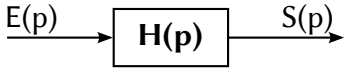
Centre d'intérêt 2

Systèmes asservis

Analyse fréquentielle

PSI - MP : Lycée Rabelais

1 Réponse fréquentielle pour une entrée sinusoïdale



Soit une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$ dans le domaine temporel ; respectivement $E(p)$ et $S(p)$ dans le domaine de Laplace. On se limite ici à l'étude des Systèmes Continus Linéaires et Invariants (SLCI), ce qui permet de définir la fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.

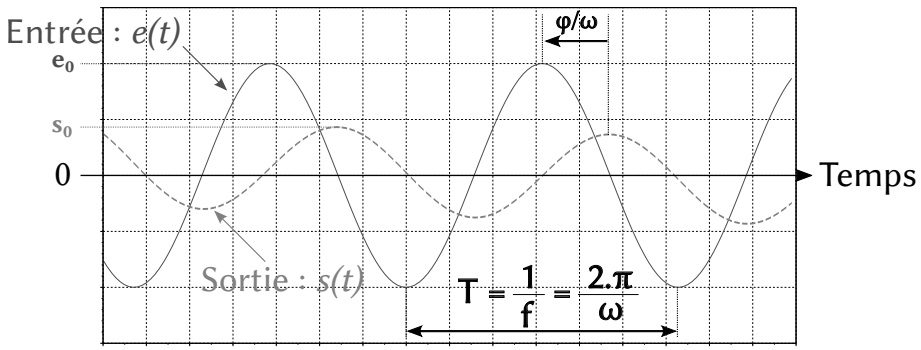
On appellera **réponse harmonique**, la sortie $s(t)$ d'un système en **régime permanent** et en réponse à une **entrée périodique** $e(t)$. Si l'entrée est un signal sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude e_0, on peut donc écrire :

$$e(t) = e_0 . \sin(\omega\, t)$$

Dans ces hypothèses, il est alors possible de montrer, qu'**en régime établi**, la sortie $s(t)$ sera de la forme :

$$s(t) = s_0 . \sin(\omega\, t + \varphi)$$

Le signal de sortie sera donc de **même pulsation** que le signal d'entrée. Par contre, la **phase** φ et l'**amplitude** s_0 seront **des fonctions du système et de la pulsation**.



Pour des entrées périodiques, il est donc possible de caractériser l'effet du système uniquement avec deux grandeurs :

- Le rapport des amplitudes $\frac{s_0}{e_0}$ que l'on appellera gain du système et qui représente l'amplification effectuée par le système.
- Le déphasage φ appelé phase du système qui représente le décalage de la sortie par rapport à l'entrée.

Pour calculer le gain et la phase, on utilise la variable complexe $p = j\omega$. Le gain sera donc égal au module de $H(j\omega)$ et la phase sera égale à l'argument de $H(j\omega)$.

On aura donc :

À retenir

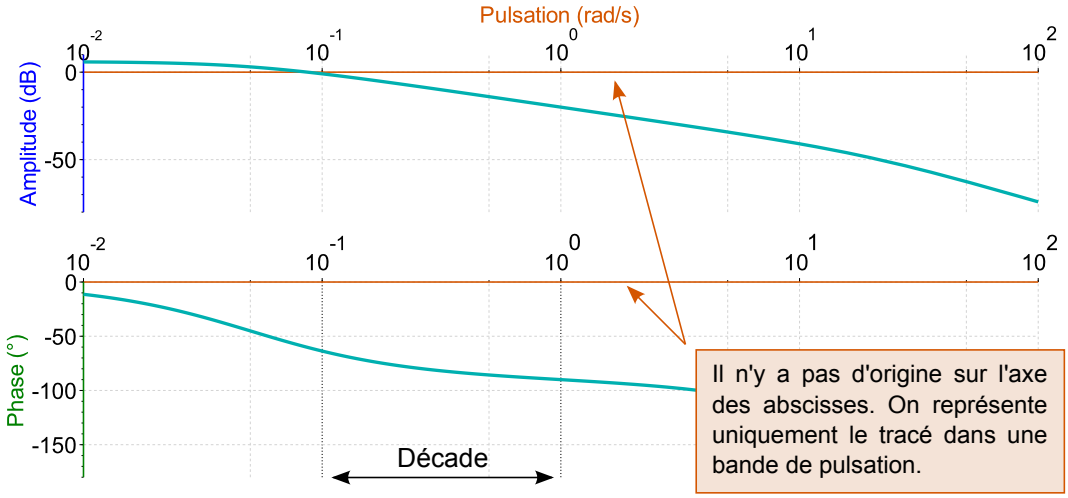
$$\text{Gain} = \frac{\text{Amplitude de la sortie}}{\text{Amplitude de l'entrée}} = |H(j\omega)| \qquad \text{Phase} = arg(H(j\omega))$$

Le gain et la phase sont des fonctions du système et de la pulsation.

2 Lieu de transfert et diagramme de Bode

On appelle **lieu de transfert** toute représentation graphique du comportement fréquentiel de $H(j\omega)$ à l'aide de diagrammes. Le seul diagramme au programme est le **diagramme de Bode**.

Ce diagramme est constitué de deux courbes. La première représente le **gain du système en décibels** en fonction de la **pulsation** (en échelle log). La seconde courbe représente la **phase** φ (souvent en degrés) en fonction de la **pulsation** (toujours en échelle log).



