déterminer une action mécanique en connaissant le mouvement des solides

1 Introduction



Looping en voiture : X-Games 2012

Ce premier chapitre a deux objectifs principaux :

- Déterminer le mouvement d'un solide lorsqu'il n'est pas à l'équilibre ;
- Déterminer les actions mécaniques exercées sur un solide lorsque celui-ci n'est pas à l'équilibre.

Nous nous intéresserons notamment à l'étude de la voiture utilisée pour réaliser le looping présenté sur la première figure. À la fin du chapitre, nous pourrons déterminer :

- La vitesse atteinte à la fin de la phase d'accélération (en entrée du looping) ;
- La vitesse nécessaire pour que la voiture fasse le tour du looping.

Quelques informations peuvent être récupérer sur le net concernant l'évènement :

Puissance de la voiture	375 chevaux
Couple maxi	249 N.m
Poids	1360 kg
Hauteur du looping	20 m
Distance d'accélération	≈ 100 m

Pour répondre à ces problèmes, il faudra introduire **le principe fondamental de la dynamique**.

1.1 Formulation de "physique" : mécanique du point

Le principe de la dynamique s'énonce, en mécanique du point, de la manière suivante :

Pour un point matériel M dans un référentiel galiléen R, la somme des forces s'exerçant sur ce point matériel est égale au produit de la masse par l'accélération :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext \to M}} = m \cdot \overrightarrow{a_{M/R}}$$

- $\sum \overrightarrow{F_{ext \to M}}$: la somme des forces extérieures s'appliquant sur le point matériel M
- m : la masse du point matériel
- $\overrightarrow{a_{M/R}}$: le vecteur accélération du point matériel M par rapport au repère galiléen R

Cette formulation, bien que juste, n'est pas suffisante en sciences de l'ingénieur. Cela est notamment lié au fait que les rotations ne sont pas prises en compte dans cet énoncé. Il sera donc nécessaire de faire intervenir la notion de torseurs.

1.2 Formulation de SI : mécanique du solide

À retenir

Dans un repère Galiléen R, le torseur des actions mécaniques appliquées à un ensemble de solides (E) est égale au torseur dynamique de cet ensemble de solides dans son mouvement par rapport à R.

$$\sum \{ext \to E\} \quad = \quad \{\mathscr{D}_{E/R}\}$$

Cette égalité est une égalité **torsorielle**. À partir de ce principe, il est donc possible d'écrire les deux théorèmes suivants :

Résultante dynamique de E par rapport à R

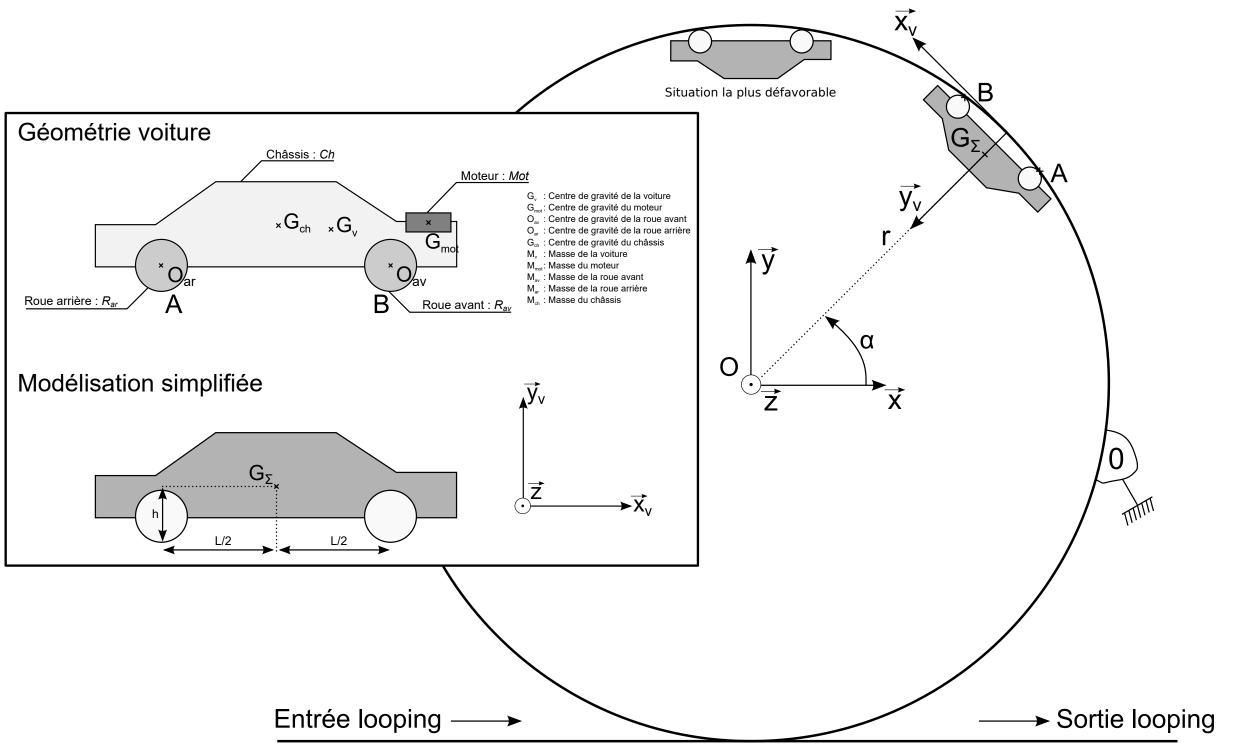
Théorème de la résultante dynamique : $\sum \vec{R}_{ext \to E} = \underbrace{\overrightarrow{Rd}_{E/R}}$

Théorème du moment dynamique en A : $\sum \vec{M}_{A, ext \to E} = \underbrace{\vec{\delta}_{A, E/R}}$

Moment dynamique en A de E par rapport à R

La plupart du temps, on préfèrera travailler sur une **équation scalaire**. On écrira donc l'un de ces deux théorèmes en projection sur une direction particulière.

Résolution du problème : la voiture peut-elle faire le tour du looping ?



Hypothèses :

- La voiture complète, notée Σ, est composée de son châssis, de ses roues et de son moteur. Elle est, dans le pire des cas, en haut du looping. La structure fixe du looping est notée 0.
- La voiture complète a une masse $M = 1360$ kg. On suppose que le centre de gravité de l'ensemble est G_Σ.
- $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{x_v}$; $\overrightarrow{AG_\Sigma} = \frac{L}{2}\overrightarrow{x_v} + h\overrightarrow{y_v}$; $\overrightarrow{G_\Sigma B} = \frac{L}{2}\overrightarrow{x_v} - h\overrightarrow{y_v}$
- On suppose que la voiture se déplace à vitesse constante V dans le looping.
- On considère des contacts ponctuels unilatéraux au niveau des contacts roue/sol. Compte-tenu du rayon important du looping, on considère que ces liaisons ponctuelles sont de normale $\overrightarrow{y_v}$. On aura donc :

$$\{0 \xrightarrow{A} \Sigma\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{0\xrightarrow{A}\Sigma} = Y^A_{0\Sigma}.\overrightarrow{y_v} \\ \overrightarrow{M}_{A,0\xrightarrow{A}\Sigma} = \overrightarrow{0} \end{array} \right._A \qquad \{0 \xrightarrow{B} \Sigma\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{0\xrightarrow{B}\Sigma} = Y^B_{0\Sigma}.\overrightarrow{y_v} \\ \overrightarrow{M}_{B,0\xrightarrow{B}\Sigma} = \overrightarrow{0} \end{array} \right._B$$

Question 1 : Donner les conditions à respecter pour respecter les contraintes d'unilatéralité.

Il y a contact des roues sur le sol si :

$$Y^A_{0\Sigma} > 0$$

$$\text{et} \quad Y^B_{0\Sigma} > 0$$

Question 2 : Donner la/les stratégies d'isolement afin de déterminer la vitesse V afin de respecter les contraintes d'unilatéralité.

J'isole Σ soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- poids $\rightarrow \Sigma$ ✓
- $0 \xrightarrow{A} \Sigma$ ✓
- $0 \xrightarrow{B} \Sigma$ ✗ Pour avoir uniquement $Y^A_{0\Sigma}$, je sais que

$$\overrightarrow{M}_{B,0\xrightarrow{B}\Sigma} \cdot \vec{z} = 0$$

• Je vais donc écrire le th. des moments en B et en project° sur $\vec{z}$:

$$\underbrace{\vec{M}_{B, pds \to \Sigma} \cdot \vec{z}} + \underbrace{\vec{M}_{B, 0 \xrightarrow{A} \Sigma} \cdot \vec{z}} + \underbrace{\vec{M}_{B, 0 \xrightarrow{B} \Sigma} \cdot \vec{z}}_{=0} = \underbrace{\vec{\delta}_{B, \Sigma/0} \cdot \vec{z}}_{\text{À calculer !}}$$

• De même pour déterminer $Y^B_{0\Sigma}$, j'écris le th. des moments en A et en project° sur $\vec{z}$.

