

Modélisation d'un problème de mécanique

PSI - MP : Lycée Rabelais

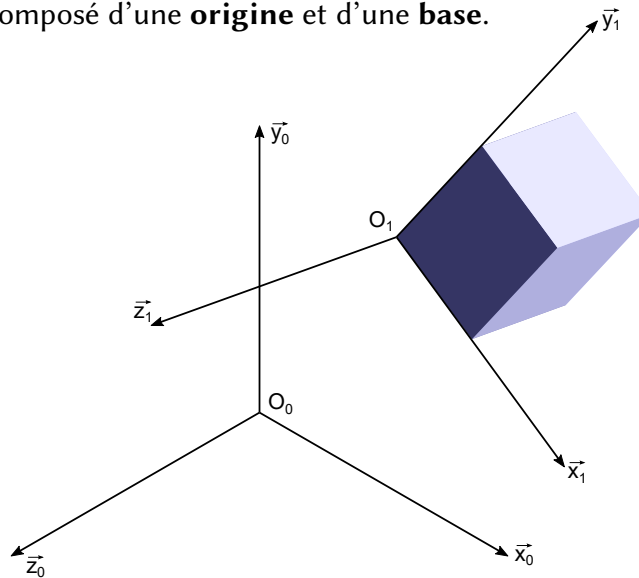
1 Position d'un solide dans l'espace

En sciences de l'ingénieur, une problématique récurrente est celle associée au positionnement d'un solide par rapport à un autre solide. Pour la suite, on notera les solides $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2...$. À chacun de ces solides sera associé un repère $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2...$. Étant donné que le repère reste solidaire du solide, on confondra souvent les notions de solide et de repère.

Sur la figure ci-dessous sont représentés :

- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ associé au solide $\mathcal{S}_0$;
- Le repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ associé au solide $\mathcal{S}_1$;

On rappelle qu'un **repère** est composé d'une **origine** et d'une **base**.



Deux problématiques sont associées au positionnement d'un solide par rapport à un autre solide :

- Le positionnement de l'origine ;
- La caractérisation de l'orientation.

1.1 Positionnement d'un point dans un repère

Pour positionner un point dans un repère, il faut définir les coordonnées de ce point. On dira que (x, y, z) sont les coordonnées du point O_1 dans le repère $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{O_0O_1} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

1.2 Orientation d'un solide par rapport à un autre solide

Pour caractériser l'orientation d'un solide par rapport à un autre solide, on utilisera la notion **d'angle orienté**. La maîtrise des calculs élémentaires autour de cette notion est indispensable !

On considère ici quatre bases $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$; $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ associées respectivement à des solides $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$. On donne le paramétrage suivant :

- Le solide $\mathcal{S}_1$ est orienté par rapport au solide $\mathcal{S}_0$ d'un angle α de telle sorte que $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$ et $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$.
- Le solide $\mathcal{S}_2$ est orienté par rapport au solide $\mathcal{S}_1$ d'un angle β de telle sorte que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.
- Le solide $\mathcal{S}_3$ est orienté par rapport au solide $\mathcal{S}_1$ d'un angle γ de telle sorte que $\vec{y}_3 = \vec{y}_1$ et $\gamma = (\vec{z}_1, \vec{z}_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$.

