

Centre d'intérêt 1

Révisions de statique

PSI - MP : Lycée Rabelais



Pré-requis

Géométrie vectorielle

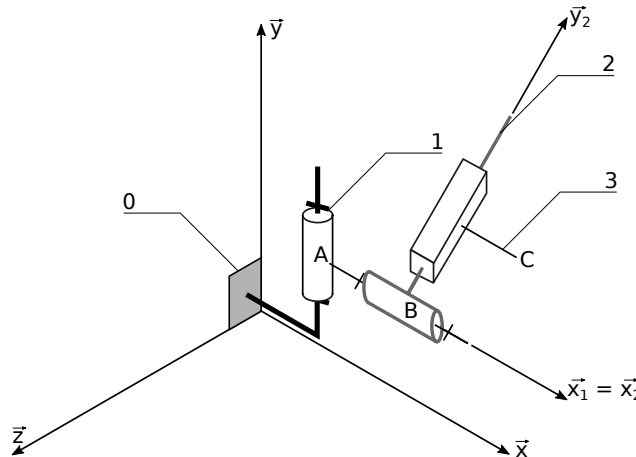
Cours de première année sur la statique



Objectifs

Savoir utiliser **efficacement** le principe fondamental de la statique

1 Méthode d'isolement ★



On considère le robot dont la cinématique est définie par le schéma ci-dessus. Le solide 1 a pour centre de gravité A et pour masse m_1 ; le solide 2 a pour centre de gravité B et pour masse m_2 ; le solide 3 a pour centre de gravité C et pour masse m_3 .

Toutes les liaisons sont motorisées. Les différentes actions de motorisation sont représentées par les torseurs suivants :

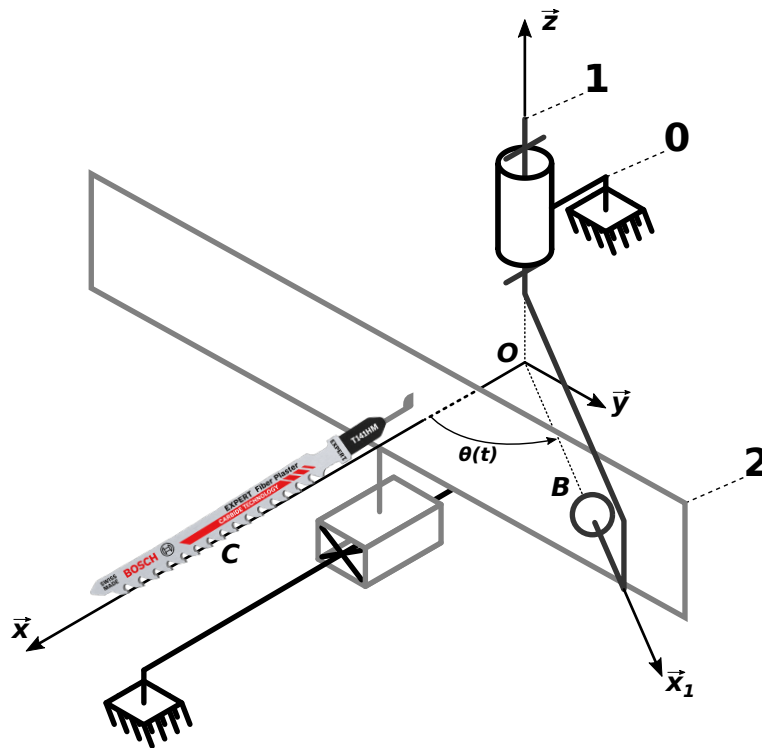
$$\{0 \xrightarrow{\text{mot}} 1\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 1}^{\text{mot}}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow 1}^{\text{mot}}} = C_{01} \vec{y} \end{cases} ; \{1 \xrightarrow{\text{mot}} 2\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}^{\text{mot}}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}^{\text{mot}}} = C_{12} \vec{x}_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \{2 \xrightarrow{\text{mot}} 3\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 3}^{\text{mot}}} = F_{23} \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{M_{B,2 \rightarrow 3}^{\text{mot}}} = \vec{0} \end{cases}$$

Question 1. Mettre au point un graphe d'analyse.

