Centre d'intérêt 1

Principe fondamental de la dynamique

PSI - MP : Lycée Rabelais

Pré-requis

Ensemble des notions de mécanique

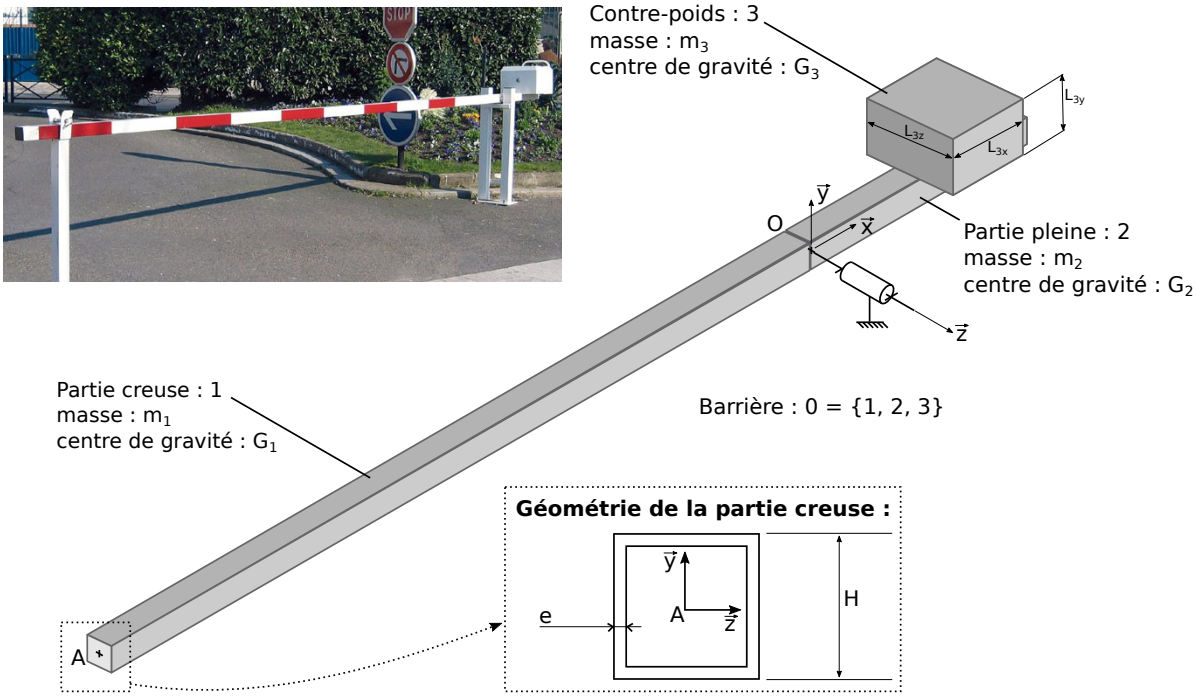
Cours sur la dynamique

Objectifs

Savoir déterminer une équation de mouvement

Savoir déterminer une action mécanique

1 Barrière manuelle ⋆



L'objet de cet exercice est une barrière manuelle. La finalité du problème est de dimensionner le contre-poids (noté 3) afin de limiter l'effort à exercer pour lever la barrière.

La géométrie de la barrière est donnée sur le schéma ci-dessus. L'ensemble des pièces de la barrière sont en acier. On donne en complément le paramétrage suivant :

- $L_1 = 9$ m, la longueur de la partie creuse de la barrière ;

- $L_2 = 1$ m, la longueur de la partie pleine de la barrière ;
- L_{G_1}, la longueur telle que $\overrightarrow{OG_1}.\vec{x} = -L_{G_1}$;
- L_{G_2}, la longueur telle que $\overrightarrow{OG_2}.\vec{x} = L_{G_2}$;
- L_{G_3}, la longueur telle que $\overrightarrow{OG_3}.\vec{x} = L_{G_3}$;
- $\rho = 7800$ kg/m^3, la masse volumique de l'acier.

Question 1. Déterminer L_{G_1} et L_{G_2} en fonction de L_1 et L_2.

Question 2. Déterminer les masses m_1, m_2 et m_3 en fonction des paramètres géométriques et de la masse volumique.

Le cahier des charges impose que le centre de gravité G de la barrière complète vérifie $\overrightarrow{OG}.\vec{x} = -L_G$ où $L_G = 30$ cm.

Question 3. Commenter cette exigence puis exprimer L_G en fonction des données du problème.

