

Résolution d'un problème de dynamique "simple"

PSI - MP : Lycée Rabelais



Pré-requis



Cours sur la dynamique (dans des cas particuliers !)



Objectifs



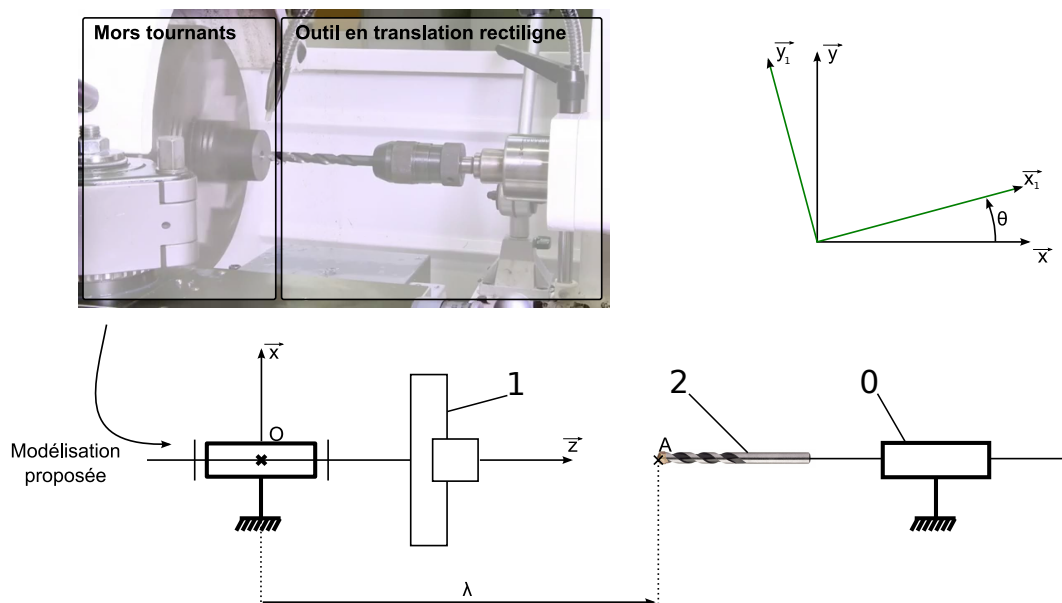
Savoir déterminer une équation de mouvement



Savoir déterminer une action mécanique dans le cas d'un problème de dynamique

1 Loi de commande pour une opération de perçage ★

On s'intéresse ici à une opération de perçage sur un tour. Ce tour peut se décomposer en deux sous-systèmes : la partie composée des mors (et de la pièce à usiner) notée 1 en rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$ et la partie composée de l'outil notée 2 en translation suivant la direction $\vec{z}$. Le schéma cinématique du mécanisme est donné ci-dessous :



On suppose dans cette étude que l'outil n'est pas en contact avec la pièce à usiner.

Les actions mécaniques s'exerçant sur le système sont les suivantes :

- La liaison pivot est supposée présenter des frottements visqueux (coefficient de frottement visqueux k_p) et des frottements secs notés C_r .

- La liaison glissière est supposée présenter des frottements visqueux (coefficient de frottement visqueux k_g) et des frottements secs notés F_r .
- Deux moteurs permettent respectivement de mettre en rotation les mors et de mettre en translation l'outil :

$$\{0 \xrightarrow{mot} 1\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 1}^{mot}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{mot}} = C_m \vec{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \{0 \xrightarrow{mot} 2\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 2}^{mot}} = F \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 2}^{mot}} = \vec{0} \end{cases}$$

On cherche à déterminer **les équations de mouvement du système**. L'équation du mouvement est une équation mathématique décrivant le mouvement d'un objet physique. En général, l'équation du mouvement comprend l'accélération de l'objet en fonction de sa position, de sa vitesse, de sa masse et de toutes variables affectant l'une de celle-ci.

