

Dérivation numérique

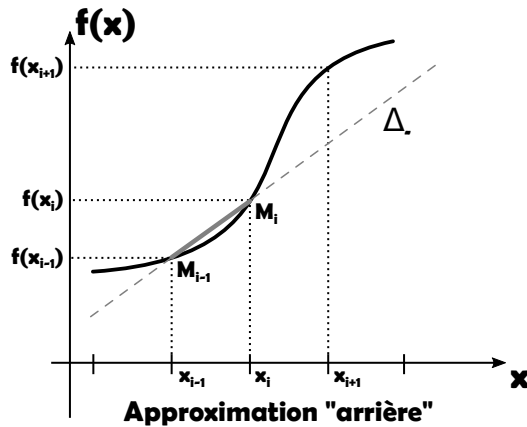
On cherche à dériver numériquement une fonction f . Cela revient calculer, de manière approximée, la pente de la courbe représentative de la fonction.

Il existe plusieurs méthodes d'approximation dites "arrière" ou "avant". On discrétise l'axe des abscisses (variable x) et on note dx un "petit" incrément sur l'axe des abscisses de telle sorte que $x_{i+1} - dx = x_i = x_{i-1} + dx$. On note également M , un point de la courbe étudiée ayant pour coordonnées $(x, f(x))$.

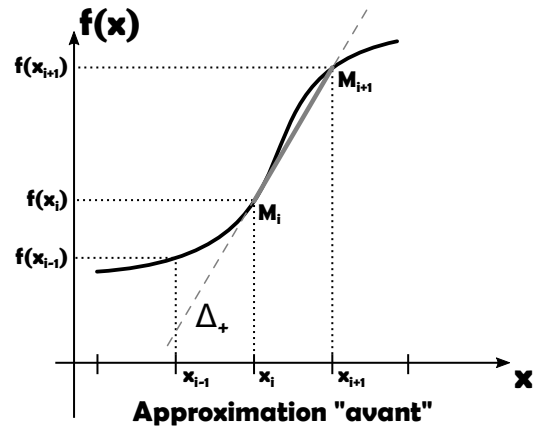
Dériver la fonction f numériquement revient à calculer, pour chaque x_i , la pente de la droite :

- Δ_- entre les points M_{i-1} et M_i (approximation "arrière") ;
- Δ_+ entre les points M_i et M_{i+1} (approximation "avant").

On a donc :

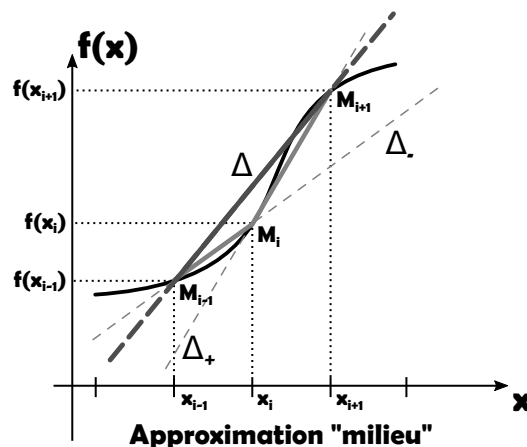


$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{dx}$$



$$\frac{df}{dx}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{dx}$$

Une autre méthode consiste à calculer une pente moyenne entre M_{i-1} et M_{i+1} . Dans ce cas, on aura :



$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x_i) &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{dx} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{dx} \right] \\ &\approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2 \cdot dx} \end{aligned}$$

Exercice d'application

On définit la fonction f telle que : $f(x) = \cos(x)$. On veut calculer et tracer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Question 1. Définir la fonction $f(x)$.

Question 2. Représenter cette fonction pour sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On pourra s'aider des instructions ci-dessous :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a = 0
b = np.pi/2
n = 100 ## nombre de subdivisions

def f(x):
    ....

lx = [i*dx for i in range(0, ..... )] ## lx est la liste des xi

lf = [..... for xi in lx]

plt.plot(..... , .....)

```

Question 3. Écrire les instructions permettant de calculer et tracer la dérivée de la fonction f par :

- la méthode dite "arrière";
- la méthode dite "avant";
- la méthode dite "milieu".