

Chapitre 8 : Espaces probabilisés

En l'absence de précision, n désignera un entier naturel non nul.

1 Ensembles dénombrables

Définition

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Autrement dit, E est dénombrable s'il existe une application bijective $f : E \rightarrow \mathbb{N}$.

Remarques

- On se limitera principalement dans la suite de ce chapitre (et dans les suivants) à travailler sur des ensembles *finis ou dénombrables*, qu'on appelle aussi ensembles **au plus dénombrables**.
- Un ensemble E est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

Définition

On appelle **description en extension** d'un ensemble fini ou dénombrable E toute description de E sous la forme $E = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple

Écrire en extension les ensembles : $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \in [\sqrt{2}; 2\pi]\}$
et $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = \frac{p}{n} \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\}$

Propriété

Tout ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Propriété

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration :

Propriété

Soient E et F deux ensembles dénombrables.
Alors, le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble dénombrable.

Remarques :

- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable
- Le produit cartésien de deux ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

2 Espace probabilisé au plus dénombrable

a) Tribu

Définition

Une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω est appelée **tribu** sur Ω si elle vérifie les trois axiomes suivants :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Vocabulaire : Une tribu est également appelée σ -algèbre (« sigma-algèbre »).

Exemple

Soit $\Omega = \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}, A, \overline{A}\}$ où A est un sous-ensemble fixe de $\mathbb{N}$ (par exemple, $A = \{\text{nombres pairs}\}$) est une tribu sur Ω .

Propriété

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur un ensemble Ω , on a les propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- Pour toute famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{A}$.
- Pour toute famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{A}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
- Pour tout A et tout B appartenant à $\mathcal{A}$, on a $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Démonstration :

b) Probabilité

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω . On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements **incompatibles** (c'est-à-dire disjoints deux à deux),

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

σ -additivité

Remarque : On peut seulement supposer que P est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Le fait que ces valeurs soient effectivement dans $[0, 1]$ peut se déduire des deux axiomes de la définition.

Vocabulaire : On parle souvent de **loi de probabilité** au lieu de probabilité pour désigner l'application P .

Exemple

Soit $a \in]0, 1[$.

1. Démontrer qu'il existe une unique probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = (1-a)a^n$.
2. On considère les deux événements $A = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
Les événements A et B sont-ils incompatibles? indépendants?

Définition

On appelle **espace probabilisé** un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarque : Cette définition est compatible avec la définition d'espace probabilisé fini.

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

Propriétés

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Pour toute famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{A}$, on a : $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$
3. Si A et B appartiennent à $\mathcal{A}$ et si $A \subset B$, on a $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
4. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2 : P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriétés

6. pour toute suite **croissante** $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$) :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \quad \text{continuité croissante}$$

7. pour toute suite **décroissante** $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$) :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \quad \text{continuité décroissante}$$

8. si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ **sous-additivité**

où $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ désigne la somme de la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ si elle converge, et $+\infty$ sinon.

Démonstrations :

Exemple

On considère une urne qui contient deux boules vertes, une boule rouge, et dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs avec remise. On définit E l'événement : « On obtient au moins une boule rouge ». On souhaite calculer $P(E)$ par trois méthodes différentes.

Pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

- V_n l'événement « on obtient une boule verte au n -ème tirage », et R_n son complémentaire.
- A_n : « on obtient la première boule rouge au n -ème tirage ».
- B_n : « on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages ».
- C_n : « on obtient au moins une boule rouge lors des n premiers tirages ».

1. Calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

2. Exprimer E à l'aide des événements A_n , $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.

3. Exprimer E à l'aide des événements B_n , $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.

4. Exprimer E à l'aide des événements C_n , $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.

5. Que peut-on en déduire sur E ?

3 Conditionnement et indépendance

a) Probabilités conditionnelles

Définition

Si A et B sont deux évènements tels que $P(B) > 0$, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B** le réel : $P_B(A) = P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Propriété

Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) > 0$. Alors, l'application $P_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Démonstration :

Propriété : formule des probabilités composées

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Définition

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'évènements disjoints deux à deux (autrement dit incompatibles) telle que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$. Une telle famille est appelée **système complet (dénombrable) d'évènements**.

Propriété : formule des probabilités totales

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

Remarques :

- L'expression $P(B|A_n)$ n'est *a priori* définie que si $P(A_n) > 0$. On adopte cependant dans la formule ci-dessus la convention suivante : si $P(A_n) = 0$, on a $P(B|A_n)P(A_n) = 0$.
- Cette formule reste valable avec une famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'évènements disjoints deux à deux telle que $\mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i) = 1$ (on parle de système *quasi-complet* d'évènements).

Propriété : formule de Bayes pour deux évènements

Soient deux évènements $A, B \in \mathcal{A}$ de probabilités non nulles. Alors :

$$P(A | B) = P(B | A) \frac{P(A)}{P(B)}$$

Théorème : formule de Bayes pour un système complet d'évènements

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évènements tels que $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(A_n | B) = \frac{P(B | A_n) P(A_n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B | A_n) P(A_n)}$$

Exemple

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'une urne U_n contenant $n!$ jetons, chacun numéroté de 1 à $n!$.

L'expérience aléatoire consiste à :

- choisir un entier k avec une probabilité λx^k , où $x \in]0, 1[$.
- une fois k choisi, extraire un jeton de l'urne U_k .

On admet le résultat suivant : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

1. Comment choisir λ pour que cela définisse une probabilité sur $\mathbb{N}$?
2. Quelle est la probabilité de tirer le jeton numéro 1, peu importe l'urne ?
3. À l'issue de l'expérience, on a tiré le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de U_2 ?

b) Indépendance d'évènements

Définition

Deux évènements $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ sont **indépendants** si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Propriété

Soient $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$.

Si A et B sont indépendants, alors les évènements A et $\overline{B}$ d'une part, $\overline{A}$ et B d'autre part, et enfin $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Propriété

Soient $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

Si $P(B) > 0$, alors l'indépendance de A et B équivaut à $P(A | B) = P(A)$.

Définition

Soient $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ une famille d'évènements.

On dit que les évènements sont **mutuellement indépendants** si

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tous $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$

⚠ Si n évènements sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Exemple

Soient $A_1, \dots, A_n$ n évènements d'un espace probabilisé (Ω, P) .

On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = P(A_i)$.

Donner une expression simple de $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \dots, p_n$.

Application : on suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité p d'avoir un accident.
Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident?