

Voici une liste non limitative d'exercices vous incitant à aller revisiter l'ensemble du cours de première année. Une connaissance précise du cours de première année est un préalable indispensable pour bien démarrer l'année de PSI.

Ces exercices seront corrigés uniquement en fonction de vos demandes.

1 Dériver/intégrer

Vous devez connaître les formules de dérivation, dont la formule de Leibniz, les dérivées et les primitives usuelles. Listez les méthodes classiques d'intégration pour les catégories type, en particulier les fonctions rationnelles simples.

En précisant les intervalles sur lesquels ces calculs ont un sens :

1. Dériver :

a. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x+1}$

b. $g : x \mapsto \text{Arcsin}(2x + 3)$

2. Donner une primitive de :

a. $f : x \mapsto (x + 1) \sin x$

c. $h : x \mapsto \ln(1 - x)$

e. $\psi : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+2x+4}$

b. $g : x \mapsto e^{2x} \cos x$

d. $\varphi : x \mapsto \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$

3. Calculer la dérivée n -ième de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ en utilisant une décomposition en éléments simples.

2 Comparer deux réels

Des inégalités classiques à connaître et à savoir redémontrer :

1. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ (représenter graphiquement)

2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ (représenter graphiquement)

3. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ (représenter graphiquement)

4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ (très simple, et très utile !)

Attention : On ne peut pas écrire une inégalité entre deux nombres complexes non réels.

3 Déterminer et utiliser des développements limités et des équivalents

Il faut bien connaître les équivalents et les développements limités usuels, ainsi que les règles de calcul sur les équivalents et les calculs "interdits".

1. **Incontournable :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (NON, elle n'est pas égale à 1 !)

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x - \frac{1}{2} \sin(2x)}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - 1} - \frac{1}{x - 1}\right)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{2n}$

3. Développement limité à l'ordre 6 en 0 de $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$

4. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$ et interprétation graphique

4 Étudier la nature d'une série à termes positifs

Il faut bien connaître les exemples usuels, séries géométriques et séries de Riemann, ainsi que les règles de comparaison.

1. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$

2. $\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \sin \left(\frac{1}{1+n^2}\right)$

5 Résoudre une équation différentielle linéaire

Vous devez revoir la méthode de résolution (équation linéaire homogène associée, méthode de variation de la constante), l'unicité des solutions pour un problème de Cauchy.

1. Ordre 1 : $xy' + (x - 1)y = x^2$ (à résoudre sur $]0, +\infty[$)
2. Ordre 2 à coefficients constants : $y'' + 3y' + 2y = -5 \cos(2x)$
3. Incontournable : $y'' + \omega^2 y = 0$

6 Calculer avec les nombres complexes

Pensez à faire des dessins et à utiliser les interprétations géométriques : partie réelle et imaginaire, module, argument, équation d'un cercle.

Il faut connaître les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$ et bien sûr l'expression des racines n -ièmes de l'unité.

1. Module et argument de : $\frac{-\sqrt{3}-5i}{2+i\sqrt{3}}$; $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} : $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9 = 0$ sachant qu'il existe une racine réelle.

7 Résoudre un système d'équations linéaires

1.
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 2 \\ -x + 3y - 5z = -1 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases}$$
 On discutera selon le paramètre réel a .

8 Calculer sur les matrices

Il faut connaître l'expression du terme général d'un produit de 2 matrices.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n par deux méthodes (au moins).
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} par deux méthodes (au moins).
3. Soit E l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et telles que :
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. Montrer que E est stable pour le produit matriciel.

9 Étudier si une famille est libre

1. Dans \mathbb{R}^4 , on considère $u = (1, 1, 1, -1)$, $v = (2, 1, -1, -3)$, $w = (-1, 2, 1, 0)$, $z = (0, -1, 1, 1)$.
La famille (u, v, w, z) est-elle libre ?
2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère $P_1 = X^3 + 3X^2 - X + 1$, $P_2 = X^3 + X^2 + 4X - 1$, $P_3 = X^2 + 3X$, $P_4 = 3X^2 - 2X + 2$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ?
3. Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $f_1 : x \mapsto \sin(x)$, $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$, $f_3 : x \mapsto \sin(3x)$.
La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

Exemples à connaître : une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre ; une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (cas particulier : famille orthonormée).

Penser à utiliser le déterminant pour une famille de n vecteurs en dimension n .

