A lire attentivement avant de commencer : *Le programme de mathématiques de la classe de PSI s'inscrit logiquement dans la continuité de celui de la PCSI (= MPSI moins quelques chapitres). Cela signifie que toute lacune sur le programme de première année aura des répercussions sur les apprentissages de l'année de PSI. Or, la deuxième année est très dense et les écrits des concours arrivent rapidement (environ 26 semaines de préparation seulement). Il est donc indispensable de commencer l'année dans les meilleures conditions, c'est-à-dire en ayant avant la rentrée fait le travail nécessaire pour s'approprier le cours de première année.*

Connaître son cours signifie être capable d'énoncer sans la moindre approximation toutes les définitions (c'est absolument essentiel !), toutes les propriétés, et de connaître les méthodes de calcul et les méthodes de raisonnement. L'expression écrite et orale doit être claire et précise.

Ce premier devoir comporte trois problèmes permettant (et nécessitant) de réviser plus particulièrement certaines parties du programme de première année : le calcul de dérivées et de primitives, la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1, les fondamentaux d'algèbre linéaire, le calcul matriciel, et quelques notions de probabilités.

Les trois problèmes seront rédigés sur trois copies différentes rendues séparément.

N'oubliez pas d'inscrire votre nom sur chacune des copies. Soignez la lisibilité et la présentation (pages numérotées, numéros des questions bien mis en évidence, résultats encadrés, une encre noire ou bleu foncé, pas d'effaceur...).

Passez de bonnes vacances mais n'oubliez surtout pas de préparer votre rentrée !

Problème 1 : Calcul de primitives et équation différentielle

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$:

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2 \ln x \qquad (E)$$

Partie I : Résultats préliminaires utiles

1. Montrer l'existence de trois réels a, b, c à déterminer tels que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

2. En déduire les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$.
3. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln x$.
4. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto (1-x^2)\ln x$.

Partie II : Résolution de l'équation sans second membre

On s'intéresse ici à l'équation différentielle linéaire homogène (E_0) associée à (E) sur $]0,+\infty[$:

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad (E_0).$$

On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble de ses solutions.

5. Démontrer que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.
6. Déterminer $\alpha > 0$ tel que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ appartienne à $\mathcal{S}_0$.
7. Soit $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $\forall x \in]0,+\infty[, \quad \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$.
   a. Justifier que ψ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer les deux premières dérivées de φ en fonction de celles de ψ.

b. Montrer que φ est solution de (E_0) si et seulement si ψ' est solution de l'équation

$$z' + \frac{2}{x(x^2+1)}\, z = 0 \qquad (E')$$

8. Résoudre (E') sur $]0, +\infty[$.
9. Déterminer $\mathcal{S}_0$.

Partie III : Résolution de l'équation complète
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

10. On suppose que l'on connaît une solution φ_0 de (E). Montrer que $\mathcal{S} = \{\varphi_0 + g, \quad g \in \mathcal{S}_0\}$.
11. On cherche une solution particulière φ_0 de (E) sous la forme :

$$\varphi_0 : x \mapsto x\lambda(x) + (x^2-1)\mu(x)$$

où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant de plus :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[\,, \quad x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0. \qquad (E_1)$$

a. Justifier que φ_0 est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde à l'aide des fonctions λ et μ.

b. Montrer que φ_0 est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[\,, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x. \qquad (E_2)$$

c. En déduire les expressions des fonctions λ et μ.

12. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 : Algèbre linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On s'intéresse à la relation $(*)$: $f \circ f = f + 2\mathrm{Id}_E$.

Partie I : Un exemple
Dans cette question, on étudie le cas particulier de l'application φ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\varphi : (x, y, z, t) \mapsto (2x - z + t, -2x + z - t, -y + t, -2x - y + z)$$

1. Vérifier rapidement que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer le rang de A. Sans calcul, en déduire le déterminant de A.
4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ et une base de $\operatorname{Im}\varphi$.
5. Calculer A^2. Qu'en déduit-on pour φ ?
6. On pose $f = 3\varphi - \mathrm{Id}_E$. Montrer que f vérifie $(*)$.

Partie II : Cas général
On revient maintenant au cas général et on considère un endomorphisme f de E vérifiant $(*)$.
On pose : $g = f - 2\mathrm{Id}_E$ et $h = f + \mathrm{Id}_E$.