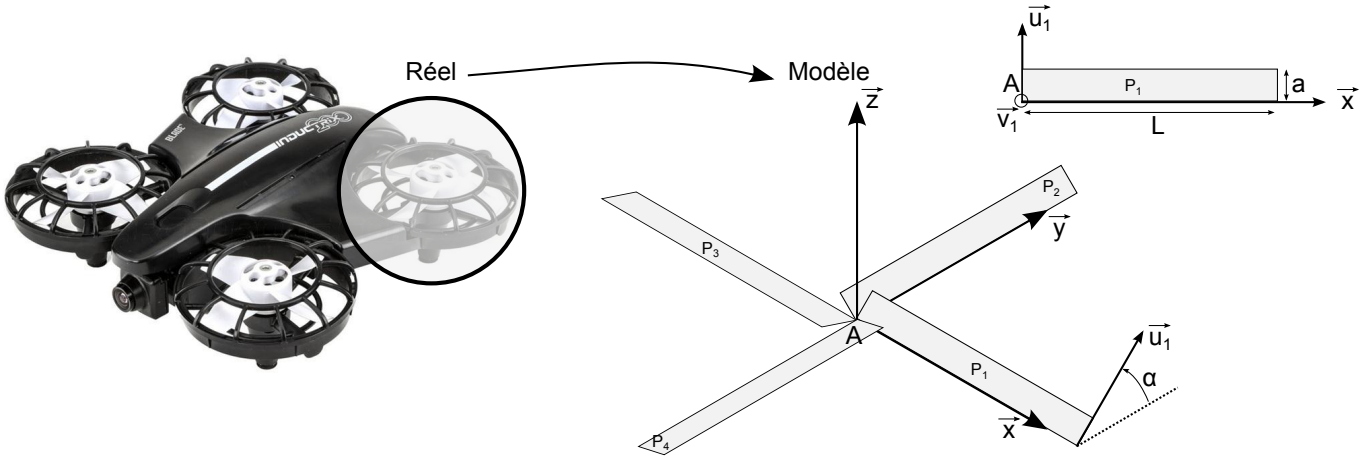
Question 4. On fixe arbitrairement $L_{G_3} = 0.5$ m. Déterminer m_3 pour respecter la contrainte $L_G = 30$ cm. Faire l'application numérique avec $H = 10$ cm et $e = 2$ mm.

Question 5. Déterminer L_3 en supposant que $L_3 = L_{3x} = L_{3y} = L_{3z}$.

Question 6. Donner la forme de la matrice d'inertie du solide $\{1, 2, 3\}$ au point O.

2 Rotor de drone ⋆

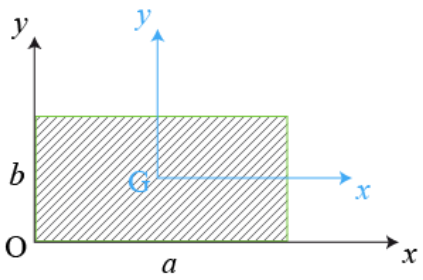
On s'intéresse ici à un rotor de drone. Dans un premier temps, on peut considérer que ce rotor est composé de quatre pâles rigides décalées de 90°et inclinées d'un angle α par rapport à l'horizontal. On note $\alpha = (\vec{y}, \vec{u_1}) = (\vec{z}, \vec{v_1})$.



Chacune de ces pâles est considérée comme d'épaisseur négligeable et de masse M. Sa géométrie est donnée sur la figure ci-dessus.

Objectif : On souhaite réaliser différentes gammes de drones. Une des gammes viserait la communauté du modélisme. Dans ces cas-là, un drone maniable est nécessaire pour réaliser des acrobaties. Une seconde gamme viserait la communauté de la photographie. Ici, on préfèrera utiliser un drone stable pour obtenir une bonne image à partir de l'appareil photo embarqué sur le drone. On s'intéressera uniquement à l'influence de la longueur de la pâle.

Des recherches bibliographiques ont permis d'obtenir la matrice d'inertie d'une plaque d'épaisseur négligeable en son centre de gravité.



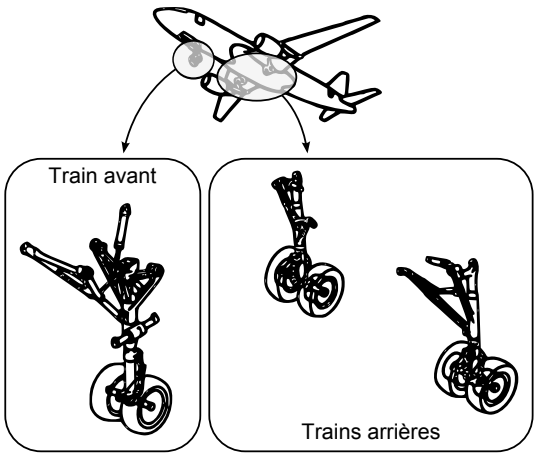
$$I_G(Plaque) = \begin{bmatrix} \frac{Mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Question 1. Déterminer la matrice d'inertie de la pâle P_1 au point A dans la base $(\vec{x}, \vec{u_1}, \vec{v_1})$.

Question 2. Calculer la matrice d'inertie de l'ensemble de l'hélice complète (i.e. les 4 pâles) au point A dans le cas où $\alpha \approx 0°$.

Question 3. Conclure quant à l'objectif du problème.

3 Freinage d'un AIRBUS A318 ⋆⋆



Le freinage est une des fonctions vitales d'un avion, au même titre que la propulsion ou la sustentation. C'est grâce à lui que l'avion peut s'immobiliser après l'atterrissage, circuler au sol en toute sécurité mais également s'arrêter en cas d'urgence lors d'une interruption de décollage alors que l'avion est à pleine charge de carburant et lancé à la vitesse de décollage (même si le risque est de l'ordre de 1 pour 1 million de décollages). Outre les freins, le pilote peut aussi actionner les inverseurs de poussée des moteurs et les aérofreins.

On étudiera le cas de l'Airbus A318 qui possède deux "atterrisseurs". **Le train avant** qui, en dehors de l'appui, est orientable ce qui lui permet d'agir sur les trajectoires au sol mais qui n'est pas équipé de freins. **Les deux trains** principaux au niveau des ailes, chacun portant deux roues freinées indépendamment.