3 Réponse temporelle d'un système

3.1 Résultat préliminaire - généralisation

On considère une fonction de transfert $H(p)$ telle que :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1\ p + ... + a_n\ p^n}{1 + b_1\ p + ... + b_d\ p^d}$$

On admet que toute fonction de transfert pourra se mettre sous la forme factorisée suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod_i (1 + T_i\ p)}{\prod_j (1 + T_j\ p)} \frac{\prod_k (1 + \frac{2\xi_k}{\omega_{0_k}}\ p + \frac{1}{\omega_{0_k}^2}\ p^2)}{\prod_l (1 + \frac{2\xi_l}{\omega_{0_l}}\ p + \frac{1}{\omega_{0_l}^2}\ p^2)}$$

Ce qui revient à écrire la fonction de transfert de la manière suivante :

$$H(p) = K\ \frac{1}{p^{\alpha}}\ \prod_i \left[\frac{1}{1+T_i\ p}\right]^{-1}\ \prod_j \left[\frac{1}{1+T_j\ p}\right]\ \prod_k \left[\frac{1}{1+\frac{2\xi_k}{\omega_{0_k}}\ p+\frac{1}{\omega_{0_k}^2}\ p^2}\right]^{-1}\ \prod_l \left[\frac{1}{1+\frac{2\xi_l}{\omega_{0_l}}\ p+\frac{1}{\omega_{0_l}^2}\ p^2}\right]$$

Cela permet simplement de montrer que toute fonction de transfert pourra se décomposer comme le produit d'un gain, d'intégrateurs, de systèmes du 1er ordre, de systèmes inverses du 1er ordre, de systèmes du 2ème ordre et de systèmes inverses du 2ème ordre.

3.1.1 Calcul du gain

Il est donc possible d'écrire :

$$|H(j\omega)| = |K|\ \left|\frac{1}{j\omega}\right|^{\alpha}\ \prod_i \left|\frac{1}{1+T_i\ j\omega}\right|^{-1}\ \prod_j \left|\frac{1}{1+T_j\ j\omega}\right|\ \prod_k \left|\frac{1}{1+\frac{2\xi_k}{\omega_{0_k}}\ j\omega+\frac{1}{\omega_{0_k}^2}\ (j\omega)^2}\right|^{-1}\ \prod_l \left|\frac{1}{1+\frac{2\xi_l}{\omega_{0_l}}\ j\omega+\frac{1}{\omega_{0_l}^2}\ (j\omega)^2}\right|$$

En passant en décibel, on pourra donc écrire :

$$G_{dB} = 20.log\left(|H(j\omega)|\right)$$

Ce qui équivaut donc à :

$$G_{dB} = 20.log|K|\ +\ \sum_{\alpha} 20.log\left|\frac{1}{j\omega}\right| - \sum_i 20.log\left|\frac{1}{1+T_i\ j\omega}\right|\ +\ \sum_j 20.log\left|\frac{1}{1+T_j\ j\omega}\right|$$
$$-\ \sum_k 20.log\left|\frac{1}{1+\frac{2\xi_k}{\omega_{0_k}}\ j\omega+\frac{1}{\omega_{0_k}^2}\ (j\omega)^2}\right|\ +\ \sum_l 20.log\left|\frac{1}{1+\frac{2\xi_l}{\omega_{0_l}}\ j\omega+\frac{1}{\omega_{0_l}^2}\ (j\omega)^2}\right|$$

Que l'on peut écrire de manière plus simple sous la forme :

$$G_{dB} = G_{dB}^{\text{Gain pur}}\ +\ G_{dB}^{\text{Intégrateur}}\ +\ G_{dB}^{\text{Dérivateur}}\ +/-\ G_{dB}^{1^{er}\text{ ordre}}\ +/-\ G_{dB}^{2^{ème}\text{ ordre}}$$

Pour obtenir la fonction transfert d'un système, il suffira donc de sommer les gains des fonctions de transfert élémentaires.

3.1.2 Calcul de la phase

Concernant la phase, on effectue exactement la même démarche en partant de la définition :

$$\varphi = arg\left(H(j\omega)\right)$$

Ce qui implique donc directement :

$$\varphi = arg\,(K) \; + \; \sum_{\alpha} arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) - \; \sum_{i} arg\left(\frac{1}{1+T_i\;j\omega}\right) \; + \; \sum_{j} arg\left(\frac{1}{1+T_j\;j\omega}\right)$$
$$- \; \sum_{k} arg\left(\frac{1}{1+\frac{2\xi_k}{\omega_{0_k}}\;j\omega+\frac{1}{\omega_{0_k}^2}\;(j\omega)^2}\right) \; + \; \sum_{l} arg\left(\frac{1}{1+\frac{2\xi_l}{\omega_{0_l}}\;j\omega+\frac{1}{\omega_{0_l}^2}\;(j\omega)^2}\right)$$

Ou encore :

$$\varphi = \; \varphi^{\text{Gain pur}} \; + \; \varphi^{\text{Intégrateur}} + \; \varphi^{\text{Dérivateur}} + / - \; \varphi^{1^{\text{er}}\text{ ordre}} \; + / - \; \varphi^{2^{\text{ème}}\text{ ordre}}$$

Ici aussi, pour obtenir la phase, il suffira de sommer les phases des différentes fonctions de transfert élémentaires.

3.2 Diagrammes de Bode des systèmes élémentaires

3.2.1 Gain pur

Fonction de transfert : $H_p(p) =$ ..... donc $H_p(j.\omega) =$ .....

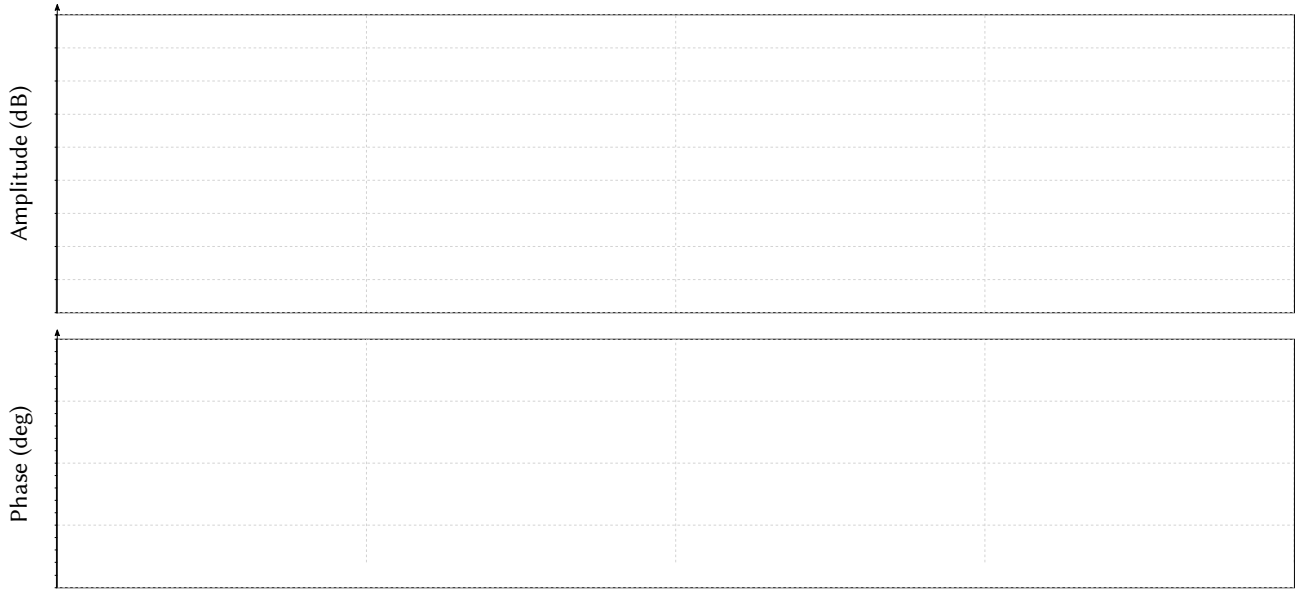
Calcul du gain :

$G_{dB_p}(\omega) =$ .....

Calcul de la phase :

$\varphi_p(\omega) =$ .....

Diagrammes de Bode :



3.2.2 Intégrateur pur avec gain unitaire

Fonction de transfert : $H_i(p) =$ ..... donc $H_i(j.\omega) =$ .....

Calcul du gain :

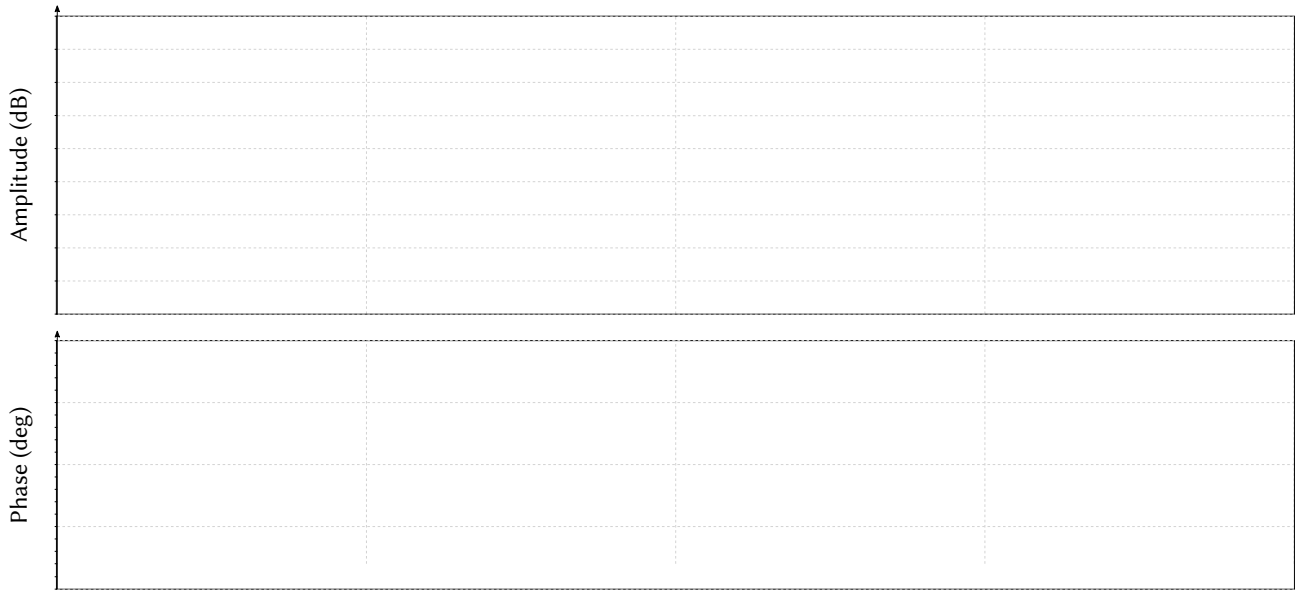
$|H_i(j.\omega)| =$ .....

$G_{dB_i}(\omega) =$ .....

Calcul de la phase :

$\varphi_i(\omega) =$ .....

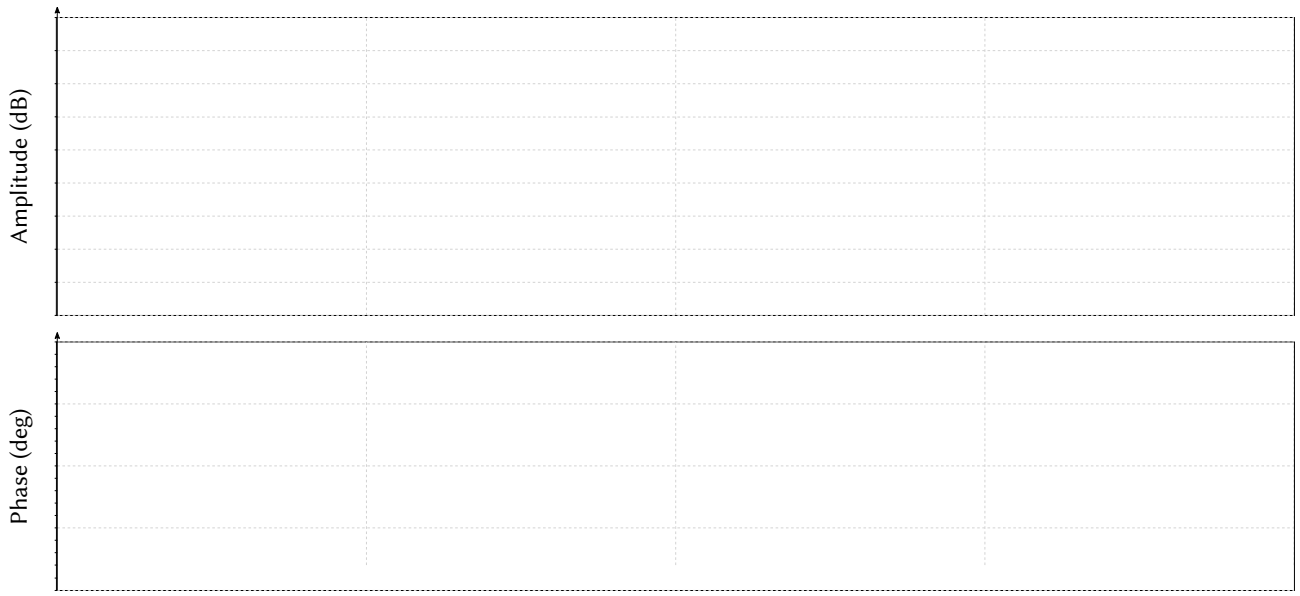
Diagrammes de Bode :