On considère :

- Une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liée au bâti, et $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ une base liée à la pièce à usiner avec $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ et $\vec{z} = \vec{z}_1$.
- G_1 , le centre d'inertie de l'ensemble $1 = \{\text{mors} + \text{pièce}\}$, tel que $\overrightarrow{OG_1} = L_1 \vec{z}$ où L_1 est une constante. On notera J_1 le moment d'inertie de 1 autour de l'axe $(O, \vec{z})$ et m_1 sa masse.
- G_2 , le centre d'inertie de l'outil, tel que $\overrightarrow{OG_2} = (L_2 + \lambda) \vec{z}$ où L_2 est une constante et λ une fonction du temps. On notera J_2 le moment d'inertie de l'outil autour de l'axe $(O, \vec{z})$ et m_2 sa masse.

Question-préliminaire : Écrire les torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$ et $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$.

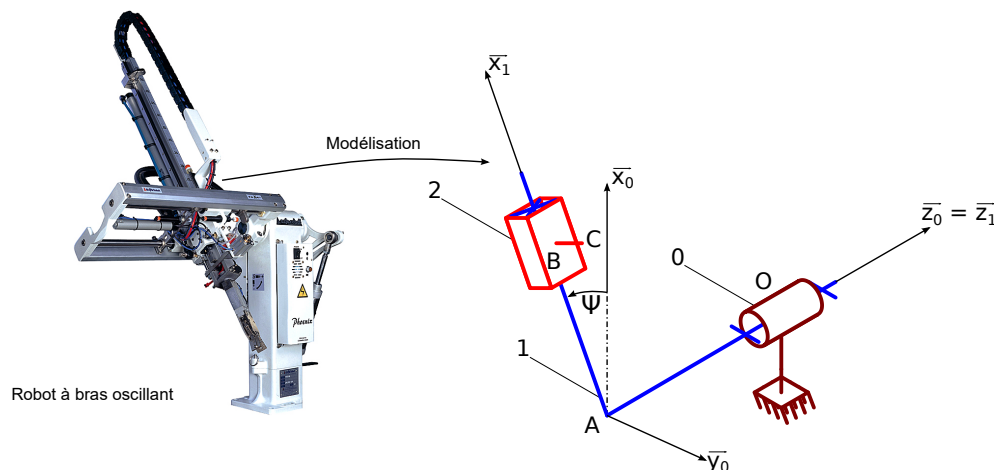
Question-cours : Écrire les torseurs des actions mécaniques transmissibles pour les liaisons et discuter du signe de chaque terme associé aux frottements.

Question 1. Déterminer l'équation de mouvement de l'ensemble $\{\text{mors} + \text{pièce}\}$. Tracer ensuite l'allure de $\dot{\theta}$ pour un échelon de couple moteur d'amplitude C_m^0 .

Question 2. Déterminer l'équation de mouvement de l'outil. Tracer ensuite l'allure de $\dot{\lambda}$ pour un échelon de force d'amplitude F^0 .

2 Robot à bras oscillant ★★

On propose d'étudier la dynamique du bras de robot suivant :



Géométrie du problème :

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au support (0) d'un bras de robot. $\vec{x}_0$ représente ici la verticale ascendante.

Le solide (1) a un mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z}_0)$ et d'angle ψ par rapport à (0). On définit donc $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié au solide (1) avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$.

Le solide (2) a un mouvement de translation de direction $\vec{x}_1$ par rapport à (1).

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié au solide (2) avec $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$ et $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$.

La géométrie du système est donnée par $\vec{OA} = -a \vec{z}_0$; $\vec{AB} = x \vec{x}_1$; $\vec{BC} = -b \vec{z}_0$.

x et ψ sont les seules variables qui dépendent du temps dans ce problème.

