Espaces probabilisés- correction des exercices

Exercice 1 — Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux fléchettes. Ils tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux touche la cible. Le joueur J_1 joue en premier. Il a une probabilité p_1 de toucher la cible. Le joueur J_2 a une probabilité p_2 de toucher la cible. On pourra remarquer que J_1 joue aux rangs impairs et J_2 joue aux rangs pairs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : « J_1 l'emporte au rang $2n+1$ » et B_n l'événement : « J_2 l'emporte au rang $2n+2$ ». On note aussi, pour $i \in \{1,2\}$, G_i l'événement « J_i l'emporte ».

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
3. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.

1. L'événement A_n correspond au déroulement suivant : J_1 rate la cible lors de ses n premiers tirs, J_2 rate la cible lors de ses n premiers tirs et J_1 touche la cible lors de son $n+1$-ème lancer. On a donc, les lancers étant indépendants,

$$P(A_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1.$$

De la même façon,

$$P(B_n) = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2.$$

2. L'événement G_1 s'écrit $G_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Les événements A_n étant deux à deux incompatibles, on a

$$P(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

De la même façon,

$$P(G_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

Notons I l'événement "le jeu dure indéfiniment". Les événements G_1, G_2 et I forment un système complet d'événements et donc

$$P(G_1)+P(G_2)+P(I) = 1.$$

Or,

$$P(G_1)+P(G_2) = \frac{p_1+p_2(1-p_1)}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1.$$

Ainsi, $P(I) = 0$. Le jeu s'arrête presque sûrement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si $P(G_1) = P(G_2)$ c'est-à-dire si et seulement si

$$p_1 = p_2(1-p_1) \iff p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$$

(bien sûr, si $p_1 = 1$, le jeu n'est pas équitable puisque $P(G_1) = 1$).

Exercice 2 — On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

On considère A_n l'événement défini par "les $n-1$ premiers lancers donnent 2 ou 4 et le n-ième lancer donne 6". L'événement étudié est $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Ces événements étant disjoints, on a $P(A) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$. Par indépendance des lancers, on a

$$P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}.$$

On en déduit que

$$P(A) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 3 — On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile (notée P) étant $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir face (notée F) étant $q = 1 - p$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FP ».
2. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer la probabilité de l'événement B_n : « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n et il n'y a pas eu de séquence FP auparavant ».
   En déduire la probabilité de l'événement B : « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP ».
3. Sur le même modèle, calculer la probabilité de l'événement C : « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FF ».

1. Si cet événement est réalisé, alors la suite de lancers doit commencer par PP, sinon au moment où on obtient pour la première fois cette séquence PP, le lancer précédent est un F et on obtient la séquence FP avant la séquence PP. Ainsi, on a

$$P(A) = p^2.$$

2. Si B_n est réalisé, alors les $n-2$ premiers lancers donnent nécessairement P car s'il y avait un F dans ces $n-2$ premiers lancers, on obtiendrait la séquence FP avant la séquence PF. Puisque le $n-1$-ème lancer donne P et le n-ème lancer donne F, on trouve

$$P(B_n) = p^{n-1}q.$$

Puisque B est la réunion des événements incompatibles B_n, pour $n \geq 2$, on a

$$P(B) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1}q = \frac{pq}{1-p} = p.$$

3. Comme précédemment, on va noter, pour $n \geq 2$, C_n l'événement : "la première séquence PF apparaît aux lancers $n-1$ et n et auparavant il n'y a pas eu de séquence FF". On commence par remarquer que $P(C_2) = pq$ (le premier tirage amène P et le deuxième tirage amène F). Supposons maintenant que $n \geq 3$, et distinguons deux cas :

- soit la suite de lancers commence par F. Alors les lancers 2 à $n-1$ sont des P, et le lancer n est un F.
- soit la suite de lancers commence par P. Alors les lancers 2 à $n-1$ doivent également être des P et le lancer n est un F.

Finalement, pour $n \geq 3$, on a

$$P(C_n) = qp^{n-2}q + p^{n-1}q = (p+q)p^{n-2}q = p^{n-2}q.$$

On conclut que

$$P(C) = pq + \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-2}q = pq + \frac{pq}{1-p} = pq + p.$$

Exercice 4 — Une information de type vrai/faux est transmise à l'intérieur d'une population.

Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante.
Avec une probabilité $1-p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante.
On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte". D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1}) = P(I_{n+1}|I_n)P(I_n) + P(I_{n+1}|\overline{I_n})P(\overline{I_n}).$$

Mais, $P(I_{n+1}|I_n) = p$ (l'information doit être transmise correctement) et $P(I_{n+1}|\overline{I_n}) = 1-p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que

$$p_{n+1} = p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p).$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie

$$l = (2p-1) \times l + (1-p) \iff l = 1/2.$$

On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

3. On distingue alors trois cas :

- Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n.
- Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n.
- Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers 1/2. On n'a plus de traces de l'information initiale!

Exercice 5 — On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants. Pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « après le n-ème lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs » et p_n la probabilité $P(A_n)$.

1. Déterminer la valeur de p_1, p_2 et p_3.
2. Montrer que l'on a, pour tout $n \geqslant 4$, $p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout $n \geqslant 1$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au $k-$ième lancer. L'événement A_1 est impossible et $p_1 = 0$. L'événement A_2 est égal à $P_1 \cap P_2$ ce qui par indépendance donne

$$p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

De même,

$$A_3 = F_1 \cap P_2 \cap P_3 \implies p_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Pour p_4, cela se corse un peu !

$$A_4 = F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4 \implies p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 :

- si on a obtenu pile au 1er lancer et que A_n est réalisé, on a forcément obtenu face au second lancer, donc avec une probabilité de 1/3. Puis il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$-ème. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}. On a donc

$$P(A_n|P_1) = \frac{1}{3}p_{n-2} \text{ et } P(P_1) = \frac{2}{3}.$$

- ou bien avoir obtenu face au 1er lancer. Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ème, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}. On a donc

$$P(A_n|F_1) = p_{n-1} \text{ et } P(F_1) = \frac{1}{3}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2 = r/3 + 2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement que, pour $n \geq 2$, on a

$$p_n = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes (p_1 et p_2). On obtient :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

4. En utilisant la formule donnant la somme d'une série géométrique, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} \times \frac{\frac{-1}{3}}{1-\frac{-1}{3}}\\ &= \frac{4}{9} \times 3 - \frac{4}{9} \times \frac{3}{4}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Notons E l'événement "On obtient au moins deux piles consécutifs". L'événement E s'écrit $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et les événements A_n étant deux à deux incompatibles, on trouve

$$P(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

Presque sûrement, on obtient deux piles consécutifs.

Exercice 6 — Des joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2 et, à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur A_{n+1}.
Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape n ait lieu ?
2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
3. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

1. Notons E_n l'événement "la n-ième étape a lieu". On a $P(E_1) = 1$ et $P(E_2) = 1$. Ensuite, pour $n \geq 3$, si la $n-1$-ième étape a eu lieu, il y a une probabilité 1/2 que l'on s'arrête là (le joueur qui avait remporté la manche précédente remporte une deuxième manche consécutive) et une probabilité $1/2$ que l'on continue. Ainsi, $P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1})$ d'où l'on déduit que, pour tout $n \geq 2$, on a $P(E_n) = \frac{1}{2^{n-2}}$.

2. Notons F_n l'événement : "Le jeu s'arrête à l'étape n". On a

$$P(F_n) = P(E_n) - P(E_{n+1}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

si $n \geq 2$, et $P(F_1) = 0$. Les événements F_n étant incompatibles, on en déduit que

$$P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(F_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1.$$

Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement (avec une probabilité 1).