3.2.3 Dérivateur pur avec gain unitaire

Fonction de transfert : $H_d(p) =$ ..... = ...

Diagrammes de Bode :



3.2.4 Intégral pur de gain K

Fonction de transfert : $H_{Ki}(p) =$ .....

Calcul du gain :

$|H_{Ki}(j\omega)| =$ .....

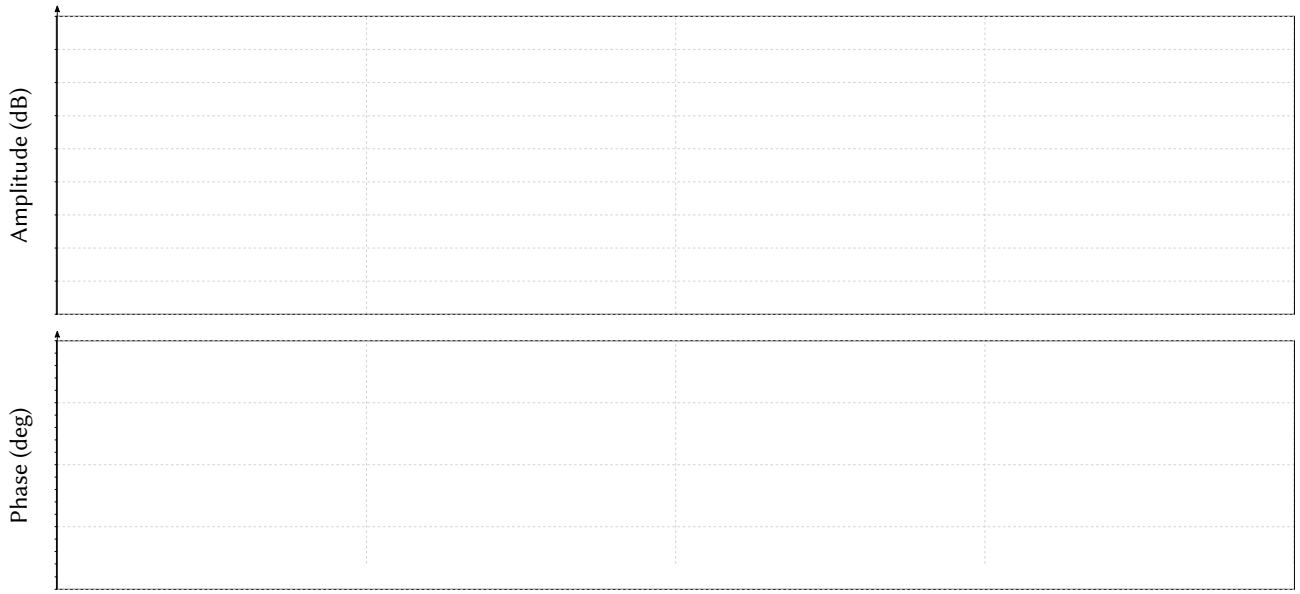
$G_{dB_{Ki}}(\omega) =$ .....

Calcul de la phase :

$\varphi_{Ki}(j\omega) =$ .....

$\varphi_{Ki}(j\omega) =$ .....

Diagrammes de Bode :



3.2.5 Système du 1er ordre

Fonction de transfert : $H_1(p) =$ .....

$H_1(j\omega) =$ .....

Calcul du gain :

- $\lim\limits_{\omega \to 0} G_{dB_1}(\omega) =$ .....
- $G_{dB_1}(\omega) \underset{\omega \to \infty}{\sim}$ .....
- $G_{dB_1}(\omega = 1/\tau) =$ .....

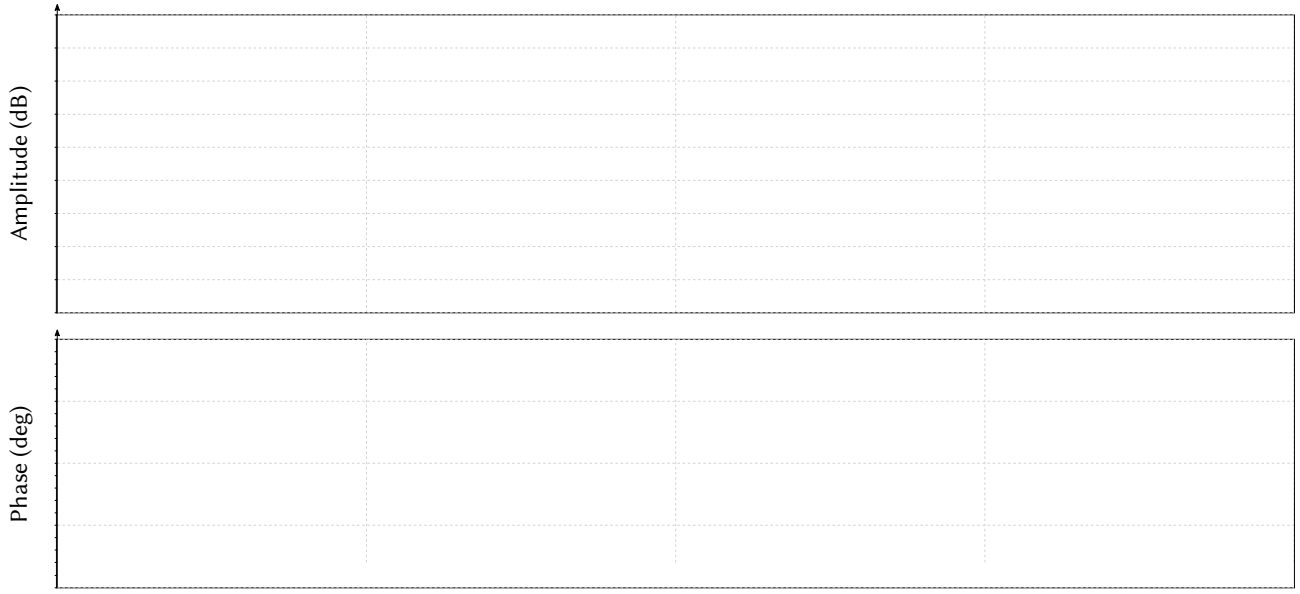
$$|H_1(j\omega)| = \text{.....}$$
$$G_{dB_1}(\omega) = \text{.....}$$