On note G son centre de gravité. Un repère $R_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ est associé au sol. Les roues avants et arrières sont notées respectivement (2) et (3). Les deux contacts roues/sol sont modélisés par des liaisons sphère plan et sont notés de la manière suivante :

$$\{0 \longrightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0\longrightarrow 2}} = X_{02}\vec{x_0} + Y_{02}\vec{y_0} \\ \overrightarrow{M_{A_D,0\longrightarrow 2}} = \vec{0} \end{array} \right._{A_D} \quad \text{et} \quad \{0 \longrightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0\longrightarrow 3}} = X_{03}\vec{x_0} + Y_{03}\vec{y_0} \\ \overrightarrow{M_{A_G,0\longrightarrow 3}} = \vec{0} \end{array} \right._{A_G}$$

Seules les roues arrières sont freinées. Ce freinage est modélisé par le torseur suivant :

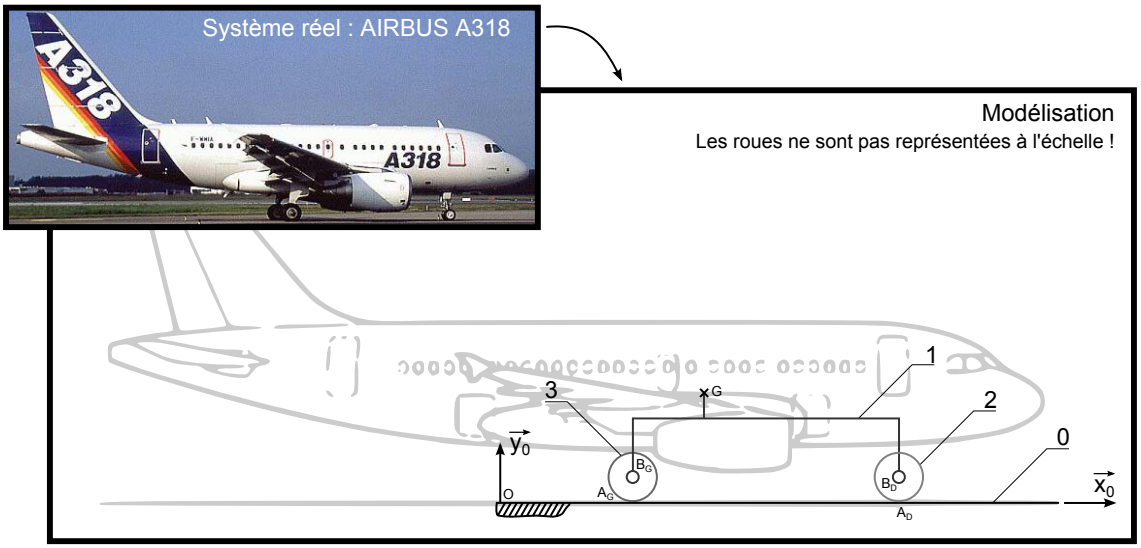
$$\{1 \overset{frein}{\longrightarrow} 3\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\ frein}}_{1\longrightarrow 3} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{B_G,1\longrightarrow 3}} = C_f\vec{z_0} \end{array} \right._{B_G}$$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- masse de l'avion : $M = 60.10^3$ kg (les masses et inerties des roues sont négligées)
- géométrie : $\overrightarrow{B_GG} = x_1\overrightarrow{x_0} + h\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{B_DG} = -x_2\overrightarrow{x_0} + h\overrightarrow{y_0}$ avec $x_1 = 2$m, $x_2 = 8$m et $h = 4$m
- diamètre des roues : $D = 1$m
- coefficient d'adhérence pneu/piste : $f = 1.5$

3.1 Répartition des charges à l'arrêt

On considère l'avion noté (1) **à l'arrêt sur la piste**.



Question 1. Déterminer analytiquement puis numériquement les composantes normales des actions du sol sur les roues.

Question 2. Expliquer le choix du nombre de roues pour les trains avant et arrière.

3.2 Situation de freinage

On considère maintenant le scénario suivant : l'avion roule sur la piste à pleine vitesse, soit $V_0 = 240$ km/h, et seuls les freins sont actionnés pour un arrêt d'urgence. On suppose que le couple de freinage C_f exercé sur chacune des roues du train principal est constant et n'entraine pas le glissement des roues sur la piste. Ce couple de freinage entraine une décélération constante de l'avion noté a_0 (avec $a_0 < 0$).

Question 3. Déterminer analytiquement les composantes normales des actions du sol sur les roues.

Question 4. Comparer ces résultats à ceux obtenus à la question 1.

Question 5. Montrer que $X_{02} = 0$.

Question 6. Exprimer la composante X_{03} en fonction de a_0.

Question 7.

a. Déterminer le couple de freinage nécessaire pour avoir une décélération a_0.

b. À la limite du glissement, déterminer la valeur de la décélération maximale à laquelle peut être soumis l'avion. Calculer numériquement le couple de freinage dans cette situation.

c. En déduire la distance parcourue avant l'arrêt de l'appareil.

En pratique, pour le confort des passagers, le freinage entraîne un mouvement uniformément décéléré de valeur a = -3 m/s^2

Question 8. Dans ces conditions, déterminer les valeurs numériques du couple de freinage et de la distance parcourue avant l'arrêt de l'appareil.

4 Étude d'un simulateur de vol ⋆⋆

L'apprentissage du pilotage ou la qualification des pilotes sur un nouveau type d'appareil requiert de nombreuses heures de formation "en situation". A cet effet, le simulateur de vol se substitue avantageusement au vol réel, tant au niveau du coût de la formation que de l'étendue des situations qui peuvent être reproduites en toute sécurité.