 **Réaliser les calculs suivants :**

$\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_0 =$

$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 =$

$\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 =$

$\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 =$

$\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 =$

$\vec{z}_3 \cdot \vec{z}_2 =$

$$\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_0 =$$

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_1 =$$

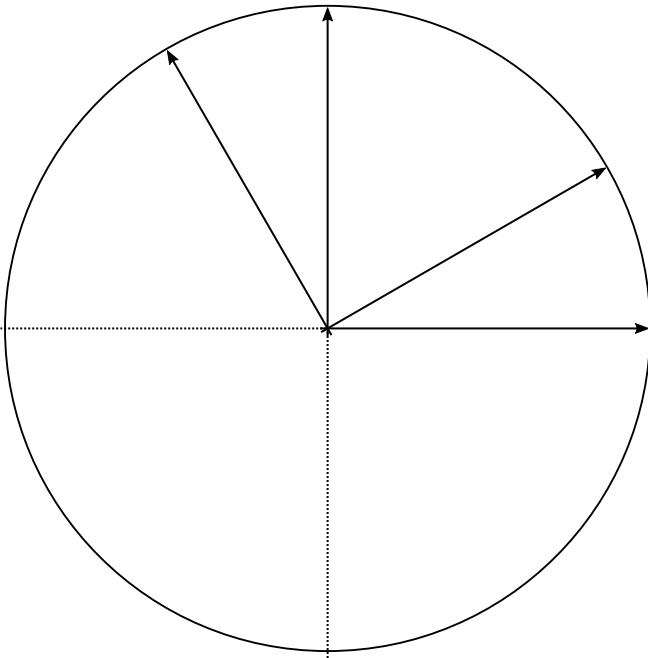
$$\vec{y}_0 \wedge \vec{y}_1 =$$

$$\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 =$$

$$\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_2 =$$

$$\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_2 =$$

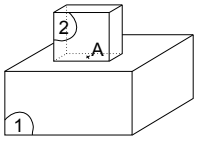
Simplification des $\pi/2$:



2 Cinématique

2.1 Notation et cas élémentaires

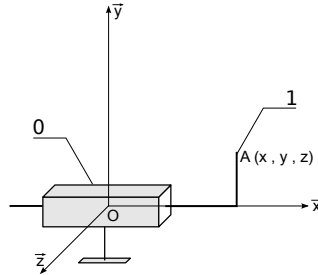
Le torseur cinématique permet de modéliser la vitesse d'un solide par rapport à un autre solide. Le vecteur vitesse de rotation (résultante du torseur) modélise les vitesses de rotation du solide. Le vecteur vitesse (moment du torseur) modélise la vitesse d'un point du solide par rapport au solide de référence.



$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} & \text{(Résultante du torseur cinématique : vecteur vitesse de rotation en rad/s)} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} & \text{(Moment du torseur cinématique en A : vecteur vitesse en m/s)} \end{cases}$$

2 correspond "par convention" au solide $\mathcal{S}_2$.

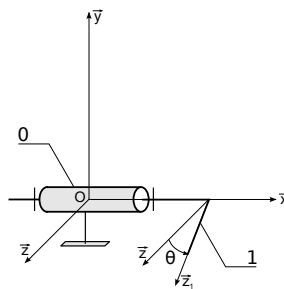
2.2 Solides en liaison glissière



On considère un solide 1 en liaison glissière de direction $\vec{x}$ avec un solide 0. La pièce 1 est repérée par la position du point A de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On notera donc :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} =$$

2.3 Solides en liaison pivot



On considère un solide 1 en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec un solide 0. La pièce 1 est repérée par l'angle orienté $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$. On notera donc :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} =$$

2.4 Rappel de quelques formules

- **Transport du moment (formule de transport ou formule de Varignon) :**

$$\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \quad (\text{BABAR} \text{ 🦒})$$

- **Composition des vitesses :**

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

Cela signifie donc que : $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ et que $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B \in 1/0}}$.

- **Vitesses relatives :**

$$\{\mathcal{V}_{1/2}\} = -\{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

- **Définition de la vitesse :**

$$\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right|_{R_1} \text{ où } O \text{ est fixe dans } R_1 \text{ et } A \text{ un point solide du solide 2.}$$

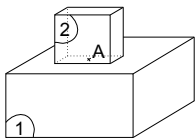
- **Dérivée d'un vecteur :**

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque ; $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ sont deux repères quelconques. $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}} \wedge \vec{u}$

3 Actions mécaniques

3.1 Notation

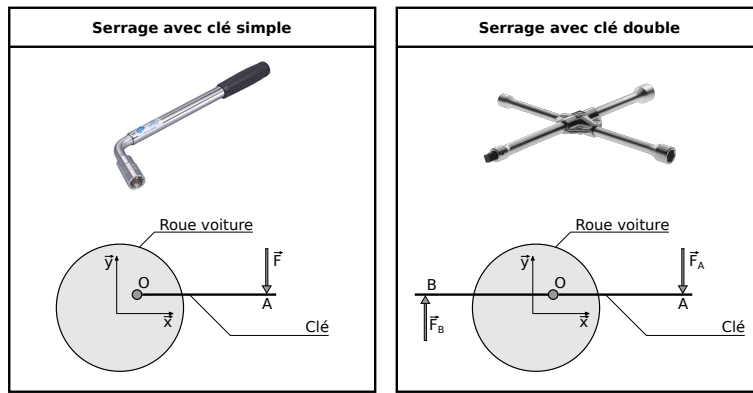
Le torseur des actions mécaniques permet de modéliser l'action d'un solide sur un autre solide. Il ne faut pas confondre le torseur cinématique, qui représente des vitesses et le torseur des actions mécaniques qui représente l'effort appliqué sur un solide.