10 Relier équation et base d'un s.e.v.

Il faut connaître la caractérisation d'un sous-espace vectoriel. Mais montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est "le sous-espace vectoriel engendré" par une famille de vecteurs prouve en particulier que F est un sous-espace vectoriel (et, le cas échéant, peut permettre d'en déterminer une base et d'en déduire sa dimension). De même, reconnaître que F est le noyau d'une application linéaire prouve que F est un sous-espace vectoriel.

1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, montrer que : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - z + t = 0 \text{ et } 2x - 3y + z + 2t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base. Quelle est sa dimension ?
2. Dans \mathbb{R}^4 , on note : $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1, 1)$ et $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.
Quelle est la dimension de F ? Déterminer un système d'équations de F .

11 Écrire et utiliser une matrice d'application linéaire

L'écriture d'une matrice d'application linéaire se fait en colonnes.

Il faut connaître les formules de changement de base.

1. Soit f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.
Montrer que f est linéaire. Écrire sa matrice dans la base canonique. Déterminer son noyau et son image.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 16 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$, une base de $\text{Ker}(f)$ et montrer que : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

12 Montrer qu'une application est un produit scalaire

1. Dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, montrer que l'application φ définie ci-dessous est un produit scalaire.

$$\varphi : (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)e^t dt$$

2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que l'application φ définie ci-dessous est un produit scalaire.

$$\varphi : (P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

13 Savoir utiliser la formule des probabilités totales

Le système complet d'événements utilisé doit être explicite.

Un groupe possède 3 magasins vendant respectivement 25%, 35% et 40% de la production. Le premier fait 2% d'erreurs de facturation, le 2-ième 4% et le 3-ième 4%. Le service comptable reçoit un relevé de 10 factures provenant d'un même magasin.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 factures erronées ?
2. Le comptable constate qu'il y a exactement 2 factures erronées. Quelle est la provenance la plus vraisemblable de ce relevé ?

14 Reconnaître une loi binomiale

Soit $p \in]0, 1[$. Une puce se déplace sur un axe d'origine O , en partant de O , par sauts d'une unité vers la droite avec une probabilité égale à p et d'une unité vers la gauche avec une probabilité égale à $1 - p$, les sauts étant supposés indépendants.

Soit Z_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts effectués vers la droite lors des n premiers sauts et X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du point où se trouve la puce après n sauts.

Préciser la loi, l'espérance et la variance de Z_n puis celles de X_n .

15 Prouver une inclusion

Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, on fixe un élément quelconque de A et on montre qu'il appartient à B .
Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que : $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que : $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

16 Prouver l'égalité de deux ensembles par double inclusion

On considère :

- $A = \{(4a + b, 2a - b), (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$
- $B = \{(4m - p + 6, 2m + p), (m, p) \in \mathbb{Z}^2\}$
- $C = \{(4m + 2p, 2m + p), (m, p) \in \mathbb{Z}^2\}$

Démontrer que : $A = B$.

Les ensembles A et C sont-ils égaux ?

17 Construire un raisonnement par récurrence

1. RÉCURRENCE SIMPLE

Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de f .

Montrer que, pour tout $n > 0$, f admet une dérivée d'ordre n de la forme :

$f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$, où P_n est une fonction polynomiale de degré $n - 1$.

2. RÉCURRENCE DOUBLE

On définit la suite de polynômes : $U_0 = 1, U_1 = X - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = (X - 2)U_{n+1} - U_n$.

Montrer que pour tout entier n , U_n est un polynôme de degré n et unitaire.

3. RÉCURRENCE FORTE

On définit deux suites (u_n) et (v_n) en posant $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0$.

On suppose de plus qu'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M^n$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq (2M)^n$.

18 Reasonner par contraposée / Reasonner par l'absurde

Ces deux raisonnements peuvent souvent être utilisés de manière interchangeable

1. n étant un entier strictement positif, montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
2. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivable sur \mathbb{R} et dont la dérivée ne s'annule pas.
Montrer que f est injective.

19 Prouver une équivalence par double implication

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

Montrer que : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) \iff \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{\vec{0}\}$.

20 Reasonner par analyse et synthèse

Autrement dit : raisonner par condition nécessaire / condition suffisante.

1. Déterminer toutes les fonctions f dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation : $M + \text{tr}(M)I_n = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
NB : $\text{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M .
3. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E tel que $f \circ f = f$.
Montrer que : $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$. Quelle est la nature de f ?