L'objectif de cette partie est de vérifier que le Cahier des Charges Fonctionnel (extrait donné ci-dessous) permet au simulateur de reproduire correctement toutes les phases de vol de l'avion. Les performances de l'avion que l'on cherche à simuler sont également données dans le tableau ci-dessous :

Critère	Niveau
Angles roulis et tangage du cockpit	+/- 0,35 rad (soit +/-20°)
Débattement vertical du cockpit	42 cm
Vitesses angulaires du cockpit	0,45 rad/s (soit 25°/s)
Vitesse verticale du cockpit	47 cm/s
Seuil de perception des accélérations	0,01 g

Extrait du cahier des charges

Distance pour le décollage	283 m (maxi 515m)
Vitesse de décollage	120 km/h
Vitesse de croisière	257 km/h
Vitesse maximale	308 km/h
Vitesse ascensionnelle	4,5 m/s

Performances de l'avion

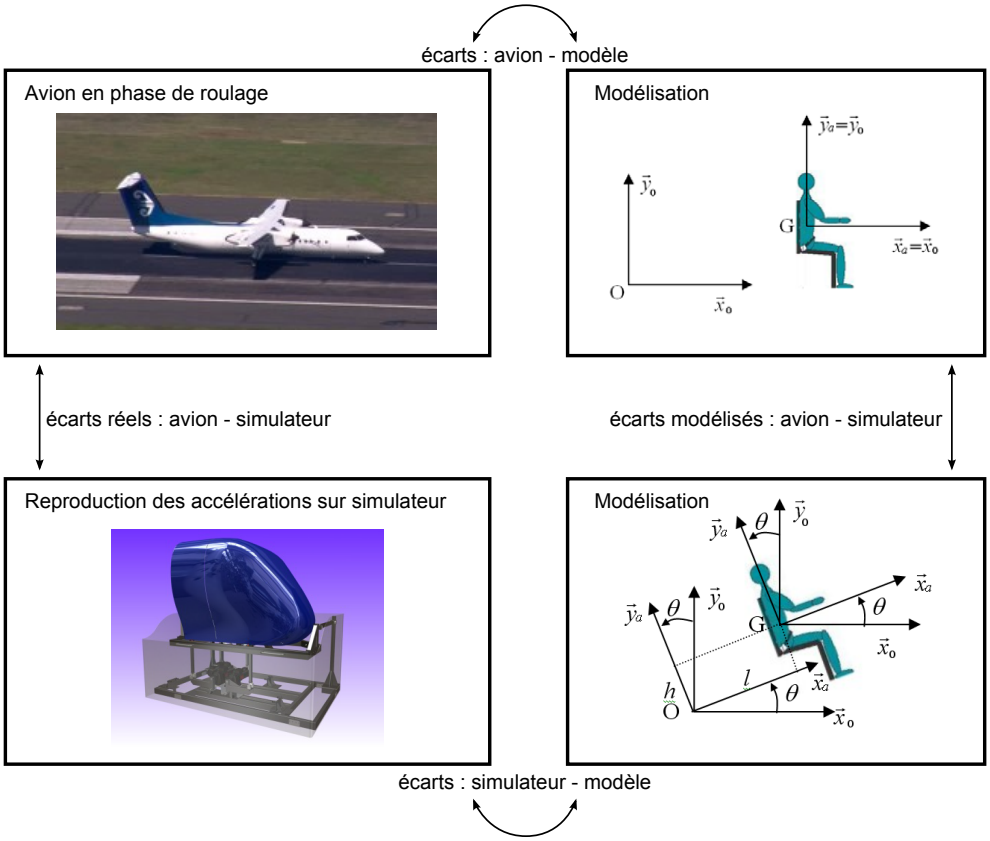
Pour l'étude dynamique proposée, on retiendra les notations et les hypothèses suivantes :

Notations :
t : variable temps
v(t) : vitesse de l'avion en fonction du temps
a : accélération de l'avion
x(t) : déplacement longitudinal de l'avion en fonction du temps

Hypothèses :
accélération constante durant la phase de roulage ;
vitesse nulle à l'origine de la phase de roulage ;
déplacement nul à l'origine de la phase de roulage.

Question 1. A l'aide des données sur les performances de l'avion, calculer son accélération, notée a, pendant la phase de roulage avant le décollage. Exprimée en m/s^2, on arrondira à la valeur entière la plus proche.

On étudie ici la simulation d'une **phase de roulage**. Sur le simulateur « FLY-HO » , il n'est pas possible de réaliser des mouvements de translation longitudinaux dans la direction $\overrightarrow{x_0}$; pour palier cet inconvénient, les ingénieurs ont choisi de faire sentir physiquement les effets de l'accélération au pilote en inclinant la cabine. Pour maintenir la sensation de ce mouvement uniformément accéléré, c'est le système de vision (grâce aux écrans LCD) qui ensuite trompe le pilote en poursuivant le mouvement.



Deux situation sont bien distinguées ici :

Situation 1 : Dans le véritable avion en phase de roulage, le pilote assis sur son siège ressent les effets de la pesanteur ainsi que de l'accélération de l'avion qui le plaque contre son siège. Dans cette situation, on propose le paramétrage suivant :

$$\overrightarrow{OG} = x(t)\overrightarrow{x_0} + h\overrightarrow{y_0} \text{ et } (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_a}) = 0$$

Situation 2 : Dans le simulateur, on incline le cockpit d'un angle $\theta(t)$ de tangage pour faire croire au pilote qu'il accélère, sans que les images qui lui sont présentées ne permettent de détecter cette variation d'angle θ. Le mouvement vertical suivant $\overrightarrow{y_0}$ est supposé nul dans cette phase de roulage. Dans cette situation, on propose le paramétrage suivant :

$$\overrightarrow{OG} = l\overrightarrow{x_a} + h\overrightarrow{y_a} \text{ et } (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_a}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_a}) = \theta(t)$$

Nous allons comparer ces deux situations afin de déterminer la condition à vérifier pour que la sensation d'accélération soit la plus réaliste possible.