Question 2. Déterminer la stratégie d'isolement pour déterminer C_{01} , C_{12} et F_{23} en fonction notamment des masses des différents solides. Justifier (mais ne pas détailler les calculs).

2 Mécanisme de scie sauteuse ★★

Le schéma cinématique minimal ci-dessous représente le mécanisme de transformation de mouvement de rotation continue en mouvement de translation rectiligne alternative d'une scie sauteuse. Les masses des pièces sont négligées et on suppose qu'une approche statique est réaliste compte-tenu de l'inertie des pièces. Le repère du bâti (noté 0) est considéré comme galiléen. Les liaisons sont représentées sur le schéma ci-dessous :



La pièce 1 est liée à un moto-réducteur qui exerce un couple nominale C_r . Cette pièce 1 entraîne un coulisseau 2 lié à la lame de la scie.

L'action mécanique du matériau à découper sur la lame est représentable par le torseur :

$$\{\text{mat} \rightarrow 2\} = \begin{cases} \vec{R}_{(\text{mat} \rightarrow 2)} = X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ \vec{M}_{(C, \text{mat} \rightarrow 2)} = \vec{0} \end{cases}$$

On pose le paramétrage suivant :

- $\theta = \theta(t) = (\vec{x}, \vec{OB}) = (\vec{x}, \vec{x}_1)$
- $\vec{OB} = e \vec{x}_1$ où $e = 3 \text{ mm}$
- $\vec{OC} = d(t) \vec{x}$

Question 1. Donner la relation liant le couple en sortie du motoréducteur C_r à l'effort X exercé par le matériau à couper sur la lame si toutes les liaisons sont parfaites (en fonction de e et de θ notamment).

La force nécessaire pour découper une tôle s'écrit $X_{\text{découpe}} = \tau \times \ell \times h$ où :

- τ est la résistance au cisaillement (≈ 700 MPa pour de l'aluminium),
- ℓ est la largeur de la lame (≈ 2 mm pour une lame classique),
- h est la hauteur de la tôle à découper (≈ 3 mm).

On envisage d'utiliser un moteur ayant un couple moteur de 1,3 N.m et un réducteur de rapport de réduction $r = \frac{1}{96}$.

Question 2. Cette motorisation est-elle compatible avec la tôle à découper ?

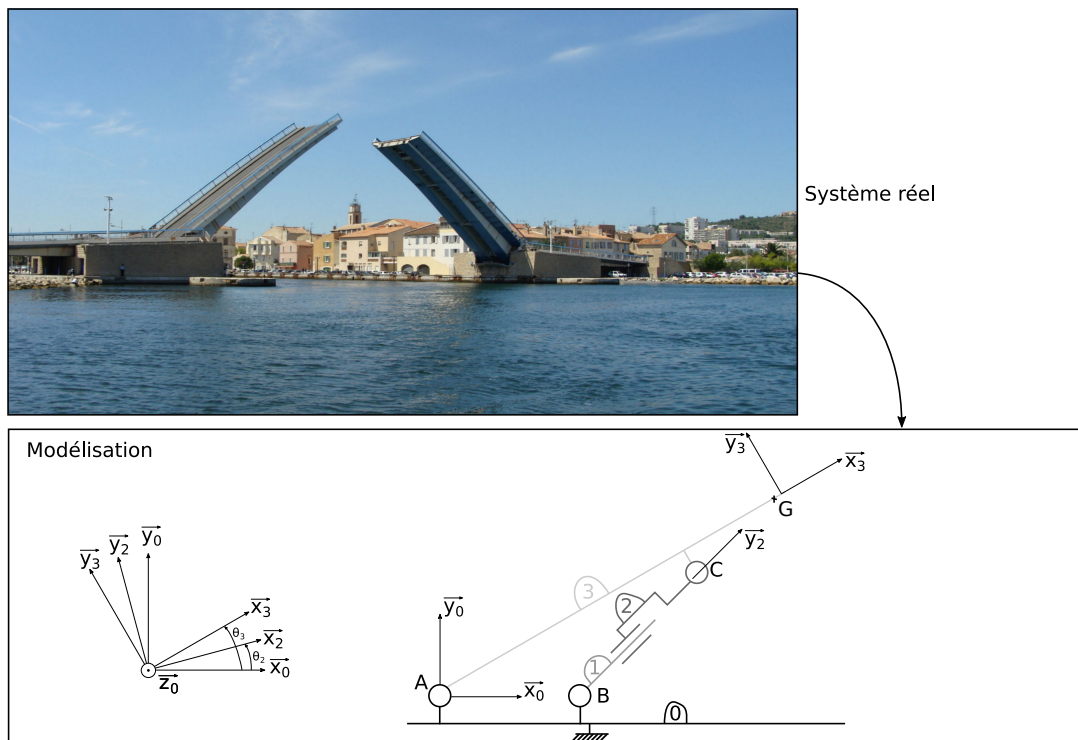
On suppose maintenant que la liaison entre 1 et 2 présente des frottements de Coulomb dont le coefficient associé est f . On se limite uniquement à l'étude dans le cas où $X > 0$, $\dot{\theta} > 0$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On prendra $f = 0,12$ (contact acier sur acier avec lubrification).