1. a. Montrer que $g \circ h = h \circ g = 0$.
   b. En déduire que $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} h$.
2. a. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Ker} h) \geqslant n$.
   b. Montrer que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Ker} h$ sont en somme directe.
   c. Montrer que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Ker} h$ sont supplémentaires dans E.
3. Soient :
   - p la projection sur $\operatorname{Ker} g$ parallèlement à $\operatorname{Ker} h$
   - q la projection sur $\operatorname{Ker} h$ parallèlement à $\operatorname{Ker} g$

   a. Montrer que $h = 3p$ et $g = -3q$.
   b. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
   c. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad f^m = 2^m p + (-1)^m q$.
   On rappelle que f^m désigne le m-ième itéré de f pour la composition des applications :

$$f^m = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$$

Problème 3 : Calcul matriciel et probabilités

Le problème étudie le déplacement d'un pion sur un damier.

Partie I : Matrices

On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{4}J + \frac{1}{6}K$.

1. Calculer JK et KJ. En déduire que $\forall n \geqslant 2, \forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad J^k K^{n-k} = 0_4$
2. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J^n = 4^{n-1} J$ et $K^n = 2^{n-1} K$.
3. À l'aide des deux questions précédentes, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = \left(\frac{1}{4}J + \frac{1}{6}K\right)^n = \frac{1}{4}J + \frac{1}{2 \times 3^n}K.$$

Indication : on pourra appliquer la formule du binôme de Newton (d'autres méthodes sont possibles).

Partie II : Modélisation du déplacement d'un pion sur un damier à 9 cases

On considère un damier à 9 cases blanches et noires (en grisé sur le dessin) numérotées de la façon suivante :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases qui possède avec cette case un côté commun. Ainsi, si le pion est en N_2, il peut se déplacer vers B_1, B_3 ou B_5, avec des probabilités égales. On suppose qu'au départ le pion est en B_1.

1. Sur quelles cases peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ?

On note :

- $B_{k,n}$ « le pion est sur la case B_k après $2n$ déplacements » et $p_{k,n} = \mathbb{P}(B_{k,n})$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $N_{k,n}$ « le pion est sur la case N_k après $2n-1$ déplacements » et $q_{k,n} = \mathbb{P}(N_{k,n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

On pose enfin : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$.

2. Quelle est la valeur de V_0 ? de W_1 ?
3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\{B_{1,n}, B_{2,n}, B_{3,n}, B_{4,n}, B_{5,n}\}$ et $\{N_{1,n}, N_{2,n}, N_{3,n}, N_{4,n}\}$ sont deux systèmes complets d'événements.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, 5]\!]$:

$$\mathbb{P}(B_{k,n}) = \mathbb{P}_{N_{1,n}}(B_{k,n})\mathbb{P}(N_{1,n}) + \mathbb{P}_{N_{2,n}}(B_{k,n})\mathbb{P}(N_{2,n}) + \mathbb{P}_{N_{3,n}}(B_{k,n})\mathbb{P}(N_{3,n}) + \mathbb{P}_{N_{4,n}}(B_{k,n})\mathbb{P}(N_{4,n}).$$

5. Montrer ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad V_n = BW_n$ où $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Montrer de façon analogue au cas précédent qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad W_n = AV_{n-1}$. On donnera l'expression de A.
7. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad V_n = (BA)\,V_{n-1}$ et que $AB = M$, la matrice définie en partie I.

Partie III : Calcul des probabilités.

8. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = (BA)^n V_0$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (BA)^n = B(AB)^{n-1}A = BM^{n-1}A$.
9. En réutilisant l'expression des puissances successives de M en I.3, déterminer avec la question précédente la première ligne de la matrice $(BA)^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.
10. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{1,n} = \frac{1}{3}$. Interpréter ce résultat.
11. On considère la variable aléatoire définie, pour $i \in [\![1, n]\!]$, par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le pion est en case } B_1 \text{ après } 2i \text{ déplacements} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle loi suit cette variable aléatoire ? On donnera son espérance.

12. Que représente la variable aléatoire $Y = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$? Quelle est la loi de Y ? Calculer son espérance.