• Remarque : dans le pire des cas, $\alpha = 90°$ et donc :

$$\vec{y_v} = -\vec{y}$$
$$\text{et } \vec{x_v} = -\vec{x}$$

2 Définition

Le torseur dynamique d'un solide S dans un référentiel R, écrit en un point A quelconque, se définit de la manière suivante :

$$\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{Rd}_{S/R} = \int_{M \in S} \underbrace{\vec{\Gamma}_{M \in S/R}}_{\text{Accélérat° en M de S par rapport à R}} \cdot dm \\ \vec{\delta}_{A,S/R} = \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M \in S/R} \cdot dm \end{array} \right._A$$

$$\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{Rd}_{S/R} \text{ en } kg \cdot m/s^2 = N \\ \vec{\delta}_{A,S/R} \text{ en } kg \cdot m^2/s^2 = N \cdot m \end{array} \right._A$$

Les calculs à partir de la définition - notamment à cause des intégrales - vont rapidement s'avérer complexes. Il est donc nécessaire d'introduire au préalable certaines notions concernant la géométrie des masses pour simplifier ces calculs. On ne prendra pas le temps de tout démontrer mais on admettra qu'il est donc possible d'écrire le torseur dynamique de la manière suivante :

À retenir

$$\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{Rd}_{S/R} = \overbrace{m}^{m \text{ est la masse du solide}} \cdot \vec{\Gamma}_{G \in S/R} & \text{(résultante dynamique de } S \text{ par rapport à } R) \\ \vec{\delta}_{A,S/R} = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{A,S/R}\right]_R + m \cdot \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G \in S/R} & \text{(moment dynamique en } A \text{ de } S \text{ par rapport à } R) \end{array} \right._A$$

avec $\vec{\Gamma}_{G \in S/R}$: le vecteur accélération en G de S par rapport à R et tel que : $\vec{\Gamma}_{G \in S/R} = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{V}_{G \in S/R}\right]_R$

Et bien entendu, une propriété des torseurs permet d'écrire :

$$\overrightarrow{\delta_{B,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{Rd_{S/R}}$$

On peut aussi montrer que, pour un solide S de centre d'inertie G dans un référentiel R, le torseur **cinétique** s'écrit, en un point A quelconque :

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \overrightarrow{p_{S/R}} = m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} & \text{(résultante cinétique - ou quantité de mouvement - de } S \text{ par rapport à } R\text{)} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} & \text{(moment cinétique en } A \text{ de } S \text{ par rapport à } R\text{)} \end{array} \right._A$$

Avec $I(A,S)$, la matrice d'inertie du solide S au point A. Elle contiendra notamment les moments d'inertie du solide.

Ce torseur cinétique possède bien évidement la propriété de transport du torseur, on a donc :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{S/R}}$$

- Cas d'un ensemble de solides -

Pour un ensemble de solides Σ composé des solides S_1, S_2, S_3... on calculera les torseurs cinétique et dynamique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \{\mathscr{C}_{\Sigma/R}\} &= \{\mathscr{C}_{S_1/R}\} + \{\mathscr{C}_{S_2/R}\} + \{\mathscr{C}_{S_3/R}\} + \cdots \\ \{\mathscr{D}_{\Sigma/R}\} &= \{\mathscr{D}_{S_1/R}\} + \{\mathscr{D}_{S_2/R}\} + \{\mathscr{D}_{S_3/R}\} + \cdots \end{aligned}$$

Remarque - La définition du torseur cinétique est la suivante :

$$\{C_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dm & \text{(en kg.m/s)} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dm & \text{(en kg.m}^2\text{/s)} \end{array} \right._A$$

Attention !

$$\overrightarrow{V_{A/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right]_R \quad ??? \quad \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

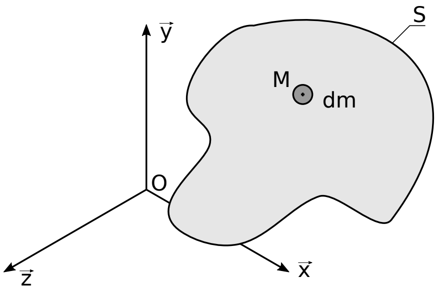
Parfois, il y a égalité... Et parfois non !

$\overrightarrow{V_{A/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right]_R$ est la vitesse du **point géométrique** A dans le référentiel R

$\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ est la vitesse du **point A appartenant au solide S** dans le référentiel R

3 Quelques notions autour de la masse des solides

3.1 Définition

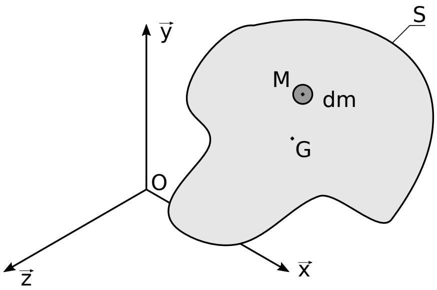


Un système matériel S est constitué d'un ensemble de points M de masse élémentaire dm. La masse m_S de ce système est donc :

$$m_S = \int_{M \in S} dm \qquad \text{(en } \mathbf{kg}\text{)}$$

On calculera souvent la masse infinitésimale dm à partir de la masse volumique du solide considéré notée ρ et son volume infinitésimal dV. On a effectivement $dm = \rho.dV$ avec ρ en kg/m^3.

3.2 Centre d'inertie - centre de gravité



On appelle centre d'inertie (ou centre de gravité) du solide S le point G qui vérifie la relation :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \overrightarrow{0}$$

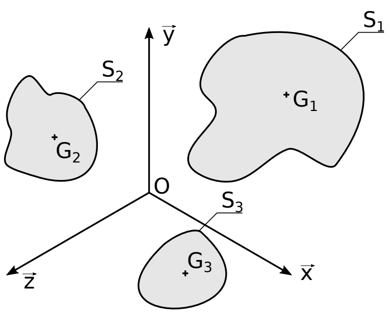
Ou encore :

À retenir

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

Avec O un point quelconque et m la masse du solide.

3.3 Masse d'un ensemble de solides



La masse est additive. Cela signifie que la masse m_Σ de l'ensemble $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$ s'écrit:

$$m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3 + ... \qquad \text{(en } \mathbf{kg}\text{)}$$

Où les m_i sont les masses des solides S_i.

3.4 Barycentre (ou centre de gravité) d'un ensemble de solides

On pourra également calculer le centre d'inertie ou le barycentre, noté G_Σ, d'un ensemble de solides $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$.

À retenir

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma} \cdot \sum_{i=1}^{\text{nb de solides}} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$$

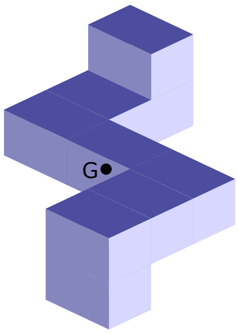
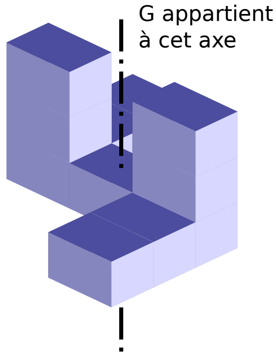
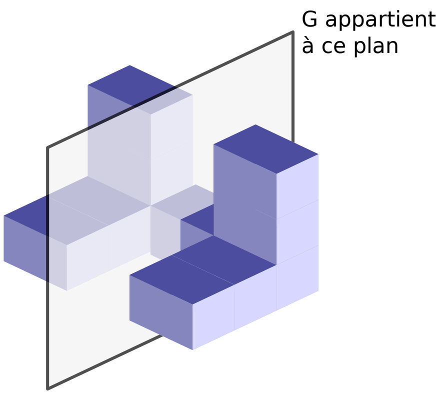
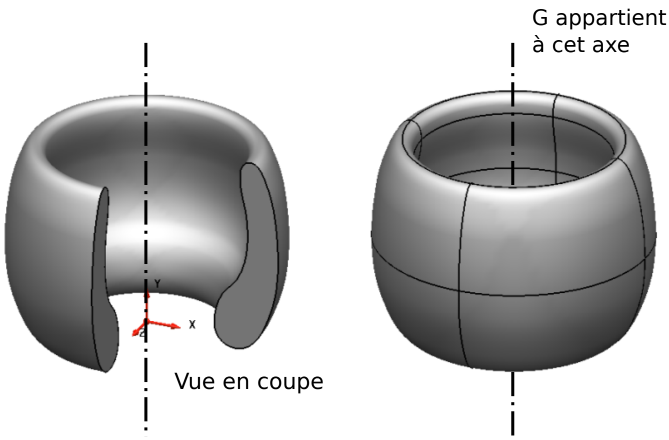
Où les m_i sont les masses des solides S_i de centres d'inertie respectifs G_i.

3.5 Centre d'inertie d'un solide à symétrie matérielle

À retenir

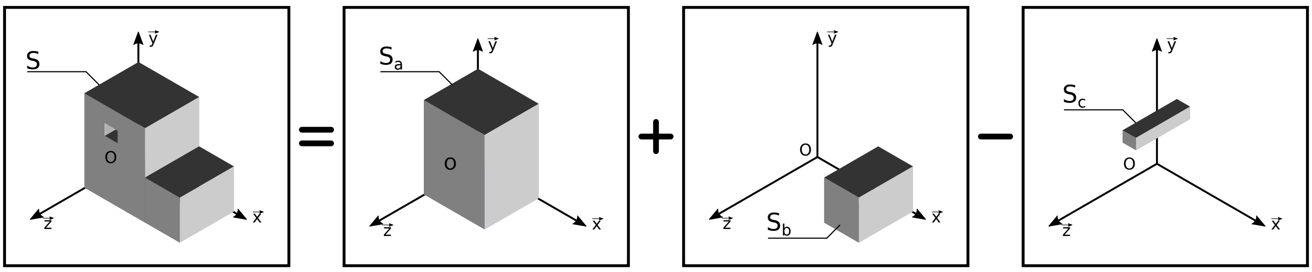
Si le solide présente un élément de symétrie matérielle, alors **le centre de gravité appartient à cet élément de symétrie**.

On parle de symétrie **matérielle** si le solide présente une symétrie géométrique et une symétrie du matériaux.

Point de symétrie	Axe de symétrie
	
Plan de symétrie	**Axe de révolution**
	

3.6 Méthode pour la recherche d'un centre d'inertie

Pour trouver le centre d'inertie d'un solide qui n'a pas de formes élémentaires et de plan de symétrie, il faut décomposer celui-ci. La décomposition doit permettre de déterminer directement la position des centres de gravité de chacun des solides élémentaires. Pour exemple, le solide S ci-dessous a été décomposé en trois solides élémentaires S_a, S_b et S_c. La recherche du centre de gravité pour chacun des trois solides est immédiate. Il ne reste qu'à utiliser la formule du barycentre pour déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble.