$$\{1 \rightarrow 2\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} & (\text{Résultante du torseur des actions mécaniques en N}) \\ \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} & (\text{Moment du torseur des actions mécaniques en A en N.m}) \end{cases}$$

3.2 Notion de glisseur et de torseur couple

Pour illustrer ces notions, on s'intéresse au serrage d'une roue de voiture à l'aide d'une clé (figure ci-dessous). On considère deux clés différentes. La première permet d'exercer une force sur la poignée d'un seul côté, la seconde permet de répartir l'action mécanique de part et d'autre du manche. Pour cette seconde, on exerce donc deux forces.



Paramétrage :

- $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO} = L.\vec{x}$
- **Pour la clé simple** : l'utilisateur, à l'aide de la clé, exerce sur la vis une force $\vec{F} = -F_0\vec{y}$ au point A.
- **Pour la clé double** : l'utilisateur, à l'aide de la clé, exerce sur la vis une force $\vec{F}_A = -\frac{F_0}{2}\vec{y}$ au point A et une force $\vec{F}_B = +\frac{F_0}{2}\vec{y}$ sur la vis au point B.

Pour la clé simple puis pour la clé double, déterminons le torseur de l'action de l'ensemble {utilisateur + clé} = uc sur la vis, notée v , au point O (qui correspond à la position de la vis).



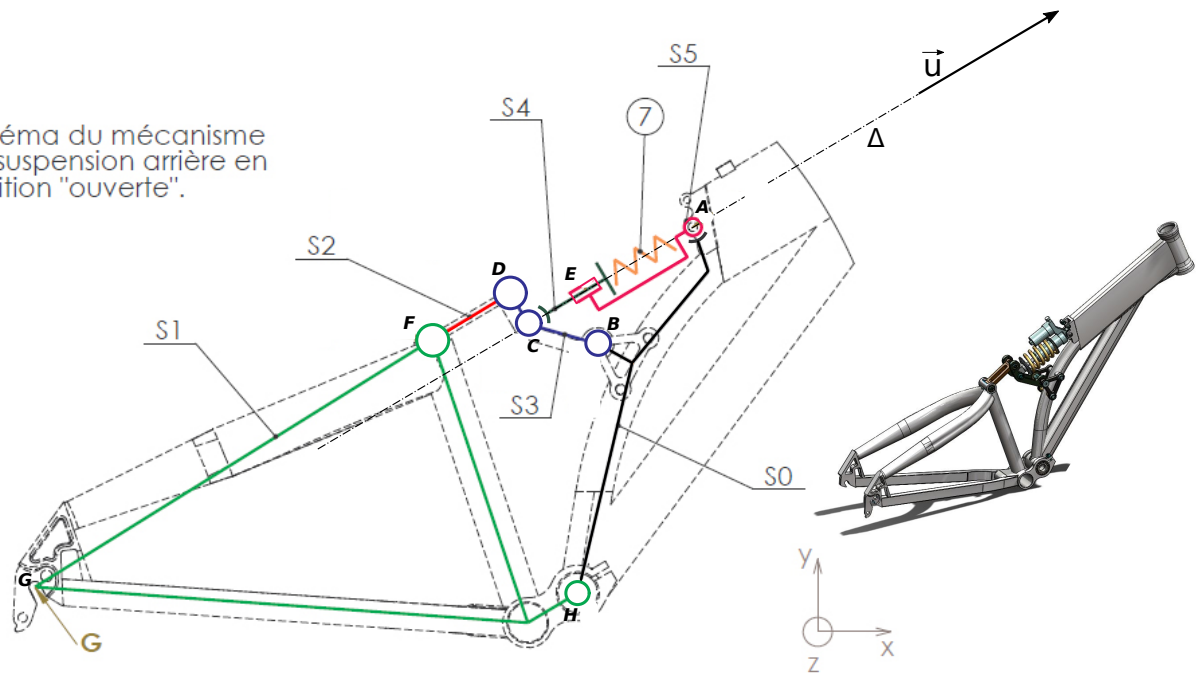
3.3 Direction d'une action mécanique

On s'intéresse à un cadre de vélo muni d'une suspension dont le schéma cinématique est donné ci-dessous. La suspension est dotée d'un ressort (pièce 7) et d'un amortisseur hydraulique (ensemble S4 et S5).

