

Modélisation d'un problème de dynamique

PSI - MP : Lycée Rabelais

1 Énoncé du principe

Dans un repère Galiléen R , le torseur des actions mécaniques appliquées à un ensemble de solides E est égal au torseur dynamique de cet ensemble de solides dans son mouvement par rapport à R .

$$\sum \{ext \rightarrow E\} = \{\mathcal{D}_{E/R}\}$$

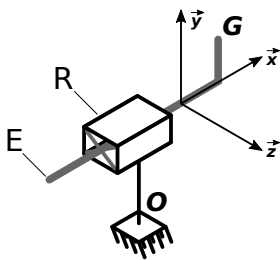
Cette égalité est une égalité **torsorielle**. À partir de ce principe, il est donc possible d'écrire les deux théorèmes suivants :

Théorème de la résultante dynamique : $\sum \vec{F}_{ext \rightarrow E} = \vec{R}_{d,E/R}$ résultante dynamique de E à R

Théorème du moment dynamique en A : $\sum \vec{\Pi}_A \{ext \rightarrow E\} = \vec{\delta}_A \{E/R\}$ moment dynamique en A de E à R

La plupart du temps, on préférera travailler sur une **équation scalaire**. On écrira donc l'un de ces deux théorèmes en projection sur une direction particulière.

2 Solide en translation rectiligne par rapport à un référentiel galiléen



On considère que :

- R est un référentiel galiléen.
- E est un solide ou un ensemble de solides dont le centre d'inertie est G et la masse est m . On note

$$\vec{OG} = x(t) \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$$

avec x , une fonction du temps et, y_G et z_G des constantes.

À retenir

On admet que la résultante dynamique de E par rapport à R s'écrit : $\vec{R}_{d,E/R} = m \cdot \ddot{x}(t) \vec{x}$

Le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}$ s'écrit alors :

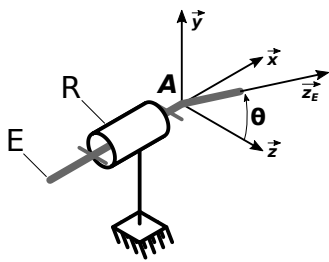
$$\sum \vec{R}_{ext \rightarrow E} \cdot \vec{x} = \vec{R}_{d,E/R} \cdot \vec{x} = m \cdot \ddot{x}(t)$$

À comprendre !

La masse caractérise l'inertie d'un solide en translation. Plus la masse est grande, plus il est difficile d'accélérer ou de décélérer le solide. Son unité est le **kg**.

3 Solide en rotation par rapport à un axe fixe

On considère que :



- R est un référentiel galiléen associé à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- E est un solide ou un ensemble de solides associé à la base $(\vec{x}_E, \vec{y}_E, \vec{z}_E)$. Ce solide E est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ par rapport à R et on note

$$\theta(t) = (\vec{y}, \vec{y}_E) = (\vec{z}, \vec{z}_E) \quad \text{avec} \quad \vec{x} = \vec{x}_E$$

On donne également J , le moment d'inertie de E autour de l'axe $(A, \vec{x})$.

À retenir

On admet que le moment dynamique en A de E par rapport à R vérifie : $\vec{\delta}_{A,E/R} \cdot \vec{x} = J \cdot \ddot{\theta}(t)$

Le théorème du moment dynamique en A et en projection sur $\vec{x}$ s'écrit alors :

$$\sum \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow E} \cdot \vec{x} = \vec{\delta}_{A,E/R} \cdot \vec{x} = J \cdot \ddot{\theta}(t)$$

À comprendre !

Le moment d'inertie d'un solide caractérise l'inertie de ce dernier en rotation. Plus le moment d'inertie est grand, plus il est difficile d'accélérer ou de décélérer le solide (en rotation).

Ce moment d'inertie dépend de la masse du solide **et** de la répartition de celle-ci. Son unité est le **kg × m²**.