

Chapitre 8 : Espaces probabilisés- exercices

Exercice 1 — Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux fléchettes. Ils tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux touche la cible. Le joueur J_1 joue en premier. Il a une probabilité p_1 de toucher la cible. Le joueur J_2 a une probabilité p_2 de toucher la cible. On pourra remarquer que J_1 joue aux rangs impairs et J_2 joue aux rangs pairs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : « J_1 l'emporte au rang $2n + 1$ » et B_n l'événement : « J_2 l'emporte au rang $2n + 2$ ». On note aussi, pour $i \in \{1, 2\}$, G_i l'événement « J_i l'emporte ».

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. En déduire $P(G_1)$ et $P(G_2)$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
3. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$.

Exercice 2 — On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs?

Exercice 3 — On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile (notée P) étant $p \in]0, 1[$ et la probabilité d'obtenir face (notée F) étant $q = 1 - p$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FP ».
2. Pour tout $n \geq 2$, calculer la probabilité de l'événement B_n : « la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n - 1$ et n et il n'y a pas eu de séquence FP auparavant ».
En déduire la probabilité de l'événement B : « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP ».
3. Sur le même modèle, calculer la probabilité de l'événement C : « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FF ».

Exercice 4 — Une information de type vrai/faux est transmise à l'intérieur d'une population.

Avec une probabilité p , l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante.

Avec une probabilité $1 - p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante.

On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n .
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous?

Exercice 5 — On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile

est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement « après le n -ème lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs » et p_n la probabilité $P(A_n)$.

1. Déterminer la valeur de p_1 , p_2 et p_3 .
2. Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 4$, $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout $n \geq 1$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Exercice 6 — Des joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2 et, à l'étape n , si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur A_{n+1} .
Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape n ait lieu ?
2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
3. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

Exercice 7 — Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. Etude pour un nombre fini de tirages. Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement : « Les n premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noires ». On note $u_n = P(B_n)$.
 - (a) Démontrer, sans chercher à calculer u_n , que la suite (u_n) est convergente.
 - (b) Démontrer que $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.
2. Etude à l'infini. On note B_∞ l'événement : « l'expérience ne s'arrête jamais ».
 - (a) Démontrer que $P(B_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (b) Vérifier que $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$.
 - (c) Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} \ln(1+2^{-k})$ est convergente.
 - (d) En déduire que $P(B_\infty) > 0$.

Exercice 8 — Une urne contient une boule blanche. Un joueur lance un dé équilibré à six faces.

S'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne, note sa couleur et l'expérience s'arrête.

Sinon, il ajoute une boule rouge dans l'urne et répète l'expérience.

On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant l'étude de cette expérience.

On admettra et on utilisera le résultat suivant : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, pour tout $x \in]-1, 1[$

1. Quelle est la probabilité que le joueur tire la boule blanche ?
2. On suppose que le joueur a tiré la boule blanche.
Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres boules dans l'urne ?

Exercice 9 — Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur. On répète cette opération indéfiniment.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?
2. Justifier qu'il est presque sûr que la boule blanche initiale sera tirée.

Exercice 10 — Dans une population, la probabilité qu'une famille ait $n \in \mathbb{N}$ enfants est donnée par :

$$p_n = \frac{a2^n}{n!} \quad \text{avec } a > 0.$$

On admettra et on utilisera le résultat suivant : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Une famille comporte au moins un enfant. Quelle est la probabilité que la famille ait exactement deux enfants ?
3. Calculer la probabilité qu'une famille comporte au moins une fille.
4. On suppose qu'une famille a au moins une fille.
Quelle est la probabilité que la famille soit constituée de deux enfants exactement ?