On notera donc :

- l'action liée à l'huile dans l'amortisseur avec le torseur $\{S4 \xrightarrow{\text{huile}} S5\} = \begin{cases} \vec{R}_{S4 \xrightarrow{\text{huile}} S5} = f.\vec{u} \\ \vec{M}_{E, S4 \xrightarrow{\text{huile}} S5} = \vec{0} \end{cases}$ où f est une inconnue.
- l'action liée au ressort fixé entre S4 et S5 avec le torseur $\{S4 \xrightarrow{\text{ressort}} S5\} = \begin{cases} \vec{R}_{S4 \xrightarrow{\text{ressort}} S5} = r.\vec{u} \\ \vec{M}_{E, S4 \xrightarrow{\text{ressort}} S5} = \vec{0} \end{cases}$ où r est également une inconnue.

Schéma du mécanisme de suspension arrière en position "ouverte".



Le solide S_4 est en liaison avec le solide S_3 par une liaison rotule de centre C . De même, le solide S_5 est en liaison avec le solide S_0 par une liaison rotule de centre A .

La liaison entre S_4 et S_5 est une liaison pivot glissant. Toutes les autres liaisons sont des liaisons pivots.

On néglige l'effet de la pesanteur sur toutes les pièces excepté sur le solide S_0 (pièce sur laquelle le pilote se tient).

Q1 : Faire un graphe d'analyse (rajouter les pièces manquantes et/ou les actions mécaniques lors de l'utilisation du vélo).

Q2 : Montrer que la résultante de l'action de S_5 sur S_0 est dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

À retenir

Si un solide n'est soumis qu'à deux glisseurs, alors les résultantes de ces deux glisseurs seront de même direction. Cette direction est celle de la droite définie par les points d'application des deux glisseurs.

Moins important à retenir, les résultantes seront de même norme et de sens opposé.

3.4 Rappel de quelques formules

- Transport du moment (formule de transport ou formule de Varignon) :

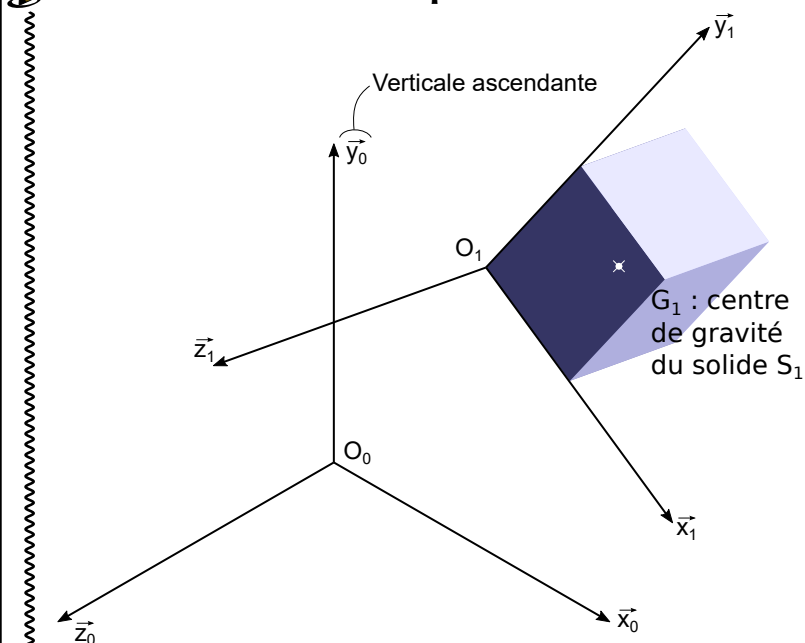
$$\overrightarrow{M_{B,1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \quad (\text{BABAR } \text{👤})$$