Question 3. On cherche toujours la relation liant le couple moteur à l'effort X mais, cette fois-ci, en prenant en compte le frottement. On pourra s'aider des indications suivantes :

- Écrire $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$;
- Calculer la vitesse de glissement $v_g = \vec{V}_{B \in 1/2} \cdot \vec{y}$;
- Clarifier l'expression de $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$;
- Trouver la relation recherchée.

Question 4. La motorisation reste-t-elle compatible avec la tôle à découper ?

3 Levage d'un pont ★★



Paramétrage :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= l_0 \vec{x}_0 & \vec{AC} &= l_{3x} \vec{x}_3 + l_{3y} \vec{y}_3 & \vec{BC} &= \lambda(t) \vec{y}_2 & \vec{AG} &= l_G \vec{x}_3 \end{aligned}$$

$$\bullet \theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) \quad \theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) \quad \vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_3$$

Hypothèses :

- On néglige l'effet de la pesanteur sur les pièces 1 et 2.
- On considère, compte-tenu des symétries, que l'hypothèse d'un problème dans le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ peut être retenue.
- Le pont a une masse de 325 tonnes. Le centre de gravité du pont est G .
- L'ensemble $\{1, 2\}$ est un vérin hydraulique à section circulaire dont la pression interne est notée p_v . La section utile du piston, notée S . Cela signifie donc que la liaison pivot glissant entre 1 et 2 est motorisée. On notera l'action de motorisation :

$$\{1 \xrightarrow{mot} 2\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}^{mot}} = F_v \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{M_{B,1 \rightarrow 2}^{mot}} = \vec{0} \end{cases}$$

- Les liaisons sont celles indiquées sur le schéma précédent, à savoir :

- une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ entre les solides 0 et 3 ;
- une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$ entre les solides 3 et 2 ;
- une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ entre les solides 0 et 1 ;
- une liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_2)$ entre les solides 1 et 2.