Question 2. On considère le pilote installé dans l'avion (situation 1). Le mouvement de l'avion par rapport au référentiel Galiléen $R_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est une translation rectiligne d'accélération a constante. La masse du pilote est notée m et le moment d'inertie du pilote par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{z_a})$ est noté I_G. Déterminer le torseur des actions de liaison entre le pilote et son siège (on considère le pilote encastré sur le siège). Le pilote est supposé se comporter comme un solide indéformable.

Question 3. Dans le simulateur (situation 2), l'accélération est simulée en inclinant le cockpit vers l'arrière. Le pilote, assis sur son siège est positionné de telle sorte que son centre d'inertie G se trouve aux coordonnées $(l, h, 0)$ dans le repère de la cabine $(O, \overrightarrow{x_a}, \overrightarrow{y_a}, \overrightarrow{z_a})$. Il est toujours rigidement lié à son siège et ressent les effets du mouvement par l'intermédiaire de son siège. Déterminer dans ce cas, le torseur de la liaison entre le pilote et le siège.

Question 4. Déterminer les 3 conditions à vérifier si on souhaite que le pilote ait les mêmes sensations entre les deux situations étudiées. En déduire la valeur de l'angle d'inclinaison θ_a en phase stabilisée de roulage ($\theta_a = constante$).

Ces conditions ne peuvent être satisfaites exactement à tout instant. Le cahier des charges définit alors une erreur sur la restitution de l'accélération de 5% à ne pas dépasser.

Cette erreur, notée e_r, est définie lorsque le cockpit s'incline à vitesse de rotation constante par :

$$e_r = \frac{\text{accélération souhaitée} - \text{accélération réelle}}{\text{accélération souhaitée}}$$

Question 5. Quelle doit être la vitesse de rotation maximum à ne pas dépasser pour que l'erreur e_r ne dépassent pas 5% ? Cette valeur est-elle compatible avec le cahier des charges fonctionnel du simulateur ? On utilisera les valeurs numériques suivantes : $l = h = 1$ m.

Question 6. A la fin de la phase de roulage, le simulateur doit reproduire le mouvement angulaire de l'avion qui s'incline pour prendre sa trajectoire de montée avec la vitesse ascensionnelle souhaitée. Déterminer l'angle de montée θ_m. En déduire le débattement angulaire total θ_0 nécessaire pour simuler correctement cette phase du vol : roulage / montée. Cette valeur est-elle compatible avec le cahier des charges du simulateur ?

5 Étude d'un stabilisateur de caméra ⋆⋆

La stabilisation d'images - photo ou vidéo – est un domaine en pleine évolution. On peut distinguer deux types principaux : les stabilisateurs optiques qui améliorent la qualité par le traitement informatique des images et les stabilisateurs mécaniques qui s'opposent aux mouvements indésirables pendant la prise de vue. Parmi les stabilisateurs mécaniques étudiés ici nous distinguons les stabilisateurs passifs représentés sur les figures 1 à 3 ci-dessous, des stabilisateurs actifs représentés sur les figures 4 à 7.



Figure 1: appareil photo, poignée de stabilisation



Figure 2: appareil photo, poignée de stabilisation



Figure 3: caméra vidéo, portage stabilisateur



Figure 4: Skycam ou spydercam pour sport collectif et tennis



Figure 5: Caméras embarquées



Figure 6: Caméras embarquées pour cinéma

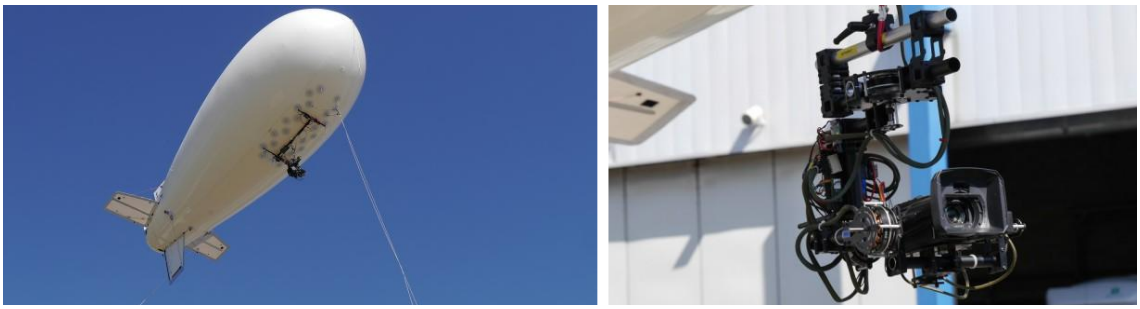


Figure 7: Caméra télévision sous ballon : vue aérienne stade

Les appareils photos modernes fonctionnent en rafales : 8 à 10 images par seconde et en mode vidéo. Le besoin de stabilisation de l'image dans de telles conditions est impératif.

- Figure 1 : le stabilisateur mécanique est muni d'une poignée de prise, il nécessite des réglages de contre-poids ;
- Figure 2 : Un autre modèle dans une autre position ; Le besoin de prises de vue originales et au plus près de l'action à filmer a conduit les concepteurs de matériel cinématographique à déplacer leur caméra au moyen de supports mobiles très variés :
- Figure 3 : stabilisateur de caméra vidéo avec support de portage sur le torse du cameraman ;

- Figure 4 : le système de prise de vue est tenu par des câbles de très grande longueur au-dessus d'un stade ;
- Figure 5 : le système de prise de vue est fixé à l'avant d'un hélicoptère ;
- Figure 6 : le système de prise de vue est fixé à un bras télescopique mobile type « Louma » ;
- Figure 7 : le système de prise de vue est fixé à un ballon gonflé à l'hélium en position fixe au-dessus d'un stade pendant un match de football par exemple.

On s'intéresse ici à **une version passive** (c'est-à-dire sans aucune motorisation). Comme le précise la figure 8, ce système (commercialisé sous le nom de « stabilisateur ») se compose principalement de trois objets :

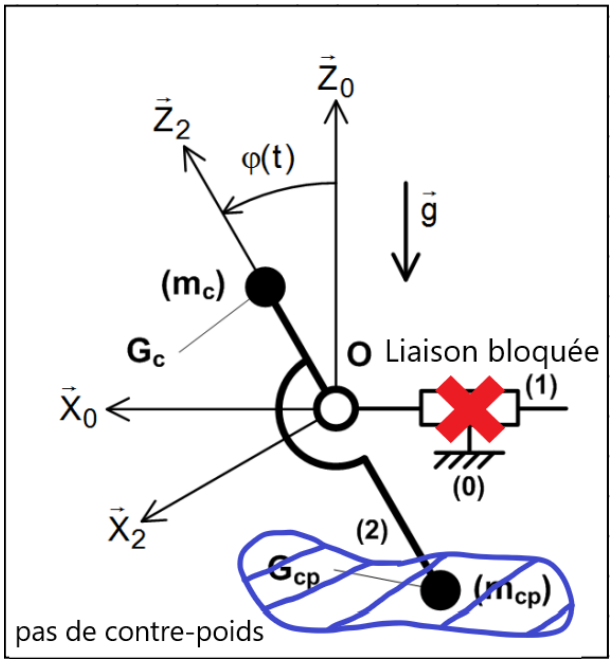
- une poignée orientable (1) manipulée directement par le photographe, liée au support (2) en O ;
- un support rigide (2) (supposé sans masse) sur lequel vient se fixer une caméra assimilée en première approximation à une masse ponctuelle m_c placée en G_c ;
- un contrepoids lié à (2) et assimilé à une masse ponctuelle m_{cp} placée en G_{cp}.



Figure 8: stabilisateur passif, vue générale

L'utilisateur (le porteur) tient fermement la poignée (1) dans une position angulaire quelconque, ce qui permet d'affirmer que le (porteur + (1)) ne forme qu'une seule classe d'équivalence. Afin de produire des images toujours fluides, sans à-coups, ce stabilisateur à main doit maintenir constamment la caméra dans une position (ou « attitude ») verticale (parallèle au champ de gravité), que le porteur soit immobile (plan fixe) ou en mouvement (travelling).

On utilise les éléments définis sur la figure 8. On se place dans un premier temps dans une phase qualifiée d'« immobile », c'est-à-dire que la poignée (1) est parfaitement immobile par rapport au sol (0) : voir le schéma ci-dessous. L'utilisateur solidarise la caméra sur le support (2) démuni de contrepoids. On appelle G_c le centre de gravité de l'ensemble E = {support, caméra} et O le centre de la liaison (parfaite au sens énergétique) poignée (1) - support (2).



Question 2 : Isoler l'ensemble E = {support, caméra} puis :

a) montrer que $\ddot{\varphi} - \frac{g}{L_c} \sin\varphi = 0$ en sachant que $\overrightarrow{OG_c} = L_c\overrightarrow{Z_2}$;

On suppose qu'à l'instant $t = 0$,

- le support est dans la configuration $\varphi = \varphi_0$ et $\dot{\varphi} = 0$ où $\varphi_0 > 0$ et $\varphi_0 \ll 1$ (en rad),
- $L_c > 0$;

b) représenter les évolutions de φ et de $\dot{\varphi}$ entre $t = 0$ et $t = dt$ où dt est un "petit" incrément de temps,

c) l'équilibre obtenu **peut-il être qualifié** de stable ou instable ?

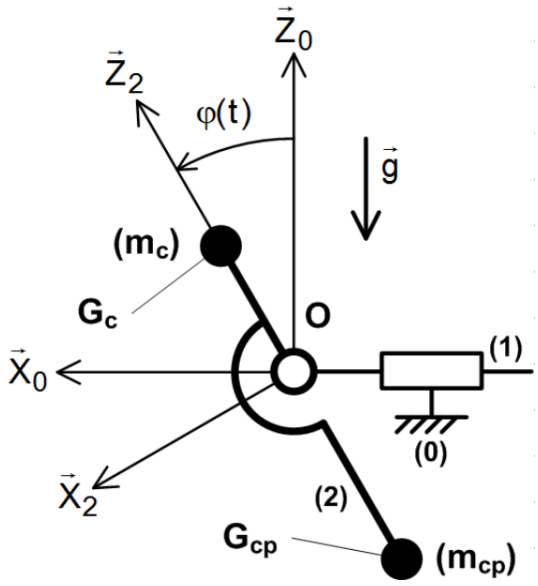
d) expliquer où doit se situer le centre de gravité pour que l'équilibre soit stable.

Pour la suite, on suppose que la main de l'utilisateur (1) est mobile. On adopte maintenant le paramétrage décrit par la figure ci-dessous.

À l'instant initial, l'ensemble (E) est en position verticale ($\varphi = 0$).