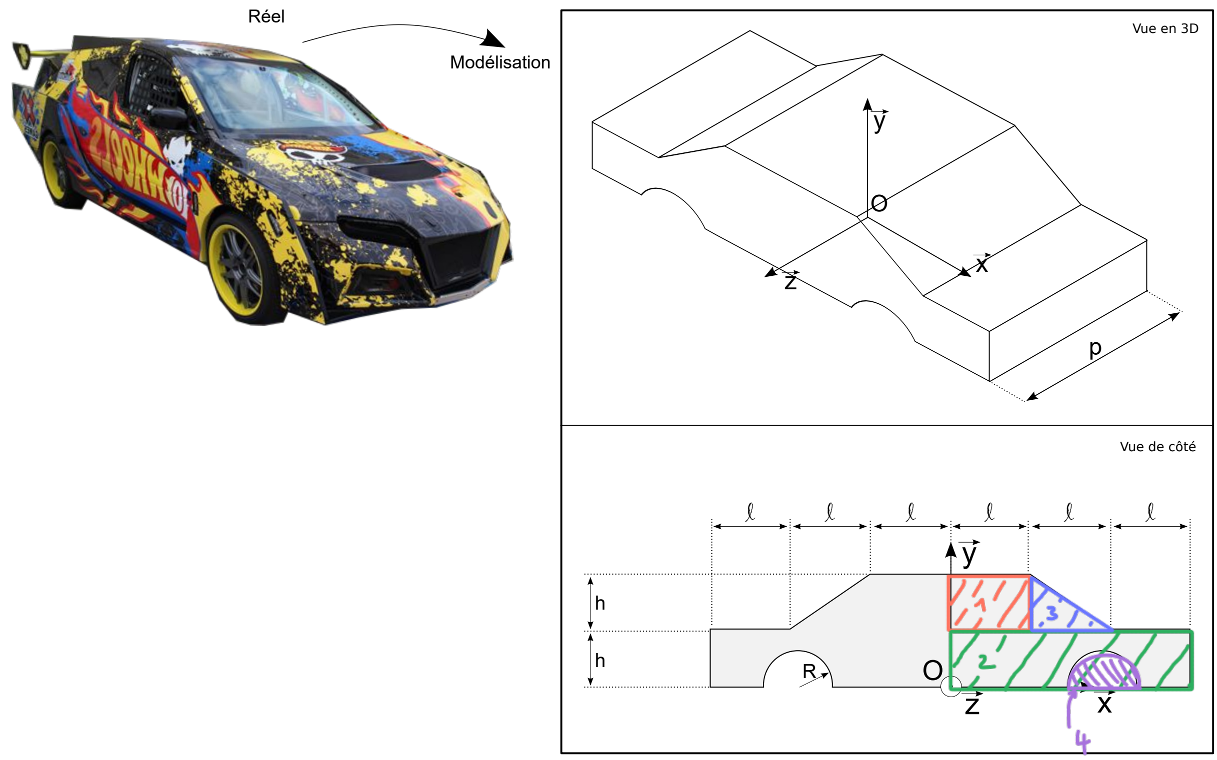


Application : détermination du centre d'inertie du châssis de la voiture

On souhaite déterminer le centre d'inertie G_{Ch} du châssis de la voiture. La géométrie de ce châssis est donnée sur la figure ci-dessous. La géométrie, représentée sur les figures ci-dessous, a volontairement été simplifiée.

On donne également les indications suivantes :

- Le châssis est composé d'un matériau homogène de masse volumique ρ.
- Le centre d'inertie d'un triangle se situe au tiers de chacune de ses hauteurs.
- Le centre d'inertie d'un demi-disque se situe à une distance $\dfrac{4R}{3\pi}$ de sa base (où R est le rayon du demi-disque.



- Le châssis présente :
  - une symétrie matérielle par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$,
  - " " " " " " $(O, \vec{y}, \vec{z})$.

On aura donc $\overrightarrow{OG} = y_G \cdot \vec{y}$. Il faut donc déterminer :

$$y_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y}$$

G_i est le centre de gravité de la partie i.

- Avec : $y_G = \left[\dfrac{1}{m_1 + m_2 + m_3 - m_4} \cdot \left(m_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + m_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} - m_4 \cdot \overrightarrow{OG_4} \right) \right] \cdot \vec{y}$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3 - m_4} \cdot \left(m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 - m_4 \cdot y_4 \right)$$

$y_i = \overrightarrow{OG_i} \cdot \vec{y}$

$\longrightarrow \quad m_1 = \rho \cdot p \cdot \ell \cdot h$

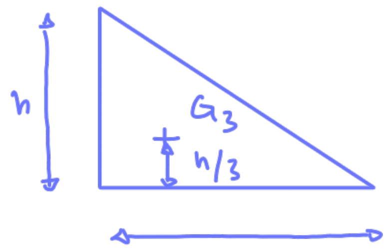
$$y_1 = h + \frac{h}{2} = \frac{3 \cdot h}{2}$$

$\longrightarrow \quad m_2 = \rho \cdot p \cdot 3 \cdot \ell \cdot h$

$$y_2 = \frac{h}{2}$$

$\longrightarrow \quad m_3 = \rho \cdot p \cdot \frac{\ell \cdot h}{2}$

$$y_3 = h + \frac{h}{3} = \frac{4 \cdot h}{3}$$



$\longrightarrow \quad m_4 = \rho \cdot p \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}$

$$y_4 = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \quad \text{(donné)}$$

4 Simplification du torseur cinétique

Le torseur cinétique a déjà été défini dans la partie précédente. Pour un solide S dans un référentiel R, ce torseur s'écrit, en un point A quelconque :

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{p}_{S/R} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{V}_{M\in S/R}.dm \\ \overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}_{M\in S/R}.dm \end{Bmatrix}_A$$

4.1 Cas de la résultante

Le plus simple est de partir de la définition du centre d'inertie d'un solide, puis de la dériver par rapport au temps. On obtient ainsi, pour un solide S, de masse m et de centre d'inertie G :

$$\begin{aligned} m\cdot\overrightarrow{OG} &= \int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\cdot dm &\Rightarrow\quad m\cdot\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG}\right]_R &= \frac{d}{dt}\left[\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\cdot dm\right]_R \\ & &\Rightarrow\quad m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}} &= \int_{M\in S}\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}\right]_R\cdot dm \\ & &\Rightarrow\quad m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}} &= \int_{M\in S}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\cdot dm \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

À retenir

$$\overrightarrow{p_{S/R}} = m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

- $\overrightarrow{p_{S/R}}$: quantité de mouvement de S par rapport à R en kg.m/s
- m : masse du solide S
- $\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$: vitesse du centre d'inertie appartenant à S par rapport à R

4.2 Cas du moment

Concernant le moment cinétique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\cdot dm &= \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)\cdot dm \\ &= \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}\cdot dm - \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)\cdot dm \\ &= \left(\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\cdot dm\right)\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\cdot dm \\ &= m\cdot\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\cdot dm \end{aligned}$$

Le terme de gauche est relativement simple. Pour le terme de droite, la présence de l'intégration laisse présager des calculs laborieux. Les résultats qui suivent seront "admis" d'un point de vue mathématique puisque vous ne maitrisez pas encore les outils nécessaires (cours de maths). Une relecture en fin d'année pourra être bénéfique.

Le terme $\displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$ est une **opération linéaire** (composition d'opérations linéaires : intégration et produit vectoriel). Il est donc possible de l'écrire comme le produit d'une matrice que l'on appellera **matrice d'inertie de S en A** et du vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$. **Cette matrice d'inertie ne dépend que du solide étudié (mais se définit en un point)**. Sachant que cette matrice d'inertie ne dépend que du solide étudié, ce sera donc une donnée du problème (tout comme la masse du solide par exemple). On a donc :

$$\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm = I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

On peut donc finalement simplifier l'écriture du moment cinétique :

À retenir

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

- $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}$: moment cinétique en A de S par rapport à R en kg.m^2/s
- $I(A,S)$: matrice d'inertie en A du solide S en kg.m^2
- $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$: vitesse de rotation du solide S par rapport à R en rad/s
- $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$: vitesse du point A appartenant à S par rapport à R en m/s

4.3 Récapitulatif

On a donc montré que, pour un solide S de centre d'inertie G dans un référentiel R, le torseur cinétique s'écrit, en un point A quelconque :

À retenir

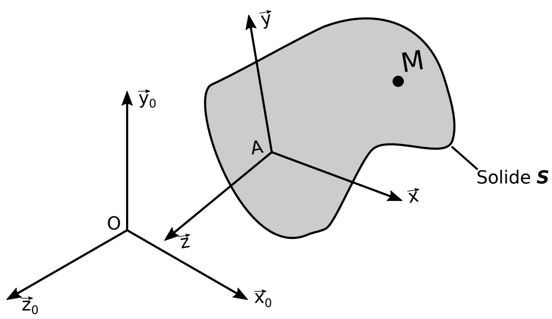
$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{p_{S/R}} & = m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} & = I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array}\right.}$$

Ce torseur cinétique possède bien évidement la propriété de transport du torseur, on a donc :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{S/R}}$$

4.4 Détermination de la matrice par méthode calculatoire

On a donc été capable de simplifier l'écriture du torseur cinétique. Cette simplification a cependant fait intervenir la matrice d'inertie dont l'expression reste encore, pour le moment, inconnue. On sait simplement que cette matrice est la représentation d'une application linéaire intervenant dans le calcul du moment cinétique. Il est donc nécessaire de la définir plus en détail.



