Centre d'intérêt 1

Dynamique et énergétique

Complément sur le théorème de l'énergie cinétique

PSI - MP : Lycée Rabelais

1 Énoncé du théorème de l'énergie cinétique

1.1 Pour un solide

Dans un référentiel galiléen R et pour un solide S, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\mathscr{P}_{ext\to S/R} = \frac{\mathrm{d}E_C(S/R)}{\mathrm{dt}}$$

$\mathscr{P}_{ext\to S/R}$	Puissance des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide S
$\frac{\mathrm{d}E_C(S/R)}{\mathrm{dt}}$	Dérivée de l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à R

1.2 Pour un ensemble de solides

Dans un référentiel galiléen R et pour un ensemble de solides Σ, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

À retenir

$$\mathscr{P}_{ext\to \Sigma/R} + P_{int} = \frac{\mathrm{d}E_C(\Sigma/R)}{\mathrm{dt}}$$

$\mathscr{P}_{ext\to \Sigma/R}$	Puissance des actions mécaniques extérieures appliquées sur Σ
$\mathscr{P}_{int}$	Puissance des efforts intérieurs au système de solides Σ
$\frac{\mathrm{d}E_C(\Sigma/R)}{\mathrm{dt}}$	Dérivée de l'énergie cinétique de Σ dans son mouvement par rapport à R

2 Énergie cinétique

2.1 Cas d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide S par rapport à un référentiel galiléen R s'exprime par :

À retenir

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}\ \left\{\mathscr{V}_{S/R}\right\} \otimes \left\{\mathscr{C}_{S/R}\right\}$$

$\left\{\mathscr{V}_{S/R}\right\}$	Torseur cinématique de S par rapport à R
$\left\{\mathscr{C}_{S/R}\right\}$	Torseur cinétique de S par rapport à R
$\otimes$	Opération commoment

Remarques :

• Le commoment du torseur cinétique par le torseur cinématique se calcule de la manière suivante :

$$\left\{\mathscr{V}_{S/R}\right\} \otimes \left\{\mathscr{C}_{S/R}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{array}\right. \otimes {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{p_{S/R}}\\ \overrightarrow{\sigma_{A,(S/R)}}\end{array}\right. = \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{\sigma_{A,(S/R)}} + \overrightarrow{V_{A\in S/R}}.\overrightarrow{p_{S/R}}$$

• Les torseurs pour le calcul du commoment doivent être écrits **au même point**. Par contre, l'énergie cinétique ne dépend pas du point choisi !

2.2 Cas d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des solides, on a donc pour un ensemble $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$:

À retenir

$$E_C(\Sigma/0) = E_C(S_1/0) + E_C(S_2/0) + E_C(S_3/0) + \ldots$$

3 Puissances

3.1 Puissance galiléenne d'une action mécanique extérieure sur un solide

Cette puissance s'exprime comme le commoment entre le torseur d'action mécanique de cette action mécanique et le torseur cinématique de la pièce sur laquelle s'applique cette action par rapport au repère galiléen :

À retenir

$$\mathscr{P}_{ext\rightarrow S/R} = \{ext \rightarrow S\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{S/R}\right\}$$ **ATTENTION** aux indices ! ! !

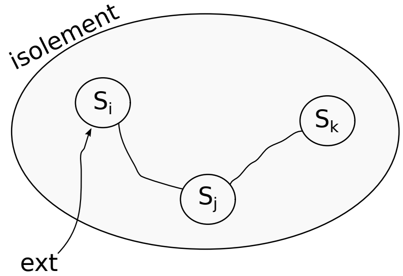
Dans le cas de plusieurs solides, on a :

$$\mathscr{P}_{ext\rightarrow\Sigma/R} = \sum \mathscr{P}_{ext\rightarrow S_i/R}$$

L'unité de la puissance (qu'elle soit intérieure ou extérieure) est le kg.m^2.s^{-3} ou le watt (W).

3.2 Puissance des efforts intérieurs (= puissance interne = puissance des inter-efforts)

L'objectif des puissances intérieures est de quantifier la puissance créée ou perdue dans l'isolement. Pour cela, cette puissance prend comme "référence" l'un des deux solides associé à la liaison.



Pour calculer la puissance intérieure entre les solides S_i et S_j, on dira que S_j joue le rôle de solide "isolé" et S_i celui de solide "de référence". On écrira donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{S_i\to S_j/S_i} &= \left\{S_i \to S_j\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}_{S_j/S_i}\right\}\\ &= \left(-\left\{S_j \to S_i\right\}\right) \otimes \left(-\left\{\mathcal{V}_{S_i/S_j}\right\}\right)\\ &= \left\{S_j \to S_i\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}_{S_i/S_j}\right\}\\ &= \mathcal{P}_{S_j\to S_i/S_j}\end{aligned}$$

La notion de solide "isolé" et "de référence" n'a pas d'importance. On écrira donc : $\mathcal{P}_{S_i\leftrightarrow S_j} = \mathcal{P}_{S_i\to S_j/S_i} = \mathcal{P}_{S_j\to S_i/S_j}$.

La puissance des efforts intérieurs entre un solide S_i et un solide S_j est le commoment suivant :

À retenir

$$\mathcal{P}_{S_i\leftrightarrow S_j} = \left\{S_i \to S_j\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}_{S_j/S_i}\right\} = \left\{S_j \to S_i\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}_{S_i/S_j}\right\}$$

Dans le cas de plusieurs solides, on a :

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_{i>j} \mathcal{P}_{S_i\leftrightarrow S_j}$$

Il faut donc calculer la puissance intérieure pour chaque liaison et pour chaque action mécanique intérieure au système !

Point de vue vocabulaire, on parlera indifféremment de puissance interne, de puissance intérieure ou de puissance des inter-efforts.

Pour toutes les **liaisons parfaites** entre un solide S_i et un solide S_j, on montre que $\mathcal{P}_{S_i\leftrightarrow S_j} = 0$.

Vérification avec une liaison pivot glissant