Des rainures de réglage placées selon $\overrightarrow{X_2}$ et $\overrightarrow{Y_2}$ permettent de solidariser la caméra sur le support (2). On note $\overrightarrow{OG_c} = L_c\overrightarrow{Z_2}$. On adjoint à présent au support (2) un contrepoids (assimilé à une masse ponctuelle m_{cp} en G_{cp} tel que $\overrightarrow{OG_{cp}} = -L_{cp}\overrightarrow{Z_2}$, L_{cp} réglable) censé améliorer la qualité de l'équilibre de l'ensemble complet noté E' = {support, caméra, contrepoids} de centre de gravité G.

Question 3 : Établir une condition liant m_c , m_{cp} , L_c et L_{cp} garantissant un équilibre stable.



On se place à présent dans une phase dite « dynamique ». Le porteur (1) est en mouvement par rapport au sol. On suppose qu'à l'instant initial, l'ensemble (E') est en équilibre stable en position verticale. On se limite à une translation du poignet (1) selon $\overrightarrow{X_0}$ dans (0).

Ainsi, $\{V(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{V}(P,1/0) = v(t)\overrightarrow{X_0} \end{array} \right.$. On note l'accélération $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{dt}}(t)$.

On suppose maintenant qu'il existe un phénomène de dissipation visqueuse modélisée par $\overrightarrow{M_O}(1 \rightarrow 2).\overrightarrow{Y_2} = -\rho\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}(t)$ et $\rho \in \mathrm{R}^+$ au sein de la liaison poignée (1) - support (2).

Question 4 : Par une étude dynamique, montrer que l'équation de mouvement de (E') dans (0) galiléen s'exprime comme :

$$Q_1\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}(t) + Q_2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}(t) + Q_3 = Q_4 a(t)$$

Pour cela, vous commencerez par **exprimer** le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur (E'). Puis, le théorème de la dynamique utilisé **sera clairement énoncé**. Enfin, les expressions des Q_i en fonction de m_c, m_{cp}, ρ, L_c, L_{cp}, g et φ **seront établies**.

Question 5 : A partir de la position de repos, le porteur se met en mouvement dans (0). À l'aide de l'équation établie précédemment, **indiquer** (en le justifiant) si l'attitude $\varphi(t)$ de (E') se trouve modifiée dans le cas où :

a) le centre de gravité de (E') noté G, se trouve confondu avec O ;

b) le centre de gravité de (E') noté G, ne se trouve pas confondu avec O.

6 Analyse sanguine automatisée ⋆⋆

L'évolution des connaissances associées à l'analyse sanguine a conduit à l'amélioration des diagnostics médicaux lors de l'apparition d'une pathologie inconnue, induisant une intensification du recours aux tests sanguins. Cette

augmentation a incité certains laboratoires à créer des structures automatisées capables de réaliser l'ensemble des tests lors d'un seul processus d'analyse.

Un bras automatisé à trois degrés de liberté « T-R-T » (translation - rotation - translation) muni en extrémité d'une pince à commande pneumatique est utilisé. Il assure les déplacements des tubes de sang entre le plateau et le convoyeur à recirculation.

La fiabilité du fonctionnement de cet élément mécanique est fondamentale pour les besoins du laboratoire :

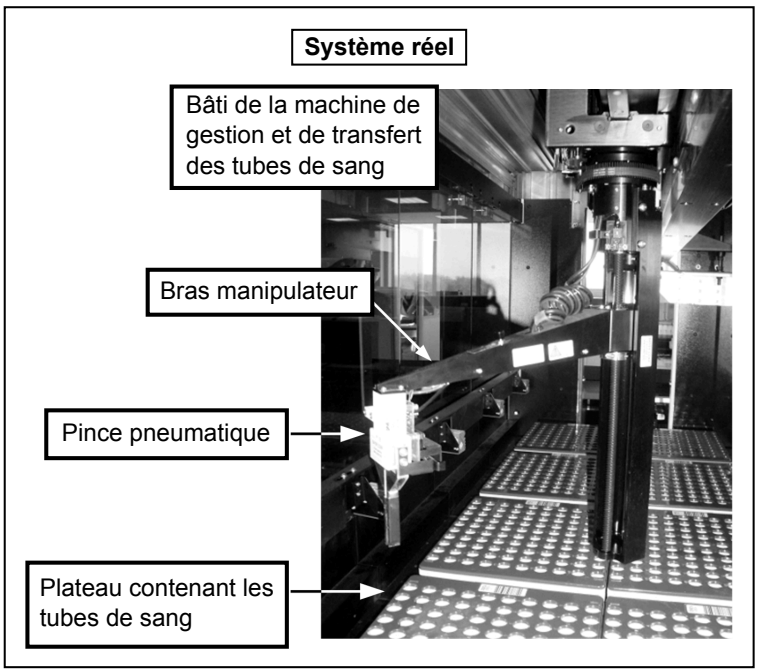
- s'il ne fonctionne plus, la totalité de la chaîne automatisée est bloquée ;
- toute projection de sang lors des transfert des tubes conduit à un arrêt de la chaîne, l'annulation de tous les tests en cours, un nettoyage complet et la destruction de l'ensemble des échantillons présents sur la chaîne.