On considère **dans le repère lié au solide** S : $\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$, il faut donc calculer $\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$. On pourra ensuite identifier $I(A,S)$ sachant que :

$$I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$$

Commençons les calculs...

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{bmatrix}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \cdot y^2 - \omega_y \cdot x \cdot y - \omega_z \cdot x \cdot z + \omega_x \cdot z^2 \\ \omega_y \cdot z^2 - \omega_z \cdot y \cdot z - \omega_x \cdot x \cdot y + \omega_y \cdot x^2 \\ \omega_z \cdot x^2 - \omega_x \cdot x \cdot z - \omega_y \cdot z \cdot y + \omega_z \cdot y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -x \cdot y & -x \cdot z \\ -x \cdot y & x^2+z^2 & -y \cdot z \\ -x \cdot z & -y \cdot z & x^2+y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer :

$$I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \int_{M\in S} \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -x \cdot y & -x \cdot z \\ -x \cdot y & x^2+z^2 & -y \cdot z \\ -x \cdot z & -y \cdot z & x^2+y^2 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot dm$$

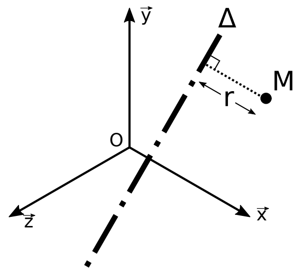
Par identification, on obtient donc l'expression suivante pour la matrice d'inertie :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2) \cdot dm & \int_{M\in S} -x \cdot y \cdot dm & \int_{M\in S} -x \cdot z \cdot dm \\ \int_{M\in S} -x \cdot y \cdot dm & \int_{M\in S} (x^2+z^2) \cdot dm & \int_{M\in S} -y \cdot z \cdot dm \\ \int_{M\in S} -x \cdot z \cdot dm & \int_{M\in S} -y \cdot z \cdot dm & \int_{M\in S} (x^2+y^2) \cdot dm \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

4.5 Détermination de la matrice par passage à la limite

4.5.1 Moment d'inertie d'un point matériel par rapport à un axe

On considère ici un point matériel M, de masse m et un axe quelconque Δ. Le point M est situé à une distance r de l'axe Δ.



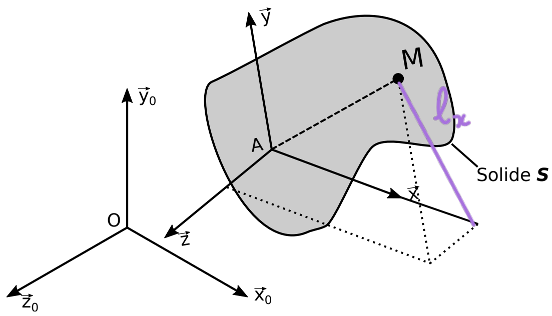
Le moment d'inertie de ce point matériel autour de l'axe Δ est noté :

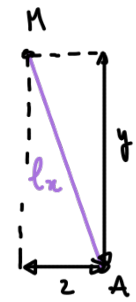
$$I_{\Delta}(M) = m \cdot r^2$$

Une première interprétation physique est possible. Lorsqu'un point matériel est en mouvement rectiligne, on comprend bien que plus sa masse est importante plus il sera difficile de l'accélérer ou de le freiner. Lorsque ce point matériel est maintenant en rotation autour d'un axe, si on souhaite l'accélérer ou le freiner, on comprend également que d'une part sa masse intervient mais également l'écartement entre l'axe de rotation et la position de la masse. C'est donc bien la rotation éventuelle des solides qui impose d'introduire ce concept de moment d'inertie.

4.5.2 Matrice d'inertie

Dans le cas général, le solide en mouvement peut tourner autour des trois axes de l'espace. C'est cela qui nécessite d'introduire la notion de matrice d'inertie. Considérons maintenant que le point M, de masse élémentaire dm, soit de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, cela signifie donc que $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{x} + y \cdot \overrightarrow{y} + z \cdot \overrightarrow{z}$.





et donc $l_x^2 = y^2 + z^2$

On peut donc définir les différents moments d'inertie en calculant la distance de la masse à l'axe considéré :

- Moment d'inertie de la masse M par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{x})$: $dA = dm \cdot l_x^2 = (y^2 + z^2) \cdot dm$
- Moment d'inertie de la masse M par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{y})$: $dB = dm \cdot (x^2 + z^2) \cdot dm$
- Moment d'inertie de la masse M par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{z})$: $dC = dm \cdot (x^2 + y^2) \cdot dm$

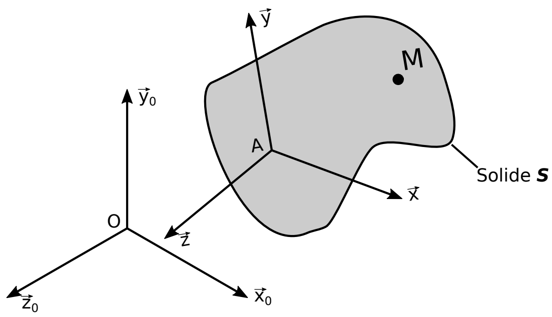
Il sera aussi nécessaire d'introduire les produits d'inertie (dont le sens physique est plus difficile à saisir) :

- Produit d'inertie de la masse M par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{y})$ et $(O, \overrightarrow{z})$: $dD = dm \cdot y \cdot z$
- Produit d'inertie de la masse M par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{x})$ et $(O, \overrightarrow{z})$: $dE = dm \cdot x \cdot z$
- Produit d'inertie de la masse M par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{x})$ et $(O, \overrightarrow{y})$: $dF = dm \cdot x \cdot y$

La matrice d'inertie de M, en A, dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ se définit donc de la manière suivante :

$$I(A, M) = \begin{bmatrix} dA & -dF & -dE \\ -dF & dB & -dD \\ -dE & -dD & dC \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

4.5.3 Matrice d'inertie d'un solide



Pour obtenir les éléments de la matrice d'inertie en A pour le solide S, il suffit de passer à la limite en considérant que le solide est composé d'une infinité de points M, de masse élémentaire dm. On a donc :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Avec :

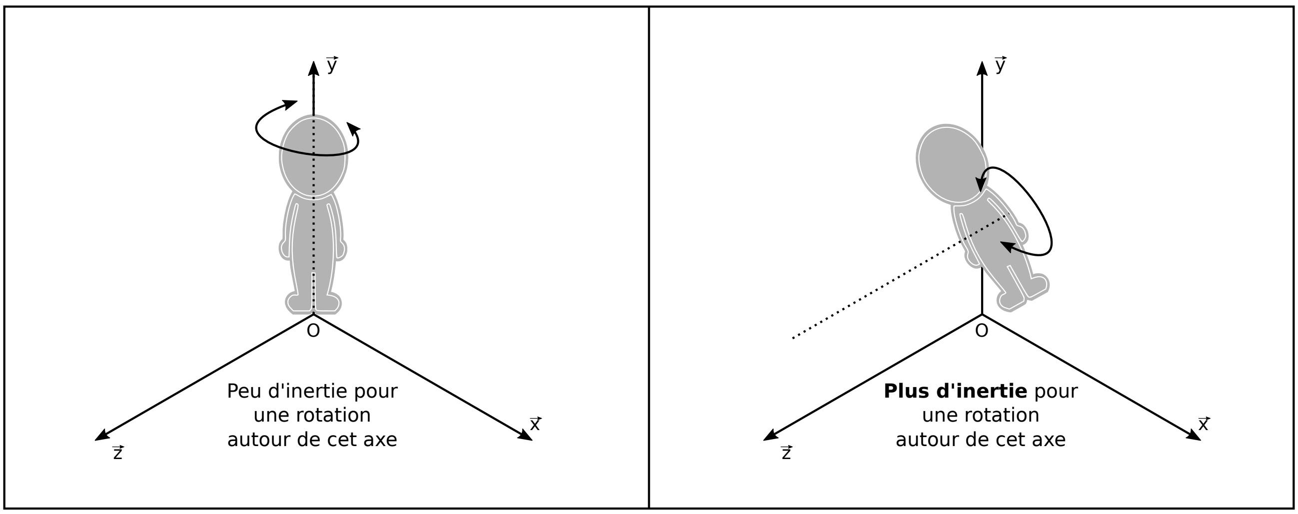
$$A = \int_{M\in S} (y^z + z^2)\cdot dm \quad B = \int_{M\in S} (x^z + z^2)\cdot dm \quad C = \int_{M\in S} (x^z + y^2)\cdot dm \tag{1}$$

$$D = \int_{M\in S} y\cdot z\cdot dm \qquad E = \int_{M\in S} x\cdot z\cdot dm \qquad F = \int_{M\in S} x\cdot y\cdot dm \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

4.6 Récapitulatif

La matrice d'inertie permet de prendre en compte le caractère inertiel des solides lorsque ces derniers sont en rotation. **La masse et la répartition de celle-ci ont une influence sur l'inertie en rotation.** Il s'agit bien d'une matrice puisqu'il peut y avoir trois rotations dans l'espace. Par exemple, il est plus simple de faire un tour sur soi-même qu'un salto. Cela s'explique simplement par le fait qu'à masse égale, votre masse est plutôt répartie sur une ligne verticale (voir figure ci-dessous).