Calcul de la phase :

- $\lim\limits_{\omega \to 0} \varphi_1(\omega) =$ .....
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} \varphi_1(\omega) =$ .....
- $\varphi_1(\omega = 1/\tau) =$ .....

$$\varphi_1(\omega) = \text{.....}$$
$$\varphi_1(\omega) = \text{.....}$$

Diagrammes de Bode :



3.2.6 Système du 2ème ordre

Fonction de transfert : $H_2(p) =$ .....

$$H_2(j\omega) = \text{.....}$$

Calcul du gain :

- $\lim\limits_{\omega \to 0} G_{dB_2}(\omega) =$ .....
- $G_{dB_2}(\omega) \underset{\omega \to \infty}{\sim} =$ .....
- $G_{dB_2}(\omega = \omega_0) =$ .....

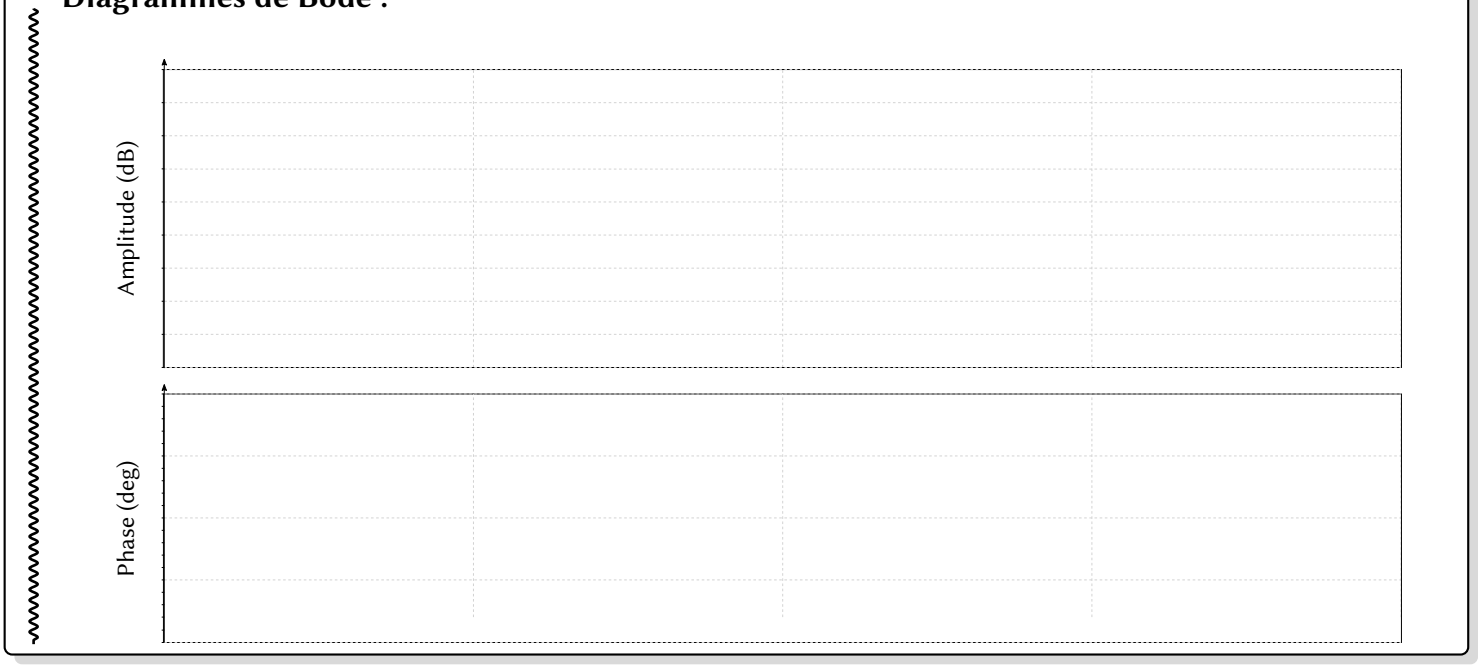
$$|H_2(j\omega)| = \text{.....}$$

$$G_{dB_2}(\omega) = \text{.....}$$

Calcul de la phase :

- $\lim\limits_{\omega \to 0} \varphi_2(\omega) =$ .....
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} \varphi_2(\omega) =$ .....
- $\varphi_2(\omega = \omega_0) =$ .....