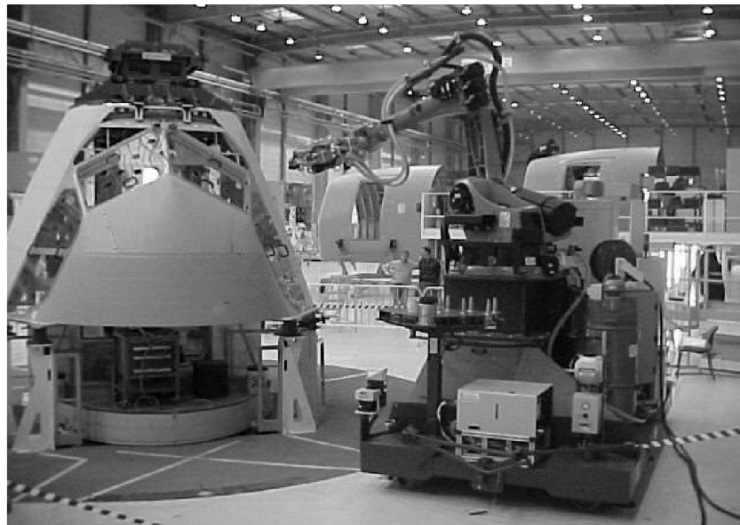
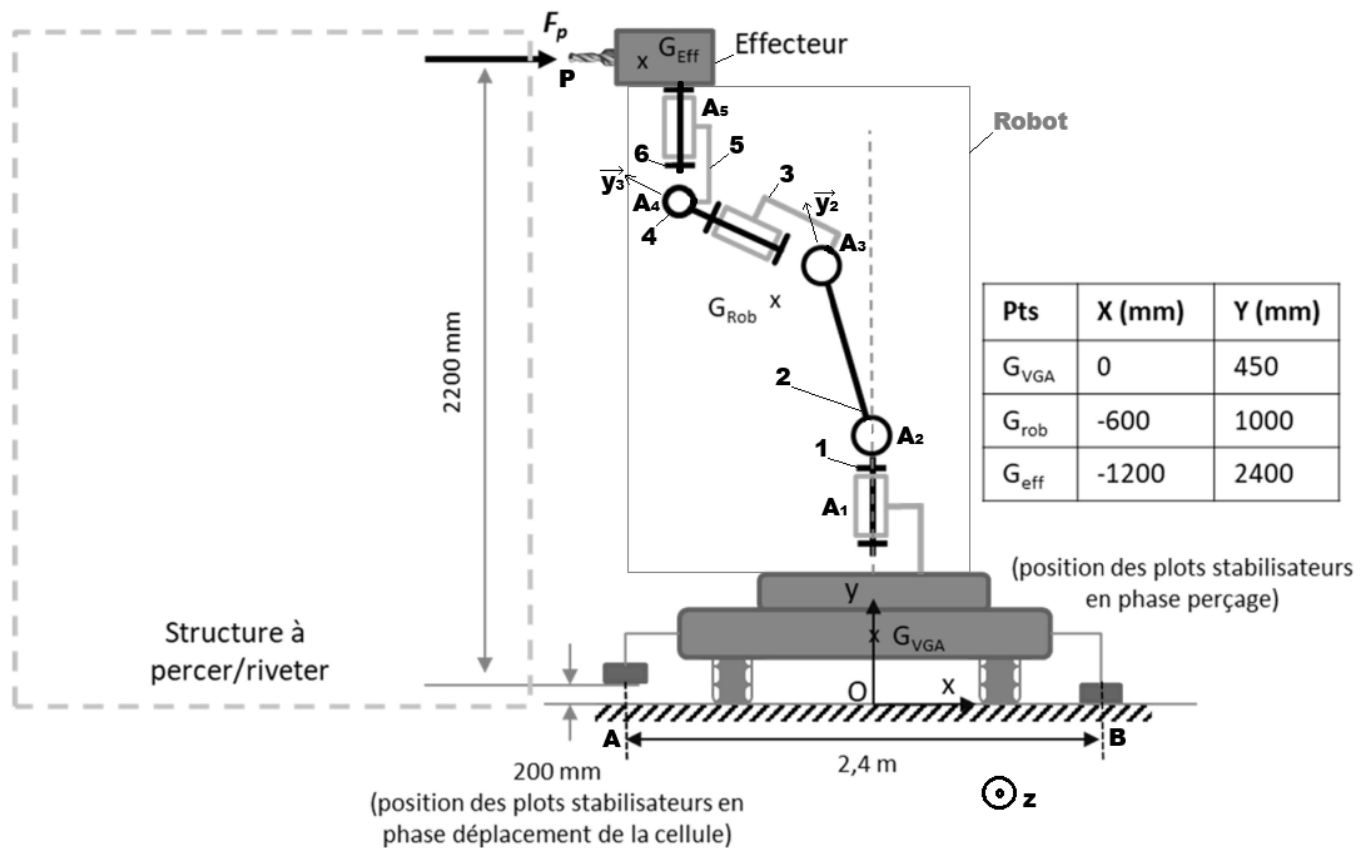
Question 1. Montrer que la résultante du torseur de l'action de 2 sur 3 est portée par le vecteur $\vec{y}_2$.

Question 2. Déterminer, à travers des isolements judicieux, la relation entre la pression dans le vérin p_v et les autres données du problème (masse, géométrie).