À retenir

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} \int_{M\in S}(y^2+z^2).dm & -\int_{M\in S}x.y.dm & -\int_{M\in S}x.z.dm \\ \vdots & \int_{M\in S}(x^2+z^2).dm & -\int_{M\in S}y.z.dm \\ \text{SYM} \ \ldots & & \int_{M\in S}(x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Cette matrice représente la masse du solide mais aussi la répartition de la masse (c'est un calcul intégral). Cette matrice sera donc une donnée du problème. Elle est quasi-toujours donnée dans une base $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$ qui est associée au solide considéré. Elle sera souvent exprimée de la manière suivante :

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Avec :

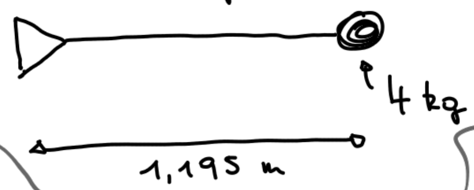
- A : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A,\overrightarrow{x})$
- B : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A,\overrightarrow{y})$
- C : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A,\overrightarrow{z})$
- D : Produit d'inertie par rapport aux axes $(A,\overrightarrow{y})$ et $(A,\overrightarrow{z})$
- E : Produit d'inertie par rapport aux axes $(A,\overrightarrow{x})$ et $(A,\overrightarrow{z})$
- F : Produit d'inertie par rapport aux axes $(A,\overrightarrow{x})$ et $(A,\overrightarrow{y})$

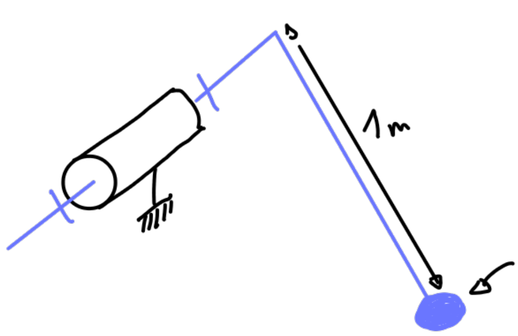
L'unité des moments d'inertie, des produits d'inertie (et donc de la matrice d'inertie) est le $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

La notion de "moment" d'inertie n'a rien à voir avec la notion de "moment" dans un torseur.

Et c'est quoi 1 kg.m^2 ?

Remarque : Marteau d'athlétisme (pour les femmes)



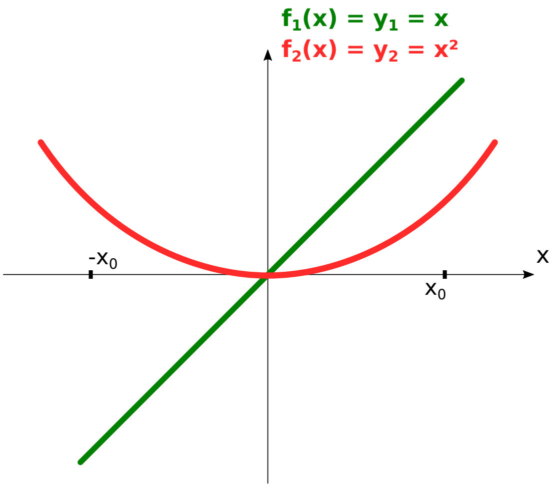


Masse ponctuelle d'1 kg excentrée de l'axe de rotat° de 1m.

5 Quelques notions autour de la matrice d'inertie

5.1 Simplification de la matrice d'inertie

5.1.1 Petit rappel de mathématiques

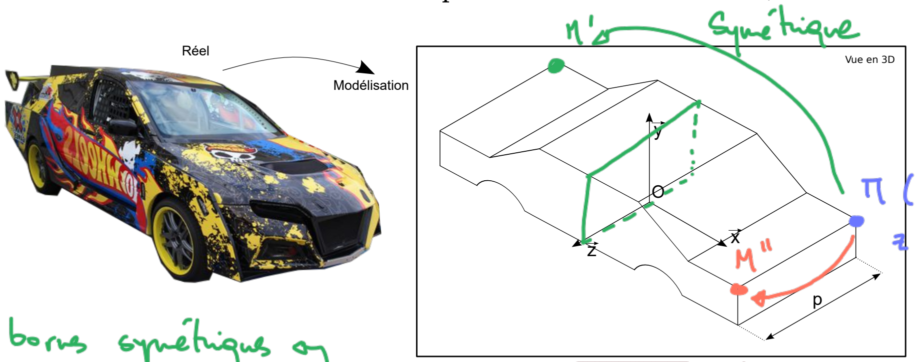


• $I_1 = \int_{x=-x_0}^{x_0} f_1(x)\cdot dx = 0$ → Car f° impaire et bornes symétriques.

• $I_2 = \int_{x=-x_0}^{x_0} f_2(x)\cdot dx \neq 0$ → Car f° paire et bornes symétriques

5.1.2 Symétrie par rapport à un plan

On considère ici le châssis de la voiture. On cherche à simplifier la matrice d'inertie (sans calculer tous les termes).



$\pi(x,y,z)$: x, y et z sont les variables d'intégration.

bornes symétriques → ... bornes symétriques

On sait que : $\int_{M\in Ch} \dots dm = \int_{x=\dots}^{\dots} \int_{y=\dots}^{\dots} \int_{z=\dots}^{\dots} \dots \rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz$

$$I(O,Ch) = \begin{bmatrix} \int_{M\in Ch}(y^2+z^2)\cdot dm & \cancel{\int_{M\in Ch}-x\cdot y\cdot dm} & \underbrace{\cancel{\int_{M\in Ch}-x\cdot z\cdot dm}}^{=0} \\ \cancel{\int_{M\in Ch}-x\cdot y\cdot dm} & \int_{M\in Ch}(x^2+z^2)\cdot dm & \cancel{\int_{M\in Ch}-y\cdot z\cdot dm} \\ \cancel{\int_{M\in Ch}-x\cdot z\cdot dm} & \cancel{\int_{M\in Ch}-y\cdot z\cdot dm} & \int_{M\in Ch}(x^2+y^2)\cdot dm \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

• Le châssis présente :

- une symétrie matérielle par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$, ← ou plan passant par O et de normale $\vec{z}$
- " " " " " " $(O,\vec{y},\vec{z})$.

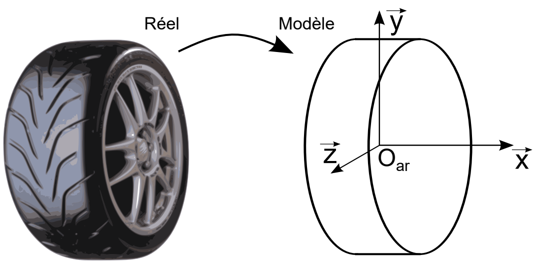
⚠ (x,y,z) sont bien les coordonnées de M dans le repère $(\underline{O},\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

• On pourra donc écrire :

$$I(O,Ch) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5.1.3 Symétrie par rapport à un axe de révolution

On considère ici une des roues de la voiture. On cherche toujours à simplifier la matrice d'inertie (sans calculer tous les termes).



On sait que :

$$I(O_{ar},R_{ar}) = \begin{bmatrix} \int_{M\in R_{ar}} (y^2+z^2)\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} \cancel{-x\cdot y}\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} \cancel{-x\cdot z}\cdot dm \\ \int_{M\in R_{ar}} \cancel{-x\cdot y}\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} \underline{(x^2+z^2)}\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} \cancel{-y\cdot z}\cdot dm \\ \int_{M\in R_{ar}} \cancel{-x\cdot z}\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} \cancel{-y\cdot z}\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} \underline{(x^2+y^2)}\cdot dm \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

• La roue présente :

- une symétrie matérielle par rapport au plan $(O_{ar},\vec{x},\vec{y})$,
- " " " " " $(O_{ar},\vec{y},\vec{z})$,
- une symétrie matérielle de révolut° par rapport à l'axe $(O_{ar},\vec{z})$

ou une invariance par rotation autour de l'axe $(O_{ar},\vec{z})$. On aura donc :

$$\int_{M\in R_{ar}} y^2\cdot dm = \int_{M\in R_{ar}} z^2\cdot dm$$

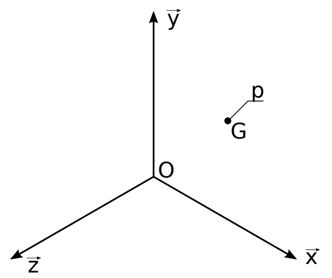
$$\text{donc} \int_{M\in R_{ar}} (x^2+y^2)\cdot dm = \int_{M\in R_{ar}} (x^2+z^2)\cdot dm$$

On écrira donc :

$$I(O_{ar}, R_{ar}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{x},-,-)}$$

signifie que ce résultat reste valable pour toute base orthonormée directe dont le 1er vecteur est $\vec{x}$.

5.2 Matrice d'un point matériel



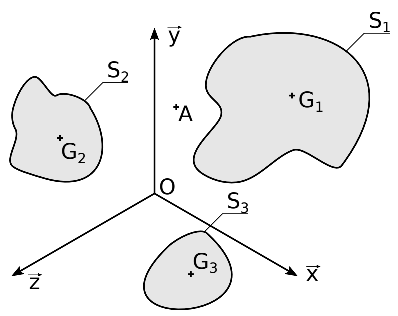
Soit un point matériel, noté p, de masse m et de centre d'inertie G.

À retenir

$$I(G,p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Attention, la matrice n'est nulle qu'au centre d'inertie !

5.3 Matrice d'un solide composé de plusieurs pièces



On pourra calculer la matrice d'inertie, $I(A,\Sigma)$, d'un ensemble de solides $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$ au point A en additionnant les matrices d'inertie de chacun des solides.

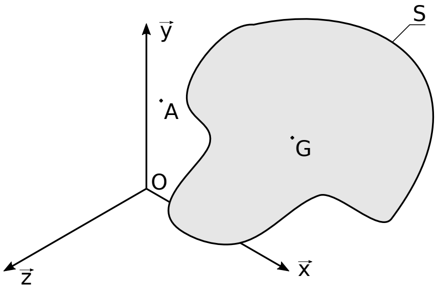
À retenir

$$I(A,\Sigma) = I(A,S_1) + I(A,S_2) + I(A,S_3) + ...$$

Bien entendu, il faut que les points soient les mêmes et que les bases de calcul soient les mêmes également.