- Théorème des actions réciproques :

$$\{1 \rightarrow 2\} = -\{2 \rightarrow 1\}$$

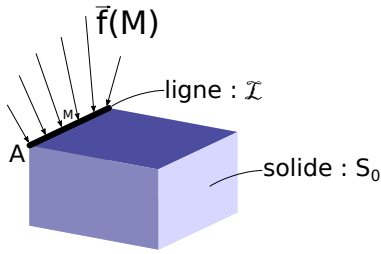
4 Modélisation

Différentes notations pour les torseurs et modélisation du poids :



Modélisation locales et globales :

Force linéique :



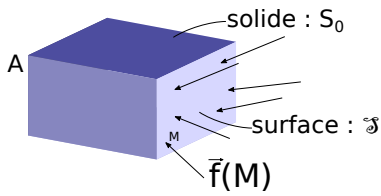
Si $\vec{f}(M)$ est une force linéique (en Newton/mètre) exercée par l'extérieur sur un élément de ligne dl (de longueur dl) en un point M appartenant à la ligne $\mathcal{L}$, alors l'action locale s'écrit :

$$\{\text{ext} \rightarrow dl\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow dl} = \vec{f}(M) \cdot dl \\ \vec{M}_{M, \text{ext} \rightarrow dl} = \vec{0} \end{cases}$$

Pour passer à l'action globale de l'action de l'extérieur sur le solide S_0 , il suffit d'intégrer pour tous les points M de la ligne. On aura donc :

$$\{\text{ext} \rightarrow S_0\} = \int_{M \in \mathcal{L}} \{\text{ext} \rightarrow dl\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{L}} \vec{f}(M) \cdot dl \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{L}} \vec{AM} \wedge \vec{f}(M) \cdot dl \end{cases}$$

Force surfacique :



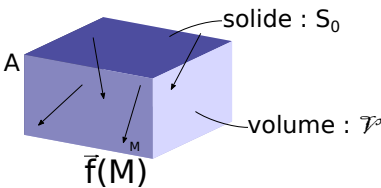
Si $\vec{f}(M)$ est une force surfacique (en Newton/mètre² = Pascal) exercée par l'extérieur sur un élément de surface ds en un point M appartenant à la surface $\mathcal{S}$, alors l'action locale s'écrit :

$$\{\text{ext} \rightarrow ds\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow ds} = \vec{f}(M) \cdot ds \\ \vec{M}_{M, \text{ext} \rightarrow ds} = \vec{0} \end{cases}$$

Pour passer à l'action globale de l'action de l'extérieur sur le solide S_0 , il suffit d'intégrer pour tous les points M de la surface. On aura donc :

$$\{\text{ext} \rightarrow S_0\} = \int_{M \in \mathcal{S}} \{\text{ext} \rightarrow ds\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{f}(M) \cdot ds \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{AM} \wedge \vec{f}(M) \cdot ds \end{cases}$$

Force volumique :



Si $\vec{f}(M)$ est une force volumique (en Newton/mètre³) exercée par l'extérieur sur un élément de surface dV en un point M appartenant au volume $\mathcal{V}$, alors l'action locale s'écrit :

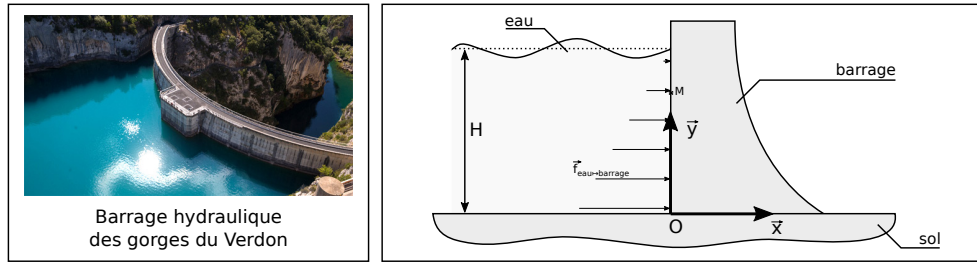
$$\{\text{ext} \rightarrow dV\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow dV} = \vec{f}(M) \cdot dV \\ \vec{M}_{M, \text{ext} \rightarrow dV} = \vec{0} \end{cases}$$