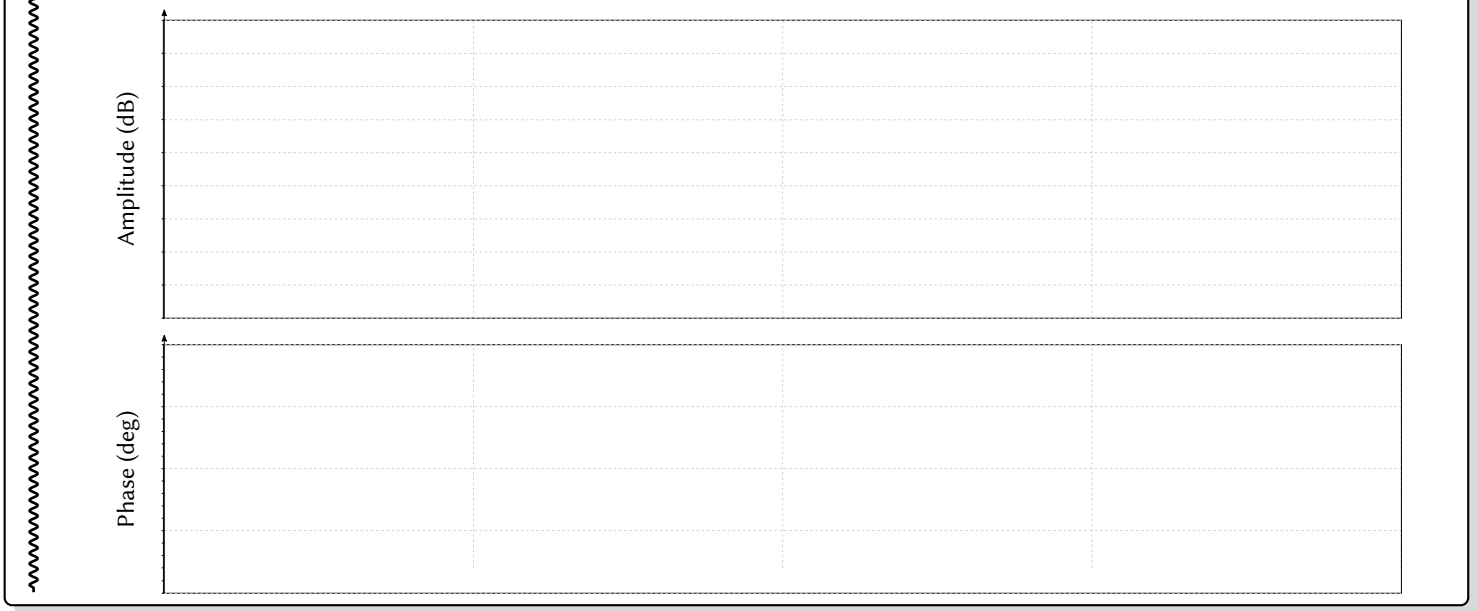
Diagrammes de Bode :



Cas faiblement amorti ($\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$) : Il est possible de montrer que si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors la dérivée du dénominateur de $|H_2(j\omega)|$ s'annule pour $\omega_m = \omega_0.\sqrt{1-2\xi^2}$. La courbe de gain présentera donc un maximum en ω_m. Cette pulsation sera appelée **pulsation de résonance**. Dans ce cas, on aura :

$$G_{dB_2}(\omega = \omega_m) = 20.log\left(\frac{K}{2\,\xi\,\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Diagrammes de Bode :



Lorsque le système est très faiblement amorti et que la résonance est bien marquée ($\xi \lesssim 0.2$), la valeur du maximum est très proche de la valeur en ω_0. Or la valeur en ω_0 est très simple à déterminer :

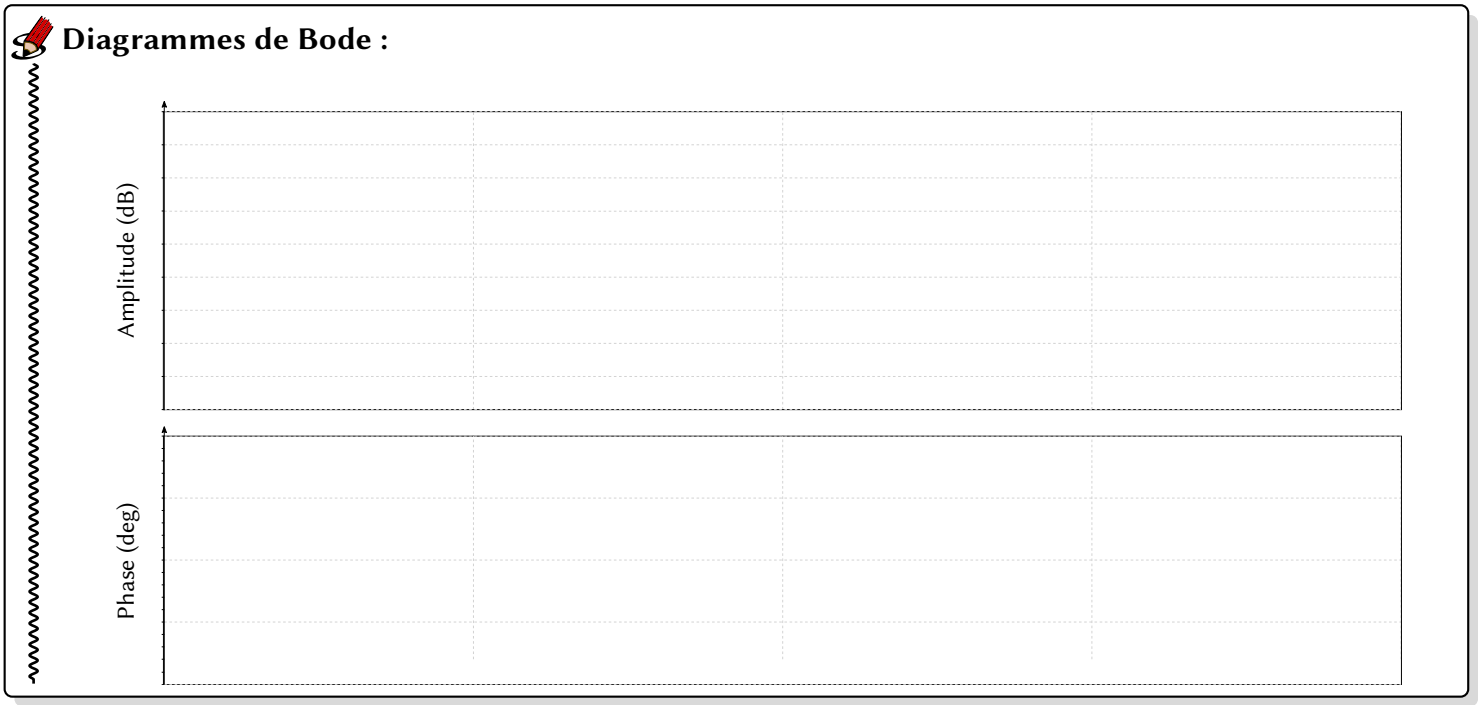
$$G_{dB_2}(\omega = \omega_0) = 20.log\left(\frac{K}{2\ \xi}\right)$$

Cela permet de tracer (ou d'identifier) très simplement la courbe pour un amortissement faible. On définira souvent le coefficient de surtension (ou facteur de résonance) par :

$$Q_r = \frac{|H_2(j\omega = j\omega_m)|}{|H_2(j\omega = 0)|} = \frac{1}{2\ \xi\ \sqrt{1-\xi^2}}$$

Cas intermédiaire ($\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi \leq 1$) : Dans ce cas, il n'y a pas de résonance.