Données inertielles du problème :

- Solide 1 de masse m_1 et de centre d'inertie A . On note I_1 son moment d'inertie autour de l'axe $(O, \vec{z}_1)$.
- Solide 2 de masse m_2 et de centre d'inertie B . On suppose que ce solide peut-être assimilé à une masse ponctuelle, cela signifie donc que son moment d'inertie autour de l'axe $(O, \vec{z}_1)$ s'écrira $I_2 = m_2 \cdot x^2$.

Modélisation des actions mécaniques :

- Ce robot est motorisé. Les actions motrices sont notées :

$$\{0 \xrightarrow{mot} 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1}^{mot} = \vec{0} \\ \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1}^{mot} = C_{01} \vec{z}_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \{1 \xrightarrow{mot} 2\} = \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2}^{mot} = F_{12} \vec{x}_1 \\ \vec{M}_{B,1 \rightarrow 2}^{mot} = \vec{0} \end{cases}$$

- Les liaisons sont des liaisons imparfaites avec frottement fluide. On notera f_p (en N.m.s), le coefficient de frottement fluide dans la liaison pivot entre 0 et 1. On notera également f_g (en N.s/m), le coefficient de frottement fluide dans la liaison glissière entre 1 et 2.

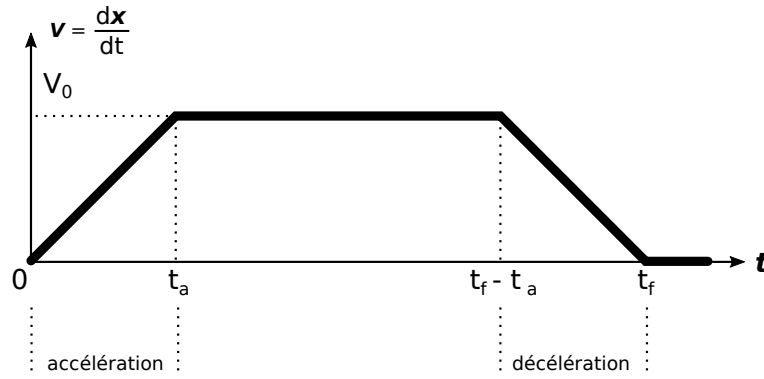
- On suppose ici que les mouvements de rotation du solide 1 par rapport à 0 et de déplacement du solide 2 par rapport à 1 ne sont jamais simultanés.

Objectif : On cherche ici à décrire le mouvement du robot lorsque les axes sont motorisés. On dira alors que l'on cherche à **déterminer les équations de mouvement**.

Étude du système dans le cas où $\dot{\psi} = 0$.

Question 1. Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire la relation entre x (et ses dérivées successives) et les actions mécaniques. Expliquer qualitativement à quoi correspond chacun des termes de cette équation de mouvement.

On souhaite que $\dot{x}$ suive une évolution en trapèze de vitesse de la manière suivante :



Question 2. Tracer l'évolution théorique de F_{12} en fonction du temps (on supposera que $\psi \in [0, \pi/2]$).

Étude du système dans le cas où $\dot{x} = 0$.

Question 3. Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire la relation entre ψ (et ses dérivées successives) et les actions mécaniques. Expliquer qualitativement à quoi correspond chacun des termes de cette équation de mouvement.

Étude du système dans le cas général.

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les mouvements de rotation du solide 1 par rapport à 0 et de déplacement du solide 2 par rapport à 1 peuvent être simultanés, on peut montrer que :

$$F_{12} = m_2 \cdot g \cdot \cos(\psi) + m_2 \cdot \ddot{x} + f_g \cdot \dot{x} - m_2 \cdot x \cdot \dot{\psi}^2$$

$$C_{01} = -m_2 \cdot g \cdot x \cdot \sin(\psi) + (m_2 \cdot x^2 + I_1) \cdot \ddot{\psi} + f_p \cdot \dot{\psi} + 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\psi}$$

Question 4. Commenter les résultats obtenus.