5.4 Théorème de Huygens

Ce théorème permet de changer le point d'écriture de la matrice. Plus exactement, **il permet de passer du centre d'inertie G d'un solide S à un autre point A quelconque**.



La plupart du temps, compte-tenu des symétries, on vous donnera la matrice au centre d'inertie :

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Pour obtenir $I(A,S)$, il faut utiliser le théorème de Huygens :

À retenir

$$I(A,S) = I(G,S) + I(G \rightarrow A,S)$$

Avec :

- $I(A,S)$: la matrice d'inertie en A du solide S ;
- $I(G,S)$: la matrice d'inertie en G du solide S ;
- $I(G \rightarrow A,S)$: la matrice de transfert de masse du point G vers le point A. Cette matrice est la matrice d'inertie, écrite en A, du point matériel G associé à la masse du solide m.

Il faut commencer par calculer les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{GA} = (x_A - x_G)\cdot\vec{x} + (y_A - y_G)\cdot\vec{y} + (z_A - z_G)\cdot\vec{z} = x_{GA}\cdot\vec{x} + y_{GA}\cdot\vec{y} + z_{GA}\cdot\vec{z}$$

Où x_A, y_A, ... sont les coordonnées des points A et G dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et x_{GA}, y_{GA} et z_{GA} sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GA}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

On a ensuite :

À retenir

$$I(G \rightarrow A,S) = \begin{bmatrix} m\cdot(y_{GA}^2 + z_{GA}^2) & -m\cdot x_{GA}\cdot y_{GA} & -m\cdot x_{GA}\cdot z_{GA} \\ -m\cdot x_{GA}\cdot y_{GA} & m\cdot(x_{GA}^2 + z_{GA}^2) & -m\cdot y_{GA}\cdot z_{GA} \\ -m\cdot x_{GA}\cdot z_{GA} & -m\cdot y_{GA}\cdot z_{GA} & m\cdot(x_{GA}^2 + y_{GA}^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Attention !

Cette relation n'est valable que si G est le centre d'inertie de la pièce.

Les matrices doivent être exprimées dans la même base.

Remarque - $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{GA}$ et donc $x_{AG} = -x_{GA}$

mais $x_{AG}^2 = x_{GA}^2$

et $x_{AG}\cdot y_{AG} = x_{GA}\cdot y_{GA}$.

Calculer $\overrightarrow{AG}$ ou $\overrightarrow{GA}$ ne change donc pas la formule précédente.

5.5 Application : calcul de la matrice d'inertie de l'ensemble {châssis, moteur}

On donne, en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$:

- la matrice d'inertie du châssis en G_{Ch}, son centre de gravité,

$$I_{G_{Ch}}(Ch) \approx \begin{bmatrix} 415 & 0 & 0 \\ 0 & 1350 & 0 \\ 0 & 0 & 1247 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

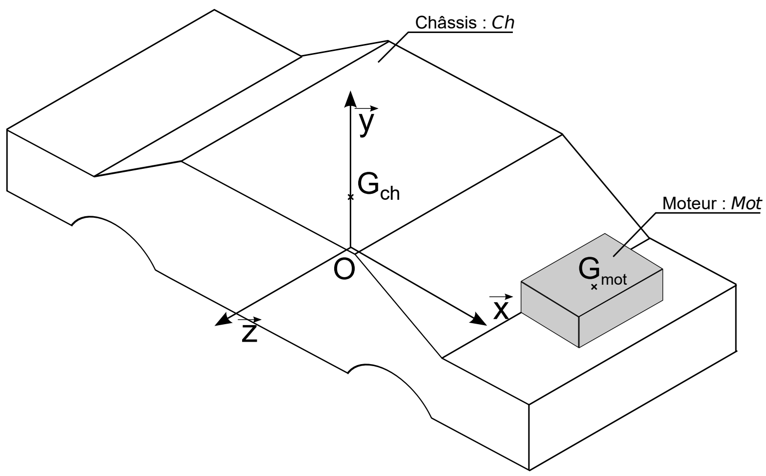
- la matrice d'inertie du moteur en G_{Mot}, son centre de gravité,

$$I_{G_{Mot}}(Mot) \approx \begin{bmatrix} 650 & 0 & 0 \\ 0 & 520 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On donne également, en mètres, les coordonnées des points G_{Ch} et G_{Mot}, dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\overrightarrow{OG_{Mot}} \approx \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OG_{Ch}} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.85 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le châssis a une masse $m_{Ch} \approx 815$ kg et le moteur a une masse $m_{Mot} \approx 510$ kg.

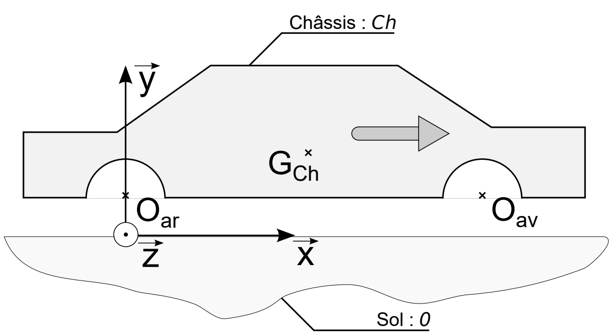


Calculer la matrice $I_{G_{Ch}}(\{Ch, Mot\})$.

(Voir fin du doc.)

6 Exemples

6.1 Châssis de la voiture



On considère les hypothèses suivantes :

- Le châssis est en translation rectiligne et se déplace à une vitesse $v(t)$ dans la direction $\vec{x}$.
- Sa masse est m_{Ch} et sa matrice d'inertie est :

$$I(G_{Ch}, Ch) = \begin{bmatrix} A_{Ch} & 0 & 0 \\ 0 & B_{Ch} & 0 \\ 0 & 0 & C_{Ch} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Calcul du torseur dynamique en G_{Ch} du châssis par rapport au sol ?

• $\overrightarrow{R_d}_{Ch/0} = m_{Ch} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

où $\overrightarrow{\Gamma}_{G_{Ch} \in Ch/0} = \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}\right]_0$

$= \dfrac{d}{dt}\left(v \cdot \vec{x}\right)_0$

$= \dot{v} \cdot \vec{x}$ donc $\overrightarrow{R_d}_{Ch/0} = m_{Ch} \cdot \dot{v} \cdot \vec{x}$

♡ Cas particulier d'un solide en translat° rectiligne.

• $\overrightarrow{\delta}_{G_{Ch},Ch/0} = \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma}_{G_{Ch},Ch/0}\right)_0 + m_{Ch} \cdot \underbrace{\overrightarrow{V}_{G_{Ch}/0} \wedge \overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}}_{= \vec{0}}$ ♡

car, par définition, le point géométrique G_{Ch} "bouge" avec Ch et donc $\overrightarrow{V}_{G_{Ch}/0} = \overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$.

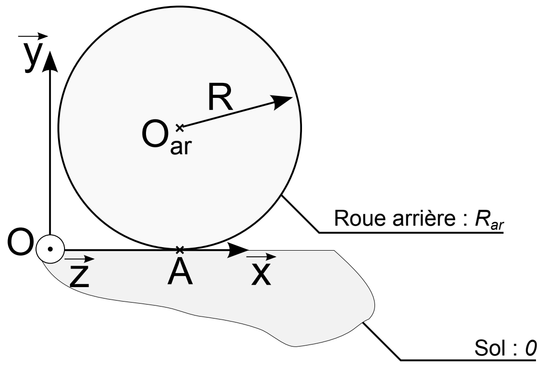
Et $\overrightarrow{\sigma}_{G_{Ch},Ch/0} = I(G_{Ch},Ch) \cdot \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_{Ch/0}}_{= \vec{0}} + m_{Ch} \cdot \cancel{\overrightarrow{G_{Ch}G_{Ch}}} \wedge \overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

car solide en translation

Donc $\overrightarrow{\delta}_{G_{Ch},Ch/0} = \vec{0}$

♡ Cas particulier d'un solide en translation et calcul au centre d'inertie.

6.2 Roue de la voiture



On considère les hypothèses suivantes :

- La cinématique de la roue est définie par :

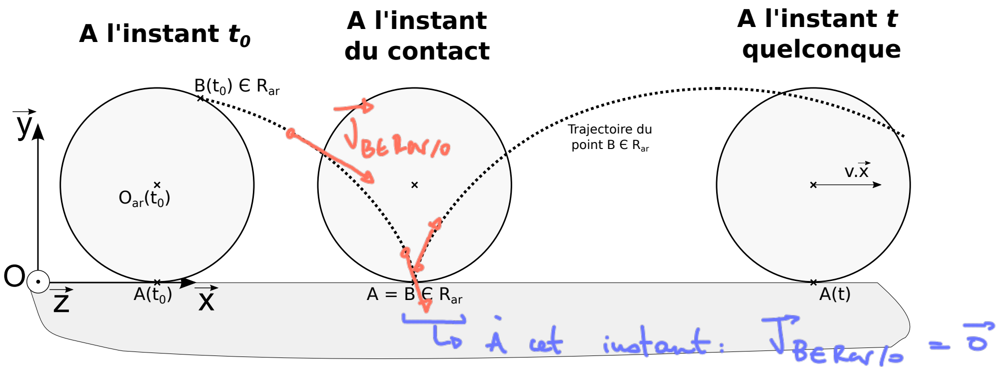
$$\{\mathcal{V}_{R_{ar}/0}\} = \underset{O_{ar}}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{R_{ar}/0}} = \omega \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{O_{ar} \in R_{ar}/0}} = v(t) \cdot \vec{x} \end{array} \right.}$$

- Le rayon de la roue est R, sa masse est $m_{R_{ar}}$, son centre d'inertie est O_{ar} et sa matrice d'inertie est :

$$I(O_{ar}, R_{ar}) = \begin{bmatrix} A_{R_{ar}} & 0 & 0 \\ 0 & B_{R_{ar}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{R_{ar}} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Il y a roulement sans glissement en A.