3. Remarquons d'abord que la probabilité que A_1 ou que A_2 gagne vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (il faut que A_1et A_2 gagnent les deux premières parties). Pour $n \geq 3$, A_n joue si et seulement si l'étape $n-1$ a lieu, et donc A_n joue avec une probabilité valant $\frac{1}{2^{n-3}}$. Et lorsque A_n joue, il a une probabilité 1/4 de gagner. En conclusion,

$$P(A_n \text{ gagne}) = \frac{1}{4} P(A_n \text{ joue}) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 7 — Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.
L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. Etude pour un nombre fini de tirages. Pour $n \geqslant 1$, on note B_n l'événement : « Les n premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noires ». On note $u_n = P(B_n)$.
   (a) Démontrer, sans chercher à calculer u_n, que la suite (u_n) est convergente.
   (b) Démontrer que $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.
2. Etude à l'infini. On note B_∞ l'événement : « l'expérience ne s'arrête jamais ».
   (a) Démontrer que $P(B_\infty) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) Vérifier que $-\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$.
   (c) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln(1+2^{-k})$ est convergente.
   (d) En déduire que $P(B_\infty) > 0$.

2.

2.1. On a $B_{n+1} \subset B_n$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente.
2.2. Fixons $k \geq 1$ et calculons la probabilité $P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})$. Au k-ième tirage, on a 1 boule noire et 2^{k-1} boules blanches (puisqu'on multiplie par deux le nombre de boules blanches à chaque étape). La probabilité de piocher une boule blanche est donc de $2^{k-1}/(1+2^{k-1})$. On a donc

$$P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}) = \frac{2^{k-1}}{1+2^{k-1}}.$$

Maintenant, par la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|B_{n-1} \cap B_{n-2} \cap \cdots \cap B_1)P(B_{n-1}|B_{n-2} \cap \cdots \cap B_1) \cdots P(B_2|B_1)P(B_1) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}. \end{aligned}$$

3.

3.1. On a $B_\infty = \bigcap_n B_n$. De plus, la suite d'événements (B_n) est décroissante pour l'inclusion. On en déduit que $P(B_\infty) = \lim_n P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
3.2. Par les propriétés fonctionnelles du logarithme,

$$\begin{aligned} -\ln(u_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} -\ln\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1+2^k}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1+2^k}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+2^{-k}\right). \end{aligned}$$

3.3. La suite $\ln(1+2^{-k})$ est toujours positive. On a aussi que

$$\ln(1+2^{-k}) \sim_{+\infty} 2^{-k}.$$

De plus, la série $\sum_k 2^{-k}$ est convergente. Donc par comparaison la série $\sum_k \ln(1+2^{-k})$ est convergente.
3.4. D'après la question précédente, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(u_n)$ tend vers λ. Par continuité de la fonction exponentielle, $u_n \to e^\lambda > 0$. Et $P(B_\infty) = \lim_n u_n = e^\lambda$.

Exercice 8 — Une urne contient une boule blanche. Un joueur lance un dé équilibré à six faces.

S'il obtient un *six*, il tire une boule dans l'urne, note sa couleur et l'expérience s'arrête.
Sinon, il ajoute une boule rouge dans l'urne et répète l'expérience.
On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ permettant l'étude de cette expérience.

On admettra et on utilisera le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, *pour tout* $x \in]-1,1[$

1. Quelle est la probabilité que le joueur tire la boule blanche ?
2. On suppose que le joueur a tiré la boule blanche.
   Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres boules dans l'urne ?

On introduit les événements suivants :

— A_n = « Le joueur obtient pour la première fois un six lors du n-ième lancer »,

— A_∞ = « Le joueur n'obtient jamais de six »,

— B = « La boule tirée est blanche ».

On a :

$$\mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A_\infty) = 0.$$

On utilise la formule des probabilités totales en identifiant un système complet d'événements adapté à l'étude.
Les événements A_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et A_∞ constituent un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales donne :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(B \mid A_n)\,\mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(B \mid A_\infty)\,\mathrm{P}(A_\infty).$$

On a $\mathrm{P}(B \mid A_n) = \dfrac{1}{n}$ car, si le tirage de la boule a lieu après le n-ième lancer du dé, l'urne est constituée de 1 boule blanche et de $n-1$ boules rouges. De plus, $\mathrm{P}(A_\infty) = 0$, donc $\mathrm{P}(B \mid A_\infty)\,\mathrm{P}(A_\infty) = 0$. On obtient donc :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{n} = \frac{\ln(6)}{5} \approx 0{,}358 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Il s'agit d'estimer la probabilité d'une cause : on utilise la formule de Bayes . Avec $\mathrm{P}(B) > 0$, on a :

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1 \times \frac{1}{6}}{\frac{\ln(6)}{5}} = \frac{5}{6\ln(6)} \approx 0{,}465 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Exercice 9 — Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur.
On répète cette opération indéfiniment.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?
2. Justifier qu'il est presque sûr que la boule blanche initiale sera tirée.