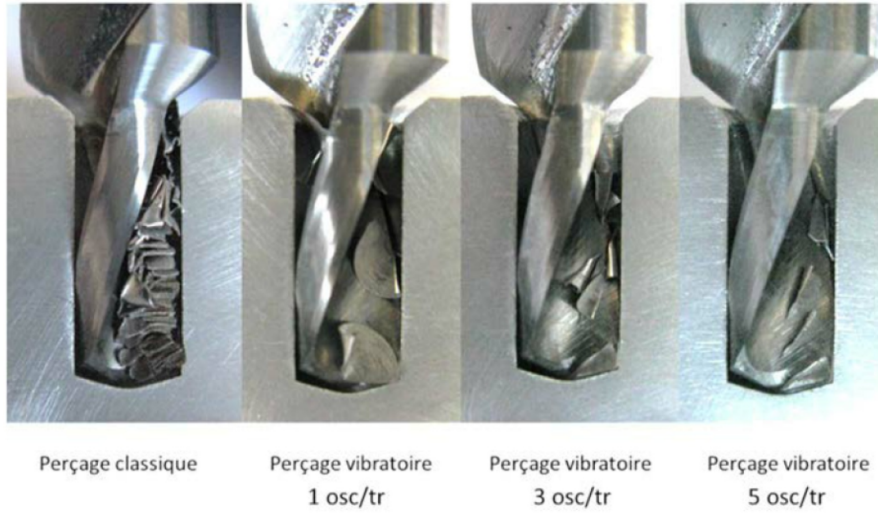
Question 3. Pour un vérin donné, quelle solution technologique pourrait être mise en place pour limiter la pression au sein de celui-ci ?

4 Cellule robotisée à plateforme mobile pour l'assemblage de structures d'avion ★★

Cet exercice étudiera une cellule robotisée mobile de nouvelle génération, destinée aux processus de perçage pour l'assemblage de structures aéronautiques. Elle est composée de plusieurs sous-systèmes : un véhicule guidé automatiquement (VGA), un robot anthropomorphe 6 axes (composé des solides 1 (en liaison pivot avec le VGA), 2, 3, 4, 5, 6) et un effecteur de perçage compact (encasté avec le solide 6 du robot) (voir schéma et photographie ci-dessous)



La qualité des surfaces des trous réalisés est également primordiale pour la tenue en fatigue des assemblages réalisés ultérieurement par rivetage. Ceci est d'autant plus important que l'on doit percer des empilements de matériaux très différents (alliages d'aluminium ou de titane, matériaux composites). Qu'il s'agisse de ce système robotisé ou d'autres moyens industriels, un des soucis majeurs aujourd'hui provient de la difficulté d'évacuation des copeaux pendant le perçage, qui conduit parfois à des problèmes de qualité. L'image ci-dessous montre le résultat de perçage avec différentes fréquences d'oscillations axiales du foret.



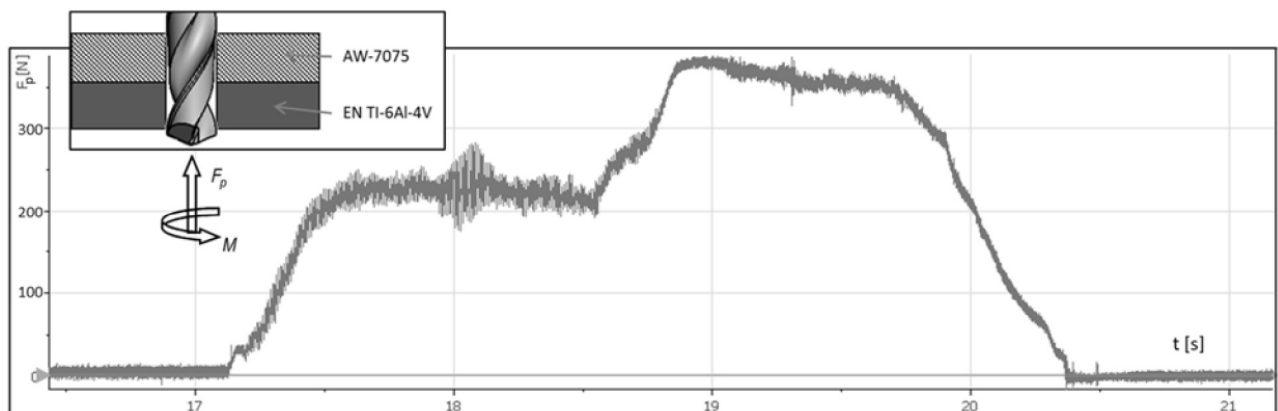
L'étude sera effectuée dans la configuration défavorable du robot en phase de travail (présentée avant avec les dimensions associées) ainsi que certaines caractéristiques de la cellule. On étudie ici la cellule en considérant le risque de basculement (glissement considéré impossible au niveau des plots de stabilisation). Les plots de stabilisation sont supposés être en contact ponctuel avec le sol en A et B de normale $\vec{y}$. On considère également que tous les éléments de la cellule robotisée sont indéformables.

