

Résolution d'un problème de dynamique "simple"

PSI - MP : Lycée Rabelais

1 Énoncé du principe

Dans un repère Galiléen R , le torseur de l'ensemble des actions mécaniques appliquées à un ensemble de solides E est égal au torseur dynamique de cet ensemble de solides dans son mouvement par rapport à R .

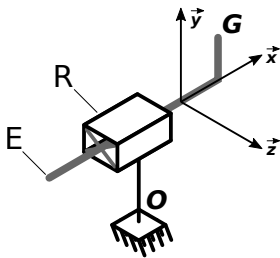
$$\sum \{ext \rightarrow E\} = \{\mathcal{D}_{E/R}\}$$

Cette égalité est une égalité **torsorielle**. À partir de ce principe, il est donc possible d'écrire :

- le théorème de la résultante dynamique,
- le théorème du moment dynamique.

2 Solide en translation rectiligne par rapport à un référentiel galiléen

On considère que :



- R est un référentiel galiléen.
- E est un solide ou un ensemble de solides dont le centre d'inertie est G et la masse est m . On note

$$\overrightarrow{OG} = x(t)\vec{x} + y_G\vec{y} + z_G\vec{z}$$

avec x , une fonction du temps et, y_G et z_G des constantes.

À retenir

On admet que la résultante dynamique de E par rapport à R s'écrit : $\overrightarrow{Rd}_{E/R} = m \cdot \ddot{x}(t)\vec{x}$

Le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}$ s'écrit alors :

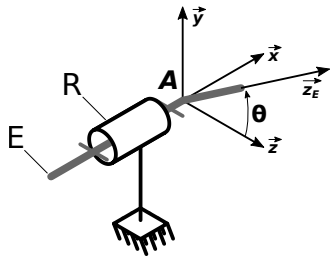
$$\sum \vec{R}_{ext \rightarrow E} \cdot \vec{x} = \overrightarrow{Rd}_{E/R} \cdot \vec{x} = m \cdot \ddot{x}(t)$$

À comprendre !

La masse caractérise l'inertie d'un solide en translation. Plus la masse est grande, plus il est difficile d'accélérer ou de décélérer le solide. Son unité est le **kg**.

3 Solide en rotation par rapport à un axe fixe

On considère que :



- R est un référentiel galiléen associé à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- E est un solide ou un ensemble de solides associé à la base $(\vec{x}_E, \vec{y}_E, \vec{z}_E)$. Ce solide E est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ par rapport à R et on note

$$\theta(t) = (\vec{y}, \vec{y}_E) = (\vec{z}, \vec{z}_E) \quad \text{avec} \quad \vec{x} = \vec{x}_E$$

On donne également J , le moment d'inertie de E autour de l'axe $(A, \vec{x})$.

À retenir

On admet que le moment dynamique en A de E par rapport à R vérifie : $\vec{\delta}_{A,E/R} \cdot \vec{x} = J \cdot \ddot{\theta}(t)$

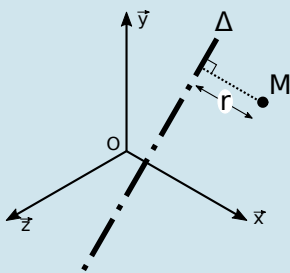
Le théorème du moment dynamique en A et en projection sur $\vec{x}$ s'écrit alors :

$$\sum \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow E} \cdot \vec{x} = \vec{\delta}_{A,E/R} \cdot \vec{x} = J \cdot \ddot{\theta}(t)$$

À comprendre !

Le moment d'inertie d'un solide caractérise l'inertie de ce dernier en rotation. Plus le moment d'inertie est grand, plus il est difficile d'accélérer ou de décélérer le solide (en rotation). Ce moment d'inertie dépend de la masse du solide **et** de la répartition de celle-ci. Son unité est le **kg × m²**.

À retenir



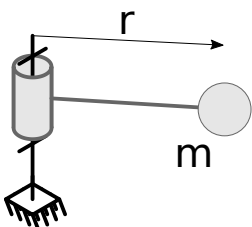
Supposons une masse ponctuelle

- située en M ,
- de masse m ,
- et à une distance r de l'axe Δ .

Le moment d'inertie de cette masse autour de l'axe Δ est

$$J = m \cdot r^2$$

Devinette



On considère une tige de masse négligeable et de longueur r en rotation autour d'un axe fixe. Une masse ponctuelle, de masse m , est fixée à son extrémité. Il n'y a aucun frottement. La tige est amenée à une vitesse de rotation ω_0 puis lâchée. Pour que la tige tourne le plus longtemps, quelles doivent être ses caractéristiques :

- $r = 20$ cm et $m = 700$ grammes (masse d'une boule de pétanque) ou,
- $r = 1$ m et $m = 46$ grammes (masse d'une balle de golf) ?