Pour passer à l'action globale de l'action de l'extérieur sur le solide S_0 , il suffit d'intégrer pour tous les points M du volume. On aura donc :

$$\{\text{ext} \rightarrow S_0\} = \int_{M \in \mathcal{V}} \{\text{ext} \rightarrow dV\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{V}} \vec{f}(M) \cdot dV \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{V}} \vec{AM} \wedge \vec{f}(M) \cdot dV \end{cases}$$

Application :

On cherche à modéliser l'action de l'eau sur le barrage comme présenté sur la figure ci-dessous :



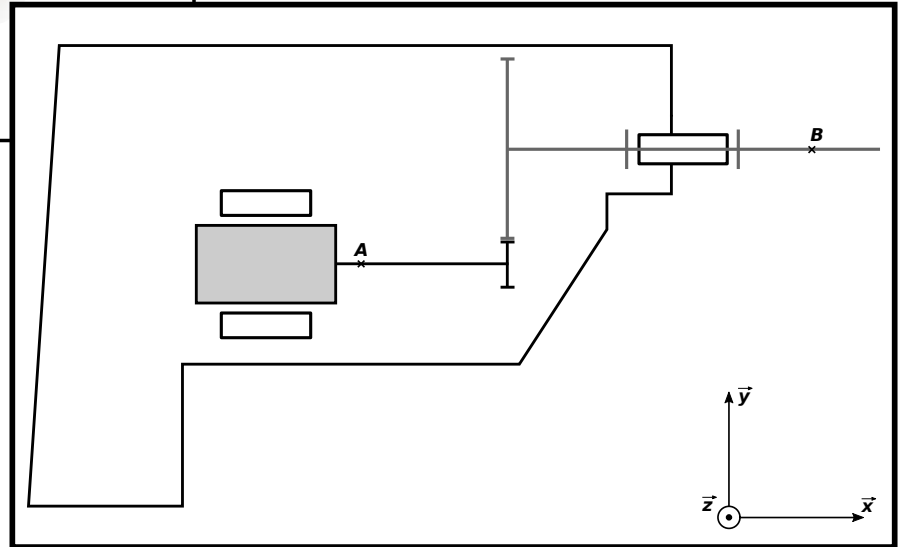
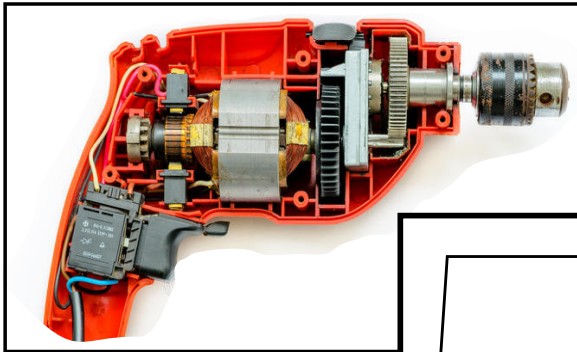
Barrage hydraulique
des gorges du Verdon

On considère le problème invariant dans la direction $\vec{z}$. La hauteur d'eau est donnée par la longueur H et la largeur du barrage est donnée par la longueur L . On a environ : $H = 27$ m et $L = 800$ m.

On rappelle également que l'eau exerce une densité surfacique d'effort (donc homogène à une pression) proportionnelle à la profondeur de telle sorte que $\vec{p}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho \cdot g \cdot (H - y) \cdot \vec{x}$ avec ρ , la masse volumique de l'eau ; g , la constante de pesanteur et $(H - y)$ la profondeur en un point M quelconque.

Déterminons la résultante globale de l'action de l'eau sur le barrage :

Modélisation d'un moteur et notion de rapport de réduction :



4.1 Modélisation d'un problème plan

On admettra qu'un problème est "plan" lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- la géométrie des **liaisons** présente un **plan de symétrie**,
- la **cinématique est plane** (tous les mouvements sont décrits dans le plan considéré),
- les actions mécaniques sont symétriques par rapport à ce plan, ce qui signifie :
 - les **résultantes** sont des **vecteurs compris dans le plan**,
 - les **moments** sont **perpendiculaires au plan** considéré.

Lorsque ces hypothèses sont vérifiées (ce sera souvent spécifié dans le sujet), on n'utilisera pas toutes les composantes des torseurs. Les composantes inutilisées sont celles qui correspondent à des actions mécaniques susceptibles de faire sortir les solides du plan.