Diagrammes de Bode :



Cas fortement amorti ($1 < \xi$) : Ici également, il n'y a pas de résonance mais dans ce cas, les deux racines du dénominateur (que l'on appellera pôles dans la suite du cours) sont réelles. On peut donc mettre la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$H_2(j\omega) = \frac{K}{(1 + T_1\ j\ \omega)(1 + T_2\ j\ \omega)} \qquad \text{avec } T_1 > T_2 \text{ et } \omega_2 = 1/T_2 > \omega_1 = 1/T_1$$

La fonction de transfert est donc le produit de deux fonctions de transfert du 1er ordre. On aura donc :

$$G_{dB_2}(\omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

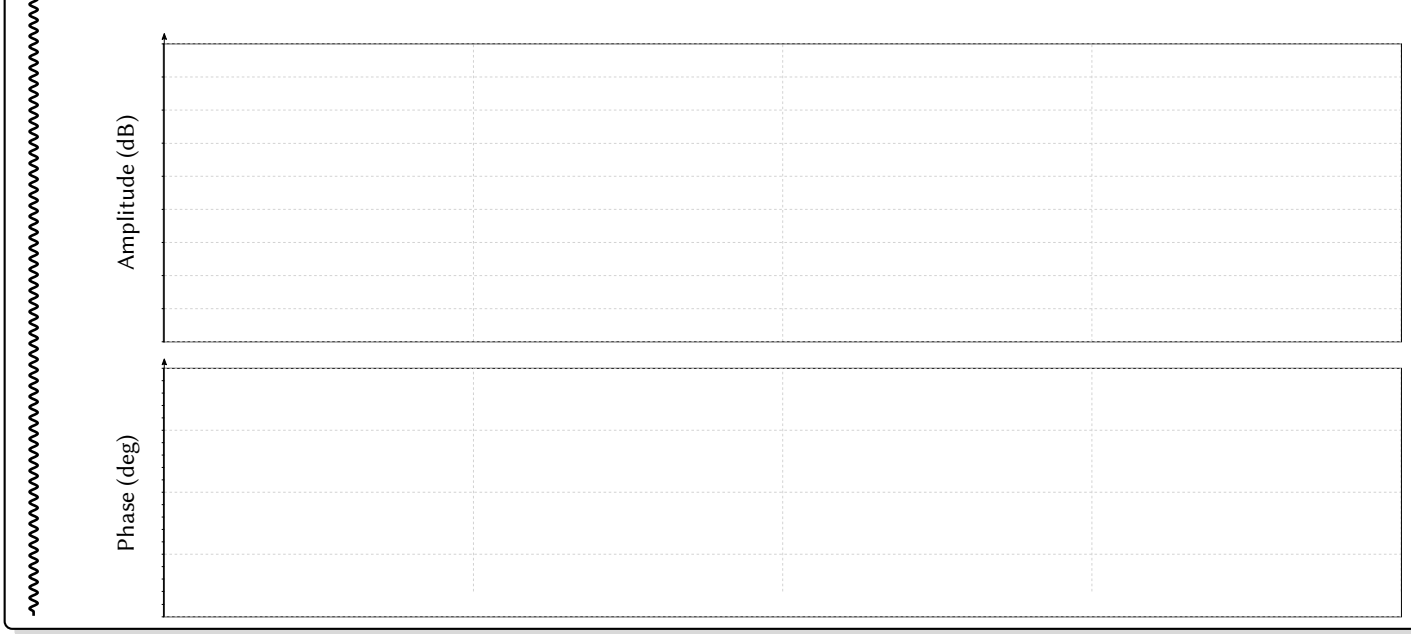
Le diagramme de Bode en module présentera donc deux cassures en ω_1 puis en ω_2. De la même manière, on peut écrire :

$$\varphi_2(\omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La phase présentera donc également ces deux cassures.

Cela permet donc de **préciser** le tracé du diagramme de Bode précédent.

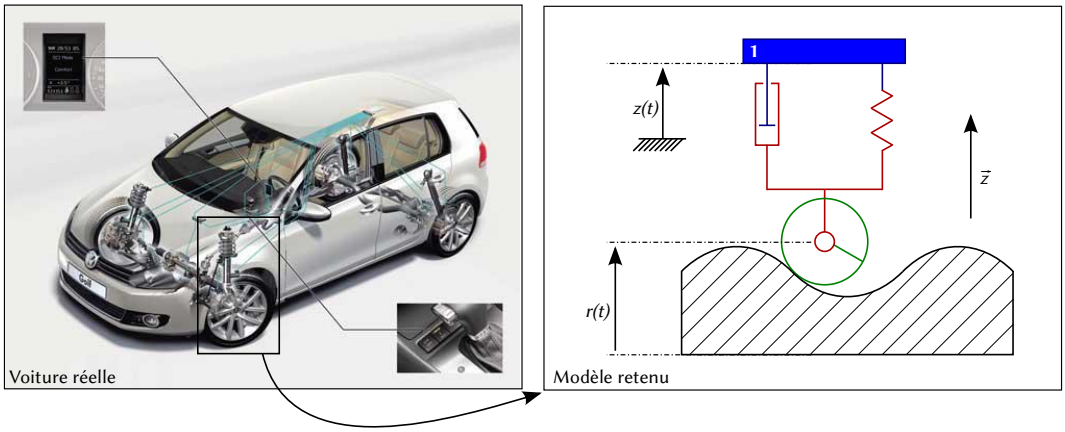
Diagrammes de Bode :



4 Application à l'étude d'une suspension

Mise en situation

On suppose une suspension classique équipée d'un ressort et d'un amortisseur.