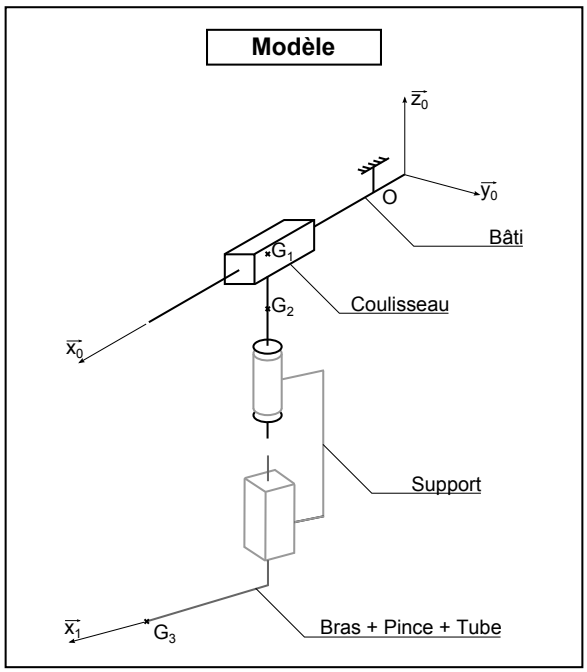
Le bras implanté sur le système est motorisé selon trois "axes" asservis (appelés "Axe N°1", "Axe N°2" et "Axe N°3" dans la suite) assurant les mouvements de type translation / rotation / translation.

Le bras est constitué de trois solides indéformables : Coulisseau 1, Support 2 et Ensemble bras + pince + Tube 3. Les mouvements autorisés entre ces solides sont associés aux trois axes du bras manipulateur et sont paramétrés de la façon suivante :

Mouvements	**Axe N° 1**	**Axe N° 2**	**Axe N° 3**
Pièces considérées	**0** et **1**	**1** et **2**	**2** et **3**
Mouvements	Translation de direction $\overrightarrow{x_0}$	Rotation d'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	Translation de direction $\vec{z}_0$
Paramètres	x	θ	z
Amplitudes	$-1 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$	$-\pi/2 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi/2 \text{ rad}$	$0 \leq z \leq 0{,}3 \text{ m}$

Les amplitudes sont définies depuis la position de référence du bras, dans laquelle il se place après la prise d'origine.





Les trois solides ont les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques cinétiques	**Coulisseau 1**	**Support 2**	**Ensemble bras + pince + tube 3**
Masses	m_1	m_2	m_3
Centres de gravité G_i	$\overrightarrow{OG_1} = x\,\vec{x}_0$	$\overrightarrow{OG_2} = x\,\vec{x}_0 + d_1\,\vec{z}_0$	$\overrightarrow{OG_3} = x\,\vec{x}_0 + (d_1 + z)\vec{z}_0 + (d_2 + d)\vec{x}_1$
Moments d'inertie	sans objet	J_2 selon l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$	J_3 selon l'axe $(G_3, \vec{z}_0)$

L'orientation de la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ par rapport à la base $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est définie par $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$. On utilisera les valeurs numériques suivantes : $d_1 = 0{,}2$ m et $d_2 + d = 0{,}35$ m.

Pour chacun des trois axes motorisés, une action mécanique et un frottement visqueux équivalents de l'actionneur $[Mi]$ associé à l'axe N°i sont définis au niveau de la liaison correspondante :

Grandeurs équivalentes rapportées à l'axe	**Axe N° 1**	**Axe N° 2**	**Axe N° 3**
Action mécanique de l'actionneur $[M_i]$ sur l'axe	F_{M1} (en N)	C_{M2} (en N · m)	F_{M3} (en N)
Frottement visqueux	b_1 (en N · s · m^{-1})	f_2 (en N · m · s · rad^{-1})	b_3 (en N · s · m^{-1})

Question 1 : Mettre en place le graphe d'analyse. Détailler chacun des torseurs d'actions mécaniques liés aux différentes motorisations et aux différentes liaisons avec frottement visqueux.

Question 2 : Proposer une stratégie d'isolements et de calculs à mettre en œuvre pour déterminer les expressions des actions mécaniques F_{M1}, C_{M2} et F_{M3} (générées par les actionneurs $[Mi]$ associés aux trois axes) : on indiquera, dans le tableau ci-dessous (à recopier sur la copie) l'ensemble isolé, le théorème à utiliser (avec éventuellement le point de calcul) et la direction de projection en justifiant clairement le choix de la méthode adoptée.

Effort	**Ensemble isolé**	**Théorème utilisé**	**Justification du choix d'isolement et de théorème**
F_{M1}			
C_{M2}			
F_{M3}			

À partir de la stratégie d'isolements établie, on obtient l'équation différentielle suivante pour l'expression de l'effort F_{M1} :

$$\text{Équation } (E_1) : F_{M1} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + b_1\dot{x} - m_3(d_2 + d)(\ddot{\theta}sin\theta + \dot{\theta}^2cos\theta)$$

Question 3 : Déterminer F_{M3} en fonction de z et des paramètres du problème (on notera cette équation E_3).

Question 4 : Montrer que l'équation différentielle reliant le couple C_{M2}, l'angle θ, le déplacement x et leurs dérivées successives est de la forme $C_{M2} = A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\ddot{x}$ où les termes A, B et C seront exprimés en fonction des termes m_3, J_2, J_3, d_2, d, f_2 et θ. Les différentes étapes du calcul seront précisément indiquées. Cette équation sera notée (E_2).

Les évolutions dynamiques associées au bras motorisé lorsque les trois actionneurs sont commandés simultanément sont donc décrites par les trois équations différentielles obtenues précédemment.

Question 5 : À partir des équations précédentes, justifier que les mouvements de deux des axes sont couplés.

Question 6 : Donner la(es) problématique(s) qui seront associées à ce couplage.