Dans le cas d'un problème plan, l'application du principe fondamental de la statique (ou dynamique) ne fournira que 3 équations scalaires :

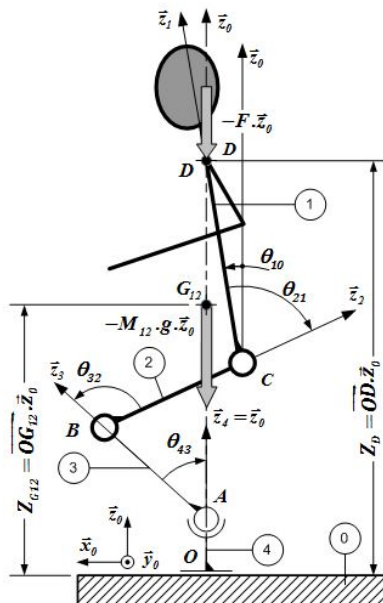
- **2 équations issues du théorème de la résultante statique** projeté sur les 2 axes de la base appartenant au plan ;
- **1 équation issue du théorème du moment statique** projeté sur l'axe perpendiculaire au plan.

 Exemple issu d'un sujet de concours.

Extrait : Dans cette partie, on suppose l'étude modélisable dans le plan de projection sagittal ($O, \vec{x}_0, \vec{z}_0$).

On note i et j , deux solides quelconques et K un point quelconque.

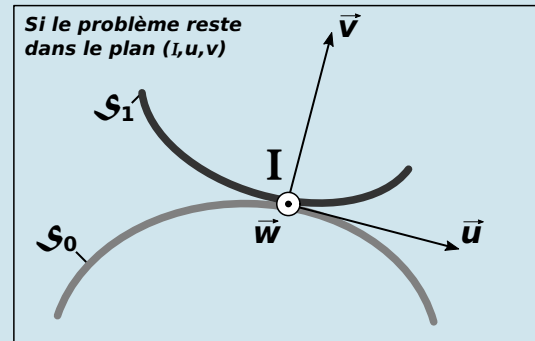
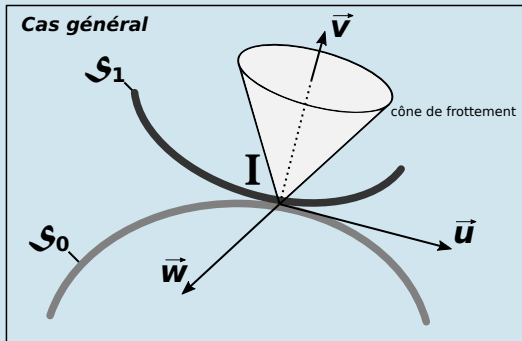
Les tenseurs seront donc de la forme :



Examples :

À retenir : Lois de Coulomb

Soit un contact ponctuel entre deux solides $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ en I et de normale $\vec{v}$. On note f (sans unité), le coefficient de frottement "statique" de Coulomb et f' le coefficient de frottement "dynamique" de Coulomb. Dans les faits, $f' \approx f$ et donc ces deux grandeurs sont souvent confondues.



$$\{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1\} = \begin{cases} \vec{R}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \vec{N}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1} + \vec{T}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1} \\ \quad \quad \quad = N_{01}\vec{v} + T_{01u}\vec{u} + T_{01w}\vec{w} \\ \vec{M}_{I, \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1\} = \begin{cases} \vec{R}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N_{01}\vec{v} + T_{01}\vec{u} \\ \vec{M}_{I, \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \vec{0} \end{cases}$$

On dira que :

- $\vec{N}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}$ est la **force normale** et que $\vec{T}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}$ est la **force tangentielle**,
- et plus particulièrement, dans le plan, N_{01} est la **composante normale** et T_{01} est la **composante tangentielle**.

Il existe deux cas de figure :

- Il y a **adhérence** (pas de glissement) si $\|\vec{T}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}\| < f \cdot \|\vec{N}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}\|$ donc, dans le plan, si $|T_{01}| < f \cdot |N_{01}|$.
- S'il y a **glissement** alors $\|\vec{T}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}\| = f' \cdot \|\vec{N}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}\|$ donc, dans le plan, si $|T_{01}| = f' \cdot |N_{01}|$. Dans ce cas, le vecteur $\vec{T}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}$ est colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{V}_{I \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{S}_0}$.