Donner la condition de roulement sans glissement en A puis l'exploiter ?



Soit A le point de contact (géométriquement défini de cette manière).

Il y a roulement sans glissement en A entre R_{ar} et 0 signifie :

$$\vec{V}_{A\in R_{ar}/0} = \vec{0}$$

MAIS : $\vec{V}_{A/0} = v.\vec{x}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \vec{V}_{A\in R_{ar}/0} = \vec{0} &= \vec{V}_{O_{ar}\in R_{ar}/0} + \vec{AO_{ar}} \wedge \vec{\Omega}_{R_{ar}/0} \\ &= v.\vec{x} + R.\vec{y} \wedge (\omega.\vec{z}) \\ &= v.\vec{x} + R.\omega.\vec{x} \end{aligned}$$

Donc $v = -R.\omega$ et on retiendra que $v = +/- R.\omega$ où le signe dépendra du paramétrage.

Méthode de calcul pour déterminer le moment dynamique en A de la roue par rapport au sol

$I(O_{ar}, R_{ar})$

Cheminement conseillé : • calculer $\vec{\delta}$ au centre de gravité
• puis transport.

$\vec{\sigma}_{O_{ar}, R_{ar}/0}$

Huygens

$I(A, R_{ar})$

$\vec{\delta}_{O_{ar}, R_{ar}/0}$

$\vec{\sigma}_{A, R_{ar}/0}$

$\vec{\delta}_{A, R_{ar}/0}$

Méthode 1 : Calcul du moment dynamique en A de la roue par rapport au sol ?

$$\bullet\ \vec{\sigma}_{O_{Rar}, Rar/0} = I(O_{Rar}, Rar) \cdot \underbrace{\vec{\Omega}_{Rar/0}}_{= \omega \cdot \vec{z}} + m_{Rar} \cdot \cancel{\vec{O_{Rar} O_{Rar}}} \wedge \vec{V}_{O_{Rar} \in Rar/0}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{Rar} & 0 & 0 \\ 0 & B_{Rar} & 0 \\ 0 & 0 & C_{Rar} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{Rar} \cdot \omega \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$= C_{Rar} \cdot \omega \cdot \vec{z}$$

$$\bullet\ \vec{\delta}_{O_{Rar}, Rar/0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{O_{Rar}, Rar/0}\right]_0 + m_{Rar} \cdot \underbrace{\vec{V}_{O_{Rar}/0} \wedge \vec{V}_{O_{Rar} \in Rar/0}}_{= \vec{0} \text{ car } \hat{m} \text{ vitesse}}$$

$$= C_{Rar} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z}$$

$$\bullet\ \vec{\delta}_{A, Rar/0} = \vec{\delta}_{O_{Rar}, Rar/0} + \vec{AO_{Rar}} \wedge \vec{R_d}_{Rar/0} \quad \text{où} \quad \vec{R_d}_{Rar/0} = m_{Rar} \cdot \vec{\Gamma}_{O_{Rar} \in Rar/0}$$

$$\text{Avec} \quad \vec{\Gamma}_{O_{Rar} \in Rar/0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{O_{Rar} \in Rar/0}\right]_0 = \frac{d}{dt}\left[v \cdot \vec{x}\right]_0 = \dot{v} \cdot \vec{x}$$

$$\text{Donc} \quad \vec{\delta}_{A, Rar/0} = C_{Rar} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z} + R \cdot \vec{y} \wedge (m_{Rar} \dot{v} \cdot \vec{x})$$

$$= (C_{Rar} \cdot \dot{\omega} - m_{Rar} \cdot R \cdot \dot{v}) \cdot \vec{z} \qquad (\text{et } v = -R \cdot \omega)$$

$$\vec{\delta}_{A, Rar/0} = (C_{Rar} + m_{Rar} \cdot R^2) \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z}$$

Méthode 2 : Calcul du moment dynamique en A de la roue par rapport au sol ?

• De même : $\vec{\sigma}_{O_{Rar},Rar/0} = C_{Rar} \cdot \omega \cdot \vec{z}$

• Ensuite : $\vec{\sigma}_{A,Rar/0} = \vec{\sigma}_{O_{Rar},Rar/0} + \overbrace{\overrightarrow{AO_{Rar}}}^{R\cdot\vec{y}} \wedge \underbrace{\vec{P}_{Rar/0}}_{m_{Rar}\cdot v\cdot\vec{x}}$

$= C_{Rar}\cdot\omega\cdot\vec{z} - m_{Rar}\cdot R\cdot v\cdot\vec{z}$

$= (C_{Rar} + m_{Rar}\cdot R^2)\cdot\omega\cdot\vec{z}$

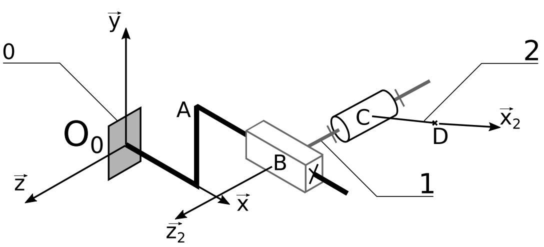
• Puis : $\vec{\delta}_{A,Rar/0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{A,Rar/0}\right)_0 + m_{Rar}\cdot\overbrace{\vec{V}_{A/0}}^{v\cdot\vec{x}} \wedge \underbrace{\vec{V}_{O_{Rar}\in Rar/0}}_{v\cdot\vec{x}}$

$= (C_{Rar} + m_{Rar}\cdot R^2)\cdot\dot{\omega}\cdot\vec{z}$

Attention !

Il y a 2 cas où il faut faire très attention au calcul de $\overrightarrow{V_{A/0}}$:

- Points de contacts (vu précédemment).
- Point qui n'appartient pas physiquement au solide (voir exemple ci-dessous).



• Ici $\vec{V}_{O_0\in 2/0} = \vec{V}_{O_0\in 2/1} + \vec{V}_{O_0\in 1/0}$

où $\vec{V}_{O_0\in 2/1} = \cancel{\vec{V}_{C\in 2/1}} + \overrightarrow{O_0C}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}$

$= \dots \neq \vec{0}$

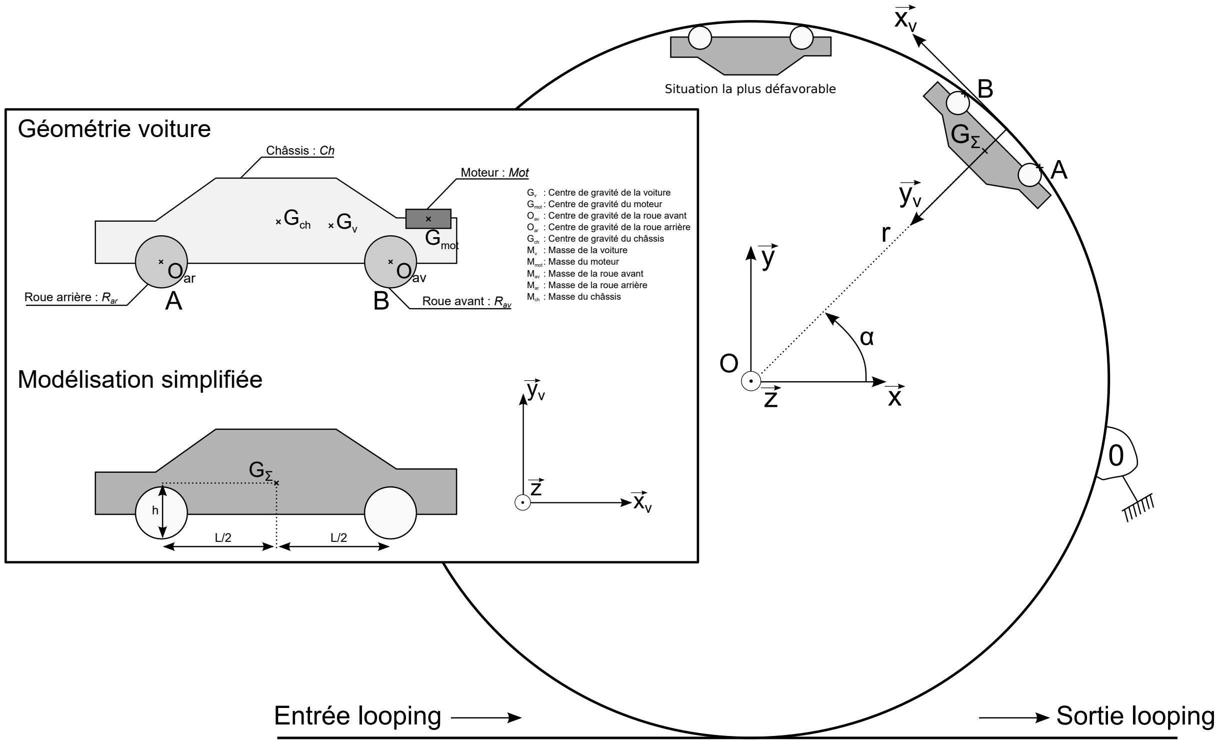
et $\vec{V}_{O_0\in 1/0} = \dots\cdot\vec{x} \neq \vec{0}$

donc $\vec{V}_{O_0\in 2/0} \neq \vec{0}$

• Mais $\vec{V}_{O_0/0} = \vec{0}$ car O_0 est un point fixe dans le repère $(O_0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

7 Première application

Résolution du problème : la voiture peut-elle faire le tour du looping ?



