

Rappels sur espaces probabilisés - exercices

Exercice 1 — Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1 , R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent : 20% de la population totale pour la classe R_1 , 50% pour la classe R_2 , et 30% pour la classe R_3 . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année?
2. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque?

Exercice 2 — Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé.

Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000.

Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%.
- si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Autorisez-vous la commercialisation de ce test?

Exercice 3 — Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in]0, 1[$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in]0, 1[$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne?
2. Quelle est la probabilité que A gagne? que B gagne?
3. A quelle condition le jeu est-il équilibré?

Exercice 4 — Un joueur décide de jouer aux machines à sous.

Il va jouer sur deux machines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{A}$ est de $\frac{1}{5}$;
- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{B}$ est de $\frac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

- il commence par choisir une machine au hasard;
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout $k \geq 1$ les événements suivants :

G_k : « Le joueur gagne la k -ième partie » et A_k : « La k -ième partie se déroule sur la machine $\mathcal{A}$ ».

1. Déterminer la probabilité de gagner la première partie.
2. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
3. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine $\mathcal{A}$?
4. Soit $k \geq 1$.
 - (a) Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$.
 - (b) Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$.
 - (c) En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k .
 - (d) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n P(G_k)$. Calculer S_n puis déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.