Juste avant le glissement, on dit que les solides sont "**à la limite du glissement**". Il sont donc fixes l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas, on considère que $\|\vec{T}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}\| = f \cdot \|\vec{N}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}\|$ et, dans le plan, que $|T_{01}| = f \cdot |N_{01}|$.

Ces équations reviennent à dire - d'un point de vue graphique - que :

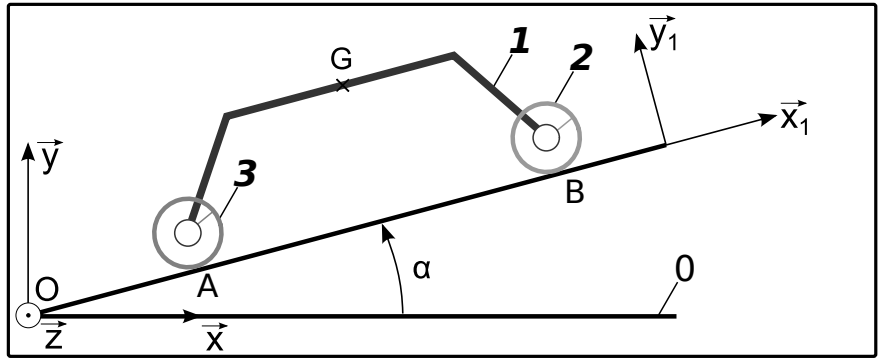
- Il y a **adhérence** (pas de glissement) si la force $\vec{R}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}$ reste strictement dans le cône de frottement.
- S'il y a **glissement** alors la force $\vec{R}_{\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_1}$ est sur le cône de frottement.

Application :

Situation réelle



Modélisation



On considère ici que la voiture est à l'arrêt sur la piste inclinée de 45° et que l'hypothèse d'un problème plan peut être retenue.

On considère ici (ce qui n'est pas le cas !) que seules les roues avant (notées 2) sont bloquées par un frein. Les roues arrières (notées 3) sont supposées être libres en rotation. Le châssis du véhicule est noté 1.

Les lois de Coulomb seront utilisées pour modéliser le frottement dans les liaisons ponctuelles entre les roues et le sol aux points de contact A et B. On notera f le coefficient de frottement.

Quel doit être le coefficient de frottement pour que la voiture puisse rester immobile sans glisser ?

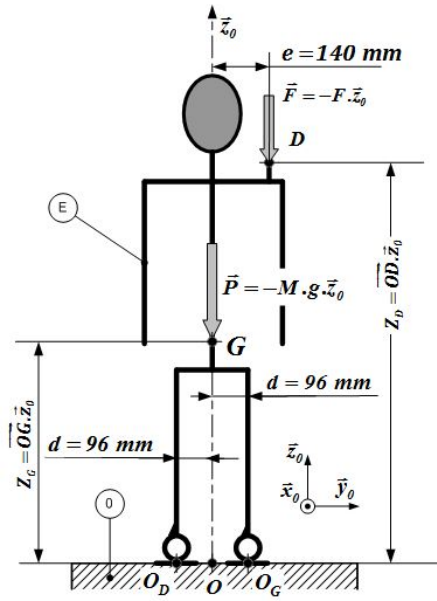
La voiture a une masse $M = 3500$ kg. Son centre de gravité est G et la géométrie de la voiture impose $\overrightarrow{AB} = L.\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{L}{2}.\vec{x}_1 + h.\vec{y}_1$. On prendra $L = 3,5$ m et $h = 0,65$ m

4.2 Modélisation des liaisons

Degré de liberté	Désignation	Schématisation Perspective Projection orthogonale	Torseur cinématique en P dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Torseur d'actions mécaniques exprimé en P dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Particularités
0	Encastrement ou Fixe				
1	Pivot				
1	Glissière				
1	Hélicoïdale				
2	Pivot glissant				

2	Sphérique à doigt				
3	Rotule ou Sphérique				
3	Appui plan				
4	Sphère cylindre ou Linéaire annulaire				
4	Linéaire rectiligne				
5	Ponctuelle ou Sphère plan				

4.3 Condition de non-bascullement



Extrait : Pour vérifier le respect du critère de non-bascullement, il faut que les contacts ponctuels en O_D et en O_G (supposé avec frottement) respectent toujours la **contrainte d'unilatéralité**.