On pose $A_0 = \Omega$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement : A_n = « Les n premières boules tirées sont rouges ».
$\mathrm{P}(A_0) = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1, \mathrm{P}(A_n \mid A_{n-1}) = \dfrac{2n-1}{2n}$
et, si l'événement A_{n-1} est réalisé, l'urne est constituée d'une boule blanche et $2n-1$ boules rouges lors du n-ième tirage. Sachant $A_n = A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n$, la formule des probabilités composées donne :

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A_0) \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k \mid A_{k-1}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

En exprimant le produit des entiers pairs et des entiers impairs à l'aide de factoriels, on obtient :

$$\mathrm{P}(A_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}^{-1}.$$

On étudie l'événement contraire en déterminant la limite de $\mathrm{P}(A_n)$ par la formule de Stirling.
Les événements A_n constituent une suite décroissante et l'on a, par continuité monotone :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

À l'aide de la formule de Stirling, on obtient :

$$\mathrm{P}(A_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

L'événement « Tirer indéfiniment des boules rouges » est donc négligeable, tandis que l'événement contraire, il est presque sûr que la boule blanche initiale sera tirée.

Exercice 10 — Dans une population, la probabilité qu'une famille ait $n \in \mathbb{N}$ enfants est donnée par :
$p_n = \dfrac{a2^n}{n!}$ avec $a > 0$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Une famille comporte au moins un enfant. Quelle est la probabilité que la famille ait exactement deux enfants ?
3. Calculer la probabilité qu'une famille comporte au moins une fille.
4. On suppose qu'une famille a au moins une fille.
   Quelle est la probabilité que la famille soit constituée de deux enfants exactement ?

La somme des p_n vaut 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, introduisons l'événement de probabilité p_n : A_n = « La famille comporte n enfants ».
La famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un système complet d'événements et donc :

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a\frac{2^n}{n!} = a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

On reconnaît dans le dernier membre une somme exponentielle, et l'on a : $a\mathrm{e}^2 = 1$ donc $a = \mathrm{e}^{-2}$.
Lorsque $\mathrm{P}(A) > 0$, on a par définition :

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Puisque A_2 entraîne $\overline{A_0}$,

$$\mathrm{P}\left(A_2 \mid \overline{A_0}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(A_2\cap\overline{A_0}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{A_0}\right)} = \frac{\mathrm{P}(A_2)}{\mathrm{P}\left(\overline{A_0}\right)} = \frac{p_2}{1-p_0} = \frac{2}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)} \approx 0{,}42.$$

Notons F l'événement « La famille comporte au moins une fille ».
Un événement s'exprimant par « au moins un(e) » invite à considérer l'événement contraire, qui s'exprime par « aucun(e) ».
L'événement $\overline{F}$ signifie que la famille est uniquement constituée de garçons.
Les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituant un système complet d'événements, on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\overline{F}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(\overline{F} \mid A_n\right)\mathrm{P}(A_n).$$

Lorsqu'une famille comporte n enfants, la probabilité que celle-ci ne comporte aucun garçon est $\dfrac{1}{2^n}$.
On peut alors poursuivre le calcul :

$$\mathrm{P}(\overline{F}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}p_n = a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

On reconnaît encore une somme exponentielle, et l'on conclut :

$$\mathrm{P}(\overline{F}) = a\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1} \quad \text{puis} \quad \mathrm{P}(F) = 1-\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Si l'on souhaite calculer une probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(A \mid B)$ et que l'on a plus facilement accès à $\mathrm{P}(B \mid A)$, on emploie la formule de Bayes.
On sait que :

$$\mathrm{P}(F \mid A_2) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{F} \mid A_2\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Par la formule de Bayes,

$$\mathrm{P}(A_2 \mid F) = \frac{\mathrm{P}(F\mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2)}{\mathrm{P}(F)} = \frac{\frac{3}{4}\times 2a}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{3}{2\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)} \approx 0{,}321 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$