Hypothèses :

- La voiture complète, notée Σ, est composée de son châssis, de ses roues et de son moteur. Elle est, dans le pire des cas, en haut du looping. La structure fixe du looping est notée 0.
- La voiture complète a une masse $M = 1360$ kg. On suppose que le centre de gravité de l'ensemble est G_Σ. L'inertie et la masse des roues sont négligées. La matrice d'inertie de l'ensemble $V = \{\text{châssis}, \text{moteur}\}$ est la suivante :

$$I(G_\Sigma, V) = \begin{bmatrix} A_v & 0 & 0 \\ 0 & B_v & 0 \\ 0 & 0 & C_v \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_v}, \overrightarrow{y_v}, \overrightarrow{z})}$$

- On considère que l'ensemble V se déplace à une vitesse constante v dans le looping et que son torseur cinématique est le suivant :

$$\{\mathcal{V}_{V/0}\} = \underset{G_\Sigma}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{V/0}} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{V_{G_\Sigma \in V/0}} = v\overrightarrow{x_v} \end{array} \right.} \qquad \text{avec} \qquad \dot{\alpha} = \frac{v}{r}$$

- $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{x_v}$; $\overrightarrow{AG_\Sigma} = \frac{L}{2}\overrightarrow{x_v} + h\overrightarrow{y_v}$; $\overrightarrow{G_\Sigma B} = \frac{L}{2}\overrightarrow{x_v} - h\overrightarrow{y_v}$
- On considère des contacts ponctuels unilatéraux au niveau des contacts roue/sol. Compte-tenu du rayon important du looping, on considère que ces liaisons ponctuelles sont de normale $\overrightarrow{y_v}$. On aura donc :

$$\{0 \xrightarrow{A} \Sigma\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0 \xrightarrow{A} \Sigma}} = Y_{0\Sigma}^{A}.\overrightarrow{y_v} \\ \overrightarrow{M_{A,0 \xrightarrow{A} \Sigma}} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.} \qquad \{0 \xrightarrow{B} \Sigma\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0 \xrightarrow{B} \Sigma}} = Y_{0\Sigma}^{B}.\overrightarrow{y_v} \\ \overrightarrow{M_{B,0 \xrightarrow{B} \Sigma}} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.}$$

Question 1 : Donner les conditions à respecter pour respecter les contraintes d'unilatéralité.

La voiture reste en contact avec le sol si : $\overrightarrow{R_{0 \xrightarrow{A} \Sigma}} \cdot \overrightarrow{y_v} > 0$ et donc $Y_{0\Sigma}^{A} > 0$.

De même, il faut que $Y_{0\Sigma}^{B} > 0$.

Question 2 : Donner la/les stratégies d'isolement afin de déterminer la vitesse V afin de respecter les contraintes d'unilatéralité.

J'isole la voiture complète Σ soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $0 \xrightarrow{A} \Sigma$

- $0 \xrightarrow{B} \Sigma$
- poids $\rightarrow \Sigma$

Pour déterminer $Y_{0\Sigma}^{A}$, j'écris le théorème des moments en B et en projection sur $\vec{z}$.

Référentiel galiléen

$$\vec{M}_{B,0\xrightarrow{A}\Sigma}\cdot\vec{z}+\underbrace{\vec{M}_{B,0\xrightarrow{B}\Sigma}\cdot\vec{z}}_{=0}+\vec{M}_{B,\text{poids}\to\Sigma}\cdot\vec{z}=....\vec{\delta}_{B,\Sigma/0}\cdot\vec{z}$$

Ensemble isolé

$$\bullet\ \vec{M}_{B,0\xrightarrow{A}\Sigma}\cdot\vec{z}=\cancel{\vec{M}_{A,0\xrightarrow{A}\Sigma}}\cdot\vec{z}+(\underbrace{\vec{BA}}_{=-L.\vec{x_v}}\wedge(Y_{0\Sigma}\cdot\vec{y_v}))\cdot\vec{z}=-L\cdot Y_{0\Sigma}^{A}$$

$$\bullet\ \vec{M}_{B,\text{pds}\to\Sigma}\cdot\vec{z}=\cancel{\vec{M}_{G_\Sigma,\text{pds}\to\Sigma}}\cdot\vec{z}+(\vec{BG_\Sigma}\wedge(-M\cdot g\cdot\vec{y}))\cdot\vec{z}=-\frac{L}{2}\cdot M\cdot g$$

$$\vec{BG_\Sigma}=-\frac{L}{2}\cdot\vec{x_v}+h\cdot\vec{y_v}$$

$$=\frac{L}{2}\cdot\vec{x}-h\cdot\vec{y}\quad(\text{dans le pire des cas : }\alpha=90°)$$

$$\bullet\ \vec{\delta}_{B,\Sigma/0}\cdot\vec{z}=\vec{\delta}_{B,V/0}\cdot\vec{z}+\underbrace{\vec{\delta}_{B,\text{roue av.}/0}\cdot\vec{z}}_{=0}+\underbrace{\vec{\delta}_{B,\text{roue ar.}/0}\cdot\vec{z}}_{=0}$$

car masse et/ou inertie négligée(s)

$$\bullet\ \vec{\delta}_{B,V/0}\cdot\vec{z}=\vec{\delta}_{G_\Sigma,V/0}\cdot\vec{z}+(\vec{BG_\Sigma}\wedge\vec{Rd}_{V/0})\cdot\vec{z}$$

$$\blacktriangleright\ \vec{\delta}_{G_\Sigma,V/0}\cdot\vec{z}=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{G_\Sigma,V/0}\right]_0\cdot\vec{z}+\underbrace{(M\cdot\vec{V}_{G_\Sigma/0}\wedge\vec{V}_{G_\Sigma\in V/0})}_{=\vec{0}\text{ car même vitesse}}\cdot\vec{z}$$

$\vec{z}$ est fixe dans le repère 0

$$=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{G_\Sigma,V/0}\cdot\vec{z}\right)$$

$$\blacktriangleright\ \vec{\sigma}_{G_\Sigma,V/0}\cdot\vec{z}=(I(G_\Sigma,V)\cdot\vec{\Omega}_{V/0})\cdot\vec{z}+(M\cdot\cancel{\vec{G_\Sigma G_\Sigma}}\wedge\vec{V}_{G_\Sigma\in V/0})\cdot\vec{z}$$

$$=\left[\begin{bmatrix}A_V&0&0\\0&B_V&0\\0&0&C_V\end{bmatrix}_V\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\alpha}\end{bmatrix}_V\right]\cdot\vec{z}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\C_V\cdot\dot{\alpha}\end{bmatrix}_V\cdot\vec{z}=C_V\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{z_V}\cdot\vec{z}=C_V\cdot\dot{\alpha}=C_V\cdot\frac{V}{R}=\text{cte}$$

$$\blacktriangleright\ \vec{\delta}_{G_\Sigma, V/0} \cdot \vec{z} = \boxed{0}$$

$$\blacktriangleright\ \vec{Rd}_{V/0} = M \cdot \frac{d}{dt}\left(v \cdot \vec{x_V}\right)_0$$

$$= M \cdot v \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{x_V}\right)_0$$

$\dot{\alpha} \cdot \vec{z_V} = \frac{v}{R} \cdot \vec{z_V}$

$$= M \cdot v \cdot \left[\cancel{\frac{d}{dt}\left(\vec{x_V}\right)_V} + \vec{\Omega}_{V/0} \wedge \vec{x_V}\right]$$

$$= M \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec{y_V}$$

$$\blacktriangleright\ \vec{\delta}_{B, V/0} \cdot \vec{z} = \boxed{0} + \left[\left(-\frac{L}{2} \cdot \vec{x_V} + h \cdot \vec{y_V}\right) \wedge \left(M \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec{y_V}\right)\right] \cdot \vec{z}$$

$$= -\frac{L}{2} \cdot M \cdot \frac{v^2}{R}$$

D'où : $-\cancel{L} \cdot Y_{0\Sigma}^{A} - \frac{\cancel{L}}{2} \cdot M \cdot g = -\frac{\cancel{L}}{2} \cdot M \cdot \frac{v^2}{R}$

Donc $Y_{0\Sigma}^{A} = M \cdot \left[\frac{v^2}{R} - g\right]$

Pour avoir $Y_{0\Sigma}^{A}$, il faut donc $\frac{v^2}{R} - g > 0$

donc $\boxed{v > \sqrt{g \cdot R}}$

AN : il faut $v > 37$ km/h pour faire le looping.

Calcul de $I_{G_{Ch}}(\{Ch, Mot\})$

- $I_{G_{Ch}}(\{Ch, Mot\}) = \underbrace{I_{G_{Ch}}(Ch)}_{\text{donné}} + I_{G_{Ch}}(Mot)$

- $I_{G_{Ch}}(Mot) = \underbrace{I_{G_{Mot}}(Mot)}_{\text{donné}} + I_{G_{Mot} \mapsto G_{Ch}}(Mot)$

▷ Je calcule

$$\overrightarrow{G_{Mot}G_{Ch}} = \overrightarrow{OG_{Ch}} - \overrightarrow{OG_{Mot}} \simeq \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} & \begin{array}{l} x_{ChMot} \\ y_{ChMot} \\ z_{ChMot} \end{array} \end{array}$$

▷ J'en déduis :

$$I_{G_{Mot} \mapsto G_{Ch}}(Mot) = \begin{bmatrix} m_{Mot} \cdot (y_{ChMot}^2 + z_{ChMot}^2) & - \dots & \\ & \dots & \\ & & \dots \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 5,1 & 76,5 & 0 \\ \vdots & 1148 & 0 \\ SYM & \dots & 1153 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- On a donc : $I_{G_{Ch}}(\{Ch, Mot\}) = \begin{bmatrix} 1030 & 76,5 & 0 \\ \vdots & 3018 & 0 \\ SYM & \dots & 2610 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$