On donne également :

- $\vec{AO} = \vec{OB} = \ell \cdot \vec{x}$.
- Pour le VGA : $m_{\text{VGA}} = 1250 \text{ kg}$ et $\vec{OG}_{\text{VGA}} = y_{\text{VGA}} \cdot \vec{y}$.
- Pour le robot : $m_{\text{rob}} = 2440 \text{ kg}$ et $\vec{OG}_{\text{rob}} = x_{\text{rob}} \cdot \vec{x} + y_{\text{rob}} \cdot \vec{y}$.
- Pour l'effecteur : $m_{\text{eff}} = 300 \text{ kg}$ et $\vec{OG}_{\text{eff}} = x_{\text{eff}} \cdot \vec{x} + y_{\text{eff}} \cdot \vec{y}$. On suppose que la structure exerce sur l'effecteur une force de perçage $\vec{F}_{\text{perçage}} = F_p \cdot \vec{x}$ en G_{eff} .
- Les valeurs des dimensions sont à lire sur le schéma.

Question 1. En considérant le risque de basculement de la cellule, calculer l'effort de perçage F_p maximal admissible.

On envisage le perçage d'un empilement multi-matériaux (aluminium puis titane). L'évolution de la force axiale lors du perçage est donnée ci-dessous :



Question 2. Le perçage est-il possible avec cette cellule robotisée ?

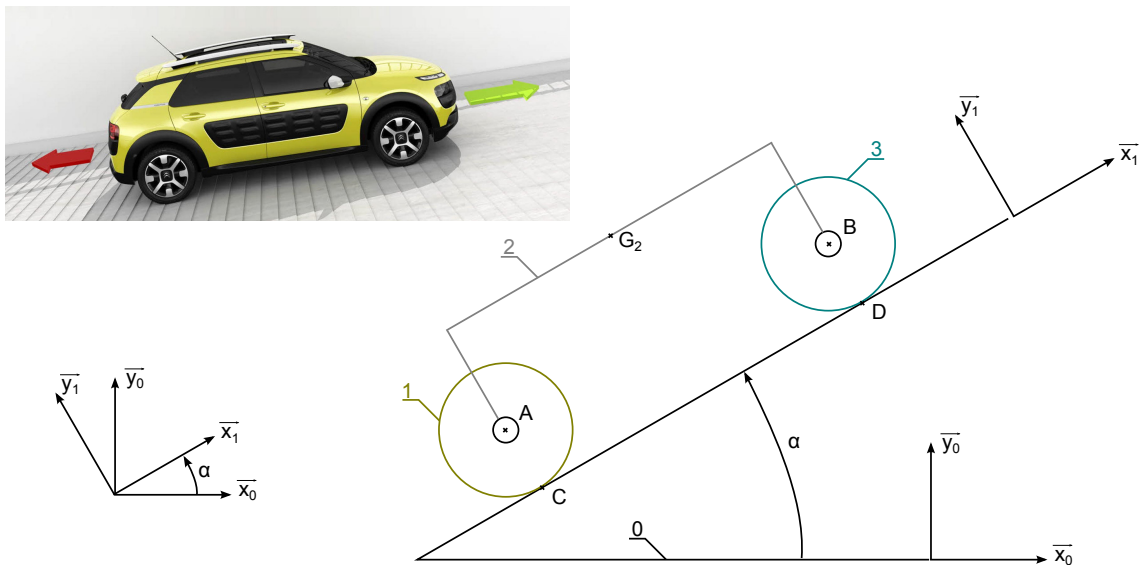
On cherche maintenant à dimensionner - dans cette configuration - la motorisation (moteur et réducteur) associée à la liaison pivot d'axe $(A_3, \vec{z})$ entre les solides 2 et 3. On note C_{23} , le couple exercé par le motoréducteur sur le solide 3. On donne également :