On prendra les valeurs suivantes :

k	Raideur de la suspension	17 000 N/m
C	Coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur	7 000 N/(m.s^{-1})
M	Masse équivalente de la voiture	600 kg

On note g l'accélération de pesanteur, $z(t)$ la position du châssis (noté 1) de la voiture et $r(t)$ la position du centre de la roue.

En isolant le châssis de la voiture, il est possible d'écrire le théorème des résultantes en projection sur $\vec{z}$. Cela mène à l'équation suivante :

$$-M.g + k.(L_0 + r(t) - z(t)) + C.(\dot{r}(t) - \dot{z}(t)) = M.\ddot{z}(t)$$

En considérant la voiture à l'arrêt et en effectuant un changement de variable adapté, on arrive finalement à l'équation suivante :

$$k.(r(t) - z(t)) + C.(\dot{r}(t) - \dot{z}(t)) = M.\ddot{z}(t)$$

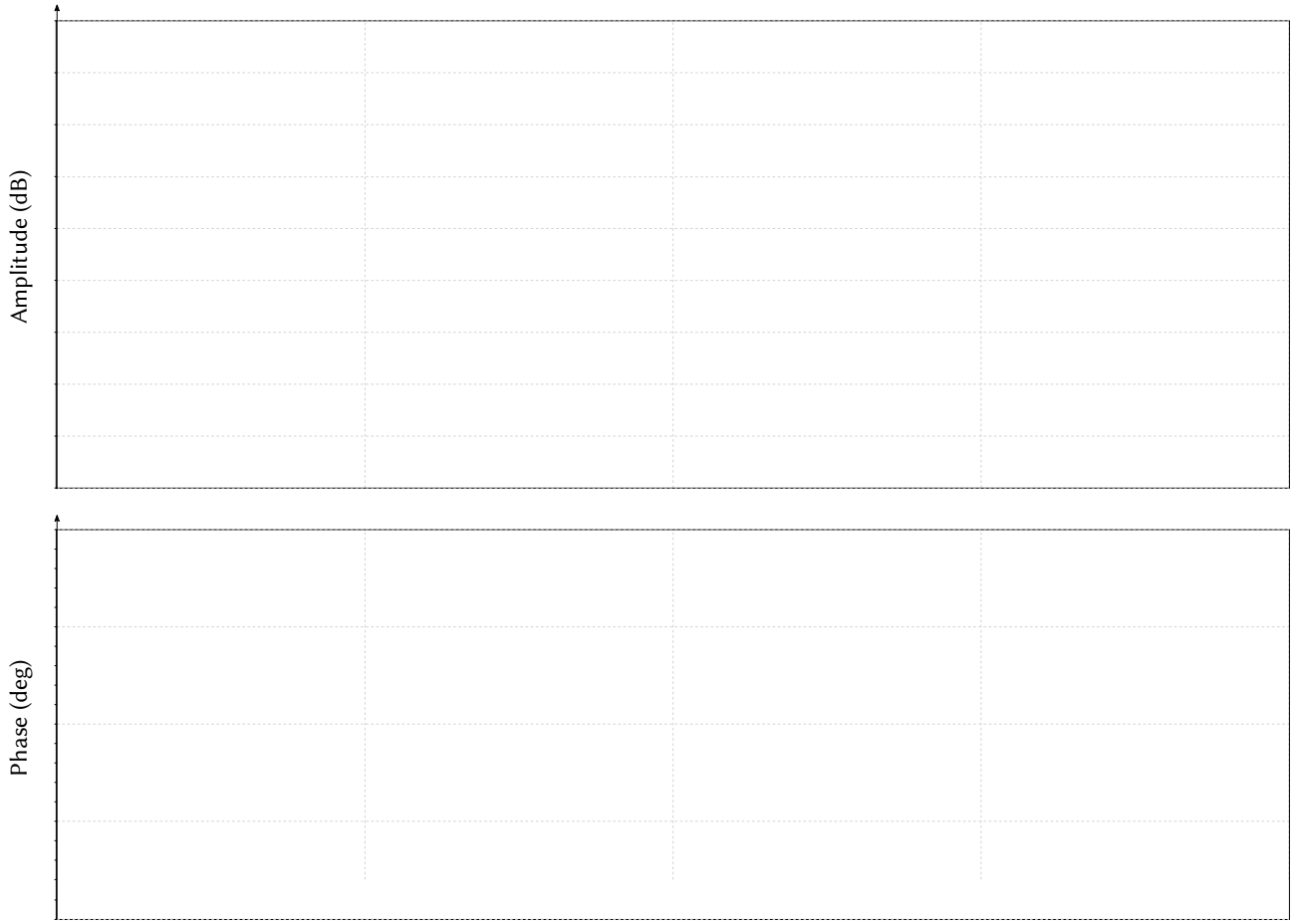
Il est donc possible de définir la fonction de transfert qui lie la position du châssis de la voiture à la position de la roue. Cette fonction de transfert est la suivante :

$$\frac{Z(p)}{R(p)} = H(p) = \frac{k + C.p}{k + C.p + M.p^2}$$

Avec k, la raideur du ressort ; C, le coefficient d'amortissement visqueux et M, la masse équivalente de la voiture.

On cherche à analyser le comportement fréquentielle de cette suspension.

Étude fréquentielle - Tracé du diagramme de Bode


Amplitude (dB)
Phase (deg)

Étude fréquentielle - Exploitation du diagramme de Bode

En utilisant le diagramme de Bode, il est donc possible de prévoir la réponse à une entrée sinusoïdale en régime établi.

On considère deux profils de route différents :

$$r_1(t) = R_1.\sin(5 \times t)$$

$$r_2(t) = R_2.\sin(50 \times t)$$

Donner et tracer - exactement ! - pour chacun de ces profils, la réponse temporelle en régime établi.

Profil de route 1 :



Profil de route 2 :