- $\overrightarrow{A_1A_2} = \ell_1 \cdot \vec{y}$ où $\ell_1 = 300$ mm, $m_1 = 332$ kg (masse de 1) et $\overrightarrow{A_1G_1} = \frac{\ell_1}{2} \cdot \vec{y}$ avec G_1 , le centre de gravité de la pièce 1.
- $\overrightarrow{A_2A_3} = \ell_2 \cdot \vec{y}_2$ où $\ell_2 = 600$ mm, $m_2 = 687$ kg (masse de 2) et $\overrightarrow{A_2G_2} = \frac{\ell_2}{2} \cdot \vec{y}_2$ avec G_2 , le centre de gravité de la pièce 2. $(\vec{y}, \vec{y}_2) = \theta_2 = 30^\circ$.
- $\overrightarrow{A_3A_4} = \ell_{34} \cdot \vec{y}_3$ où $\ell_{34} = 600$ mm, $m_{34} = 980$ kg (masse de {3,4}) et $\overrightarrow{A_3G_{34}} = \frac{\ell_{34}}{2} \cdot \vec{y}_3$ avec G_{34} , le centre de gravité de {3,4}. $(\vec{y}, \vec{y}_3) = \theta_3 = 70^\circ$.
- $\overrightarrow{A_4A_5} = \ell_{56} \cdot \vec{y}$ où $\ell_{56} = 600$ mm, $m_{56} = 441$ kg (masse de {5,6}) et $\overrightarrow{A_4G_{56}} = \frac{\ell_{56}}{2} \cdot \vec{y}$ avec G_{56} , le centre de gravité de {5,6}.
- $\overrightarrow{A_5G_{\text{eff}}} = -\ell_{\text{eff}} \cdot \vec{x}$ où $\ell_{\text{eff}} = 42$ mm.

Question 3. Déterminer la valeur de C_{23} en fonction de F_p notamment. Déterminer la valeur numérique maximale de $|C_{23}|$ en supposant que F_p suit l'évolution donnée sur la courbe précédente.

5 Stationnement d'un véhicule en pente ★★★

On s'intéresse ici à l'étude du stationnement d'un véhicule sur plan incliné. Lors du stationnement, l'utilisateur actionne le frein à main de la voiture. Ce frein à main freine les roues arrières de la voiture. On souhaite déterminer ici le couple de freinage nécessaire pour maintenir le véhicule à l'arrêt. On s'intéressera d'abord au cas d'une voiture seule puis au cas d'une voiture tractant une remorque (ou une caravane).



La figure ci-dessus représente le modèle utilisé pour résoudre le problème. Les pièces sont notées de la manière suivante :

- 0 : route

- 1 : roues arrières
- 2 : châssis de la voiture
- 3 : roues avant

Les hypothèses suivantes sont réalisées :

- le problème est plan ;
- les liaisons entre les roues et le châssis sont des liaisons pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ pour les roues arrières et $(B, \vec{z}_0)$ pour les roues avant ;
- les contacts roues/sol sont des liaisons sphère-plan ;
- toutes les liaisons sont parfaites hormis les liaisons entre le sol et les roues qui sont des liaisons avec frottement respectant les lois de Coulomb (avec un coefficient route/sol noté $f = 0.8$) ;
- seul le poids du châssis, appliqué en G_2 , est pris en compte (la masse de ce châssis est notée $M = 2200$ kg) ;
- le frein à main exerce un couple de freinage modélisé par le torseur suivant :

$$\{2 \xrightarrow{\text{frein}} 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{2 \xrightarrow{\text{frein}} 1} = \vec{0} \\ \vec{M}_{A, 2 \xrightarrow{\text{frein}} 1} = C_f \vec{z} \end{cases}$$

Les données géométriques du problème sont les suivantes :

- les roues ont un rayon $r = 0.3$ m ;
- $\vec{AB} = L \cdot \vec{x}_1$ avec $(L = 3 \text{ m})$; $\vec{AG}_2 = \frac{L}{2} \vec{x}_1 + h \vec{y}_1$ avec $(h = 0.5 \text{ m})$.

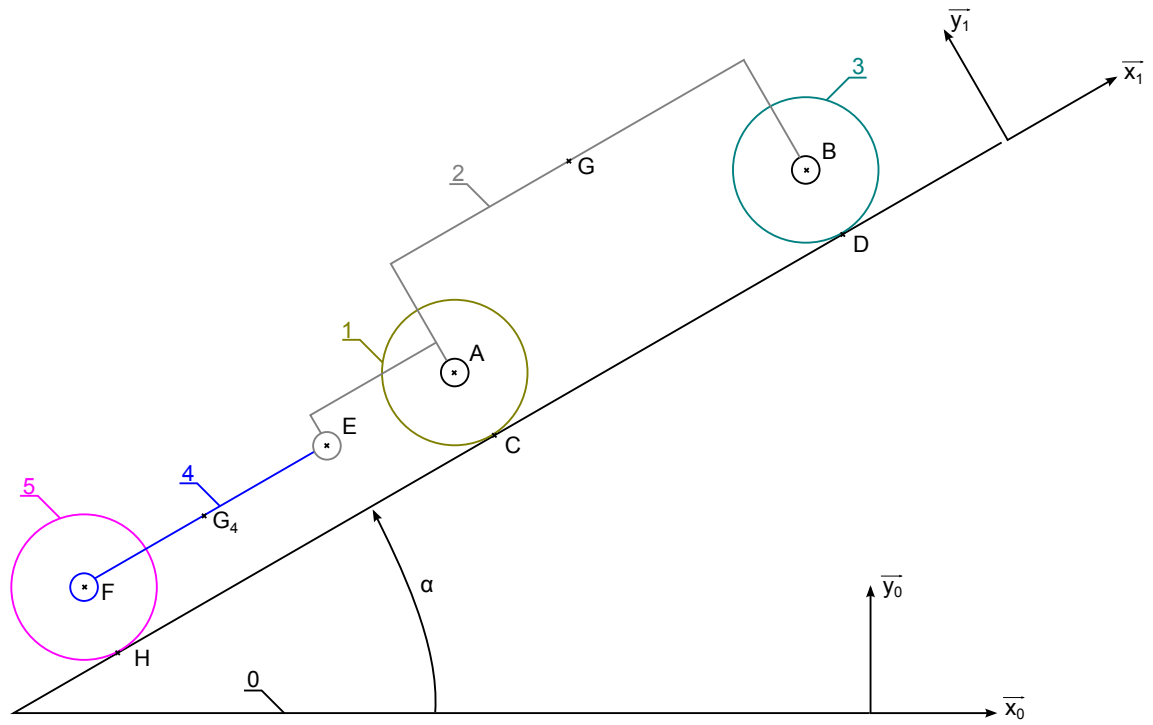
Question 1. En isolant la roue avant, et en écrivant le théorème adéquat, montrer que l'action du sol sur la roue avant n'a pas de composante tangentielle.

Question 2. En se plaçant à la limite du glissement, déterminez la pente maximale sur laquelle la voiture peut rester sans glisser.

Question 3. Dans cette configuration, déterminer le couple de freinage à fournir pour maintenir la voiture en équilibre.

On considère maintenant que la voiture tracte une remorque chargée d'une masse totale de $m = 1000$ kg. Cette remorque est composée d'un châssis noté 4 et d'une roue notée 5. Le point G_4 , centre de gravité de la remorque, est défini de telle sorte que $\vec{AE} = \vec{EG}_4 = \vec{G}_4\vec{F} = -l\vec{x}_1$ avec $l = 1$ m. On néglige la masse de la roue 5.

La liaison entre 4 et 5 ainsi que celle entre 1 et 4 sont des liaisons pivot parfaites. La liaison entre la roue 5 et le sol est une liaison sphère-plan avec frottement de type frottement de Coulomb.



Question 4. Reprendre l'étude réalisée dans les questions 2 et 3.