

Rappels sur espaces probabilisés

n désigne un entier naturel non nul.

Dans le cas où E désigne un ensemble fini, on note $|E|$ le cardinal de E .

1 Modélisation probabiliste

Définitions

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat, qu'on considère dépendre du « hasard ».
- L'étude d'une expérience aléatoire commence par la description des résultats possibles, également appelés **éventualités**.
- L'ensemble des résultats possibles, autrement dit l'ensemble des éventualités, est appelé **univers**. Il est généralement noté Ω .
- Un **évènement aléatoire** est un évènement qui peut se produire ou non, suivant le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent.
- On dira qu'une famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'évènements forme un **système complet d'évènements** si c'est une partition de Ω , c'est-à-dire si les A_i sont deux à deux disjoints et recouvrent Ω :

$$\text{— } \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

$$\text{— } \forall (i, j) \in [[1, n]]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

- Un évènement de probabilité nulle est appelé évènement **négligeable**.

2 Probabilité sur un ensemble Ω fini

Dans cette section, Ω désigne un ensemble fini et non vide.

a) Notion de probabilité sur un ensemble fini

Définition

On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - si A et B sont des évènements incompatibles (c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$), alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini, et pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle **probabilité de A** le nombre $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.

Cas particulier de la probabilité uniforme sur un ensemble fini :

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et on suppose que les éventualités sont équiprobables. Soit A une partie de Ω . La probabilité que l'évènement A soit réalisé à l'issue de l'expérience aléatoire est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

b) Propriétés des probabilités finies

Théorème

Pour tous événements A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a :

1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. (En particulier : $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$.)
2. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (on parle de *croissance* de la probabilité).
5. De plus, si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie d'événements disjoints, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Remarque : Ce résultat montre qu'une probabilité finie est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.

c) Construction d'une probabilité sur un ensemble fini

Théorème

Soient $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et $(p_1, \dots, p_n)$ un n -uplet de réels positifs. Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $p_1 + \dots + p_n = 1$. Cette probabilité est alors donnée par la formule $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\{i \mid \omega_i \in A\}} p_i$.

Remarque : Dans le cas où les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité est alors la probabilité uniforme sur Ω .

Exemple – 1

On dispose d'un dé pipé tel que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face. On lance le dé pipé.

1. Donner un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair?

Exemple – 2

Soit $n \geq 1$.

Déterminer une probabilité sur $\{1, \dots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2 .

Correction de l'exemple 1 : L'univers le plus naturel à associer à l'expérience est $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Soit la probabilité modélisant l'expérience aléatoire. D'après l'énoncé : $\mathbb{P}(\{i\}) = \lambda \times i$. Le problème est de déterminer λ . Pour cela, on remarque que $\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 1$. Mais, $\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 21\lambda$. On doit donc avoir $\lambda = \frac{1}{21}$. On a $\mathbb{P}(\{\text{obtenir un chiffre pair}\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

Correction de l'exemple 2 : On cherche une probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{1, \dots, k\}) = \lambda k^2$. On a alors, pour $k = 1, \dots, n$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{1, \dots, k\}) - \mathbb{P}(\{1, \dots, k-1\}) = \lambda k^2 - \lambda(k-1)^2 = 2\lambda k - \lambda$. On va déterminer λ en remarquant que $\mathbb{P}(\{1, \dots, n\}) = 1$, ce qui entraîne $\lambda n^2 = 1 \implies \lambda = \frac{1}{n^2}$. La probabilité est donc définie par $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$. On vérifie aisément que réciproquement, cette probabilité vérifie que $\mathbb{P}(\{1, \dots, k\})$ est proportionnelle à k^2 .

3 Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement non négligeable. Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par : $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Propriété

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement non négligeable. L'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui à tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ associe $\mathbb{P}_B(A)$ défini comme ci-dessus, est une probabilité sur Ω .

Corollaire

Pour tous les évènements A et B tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$

Propriété : formule des probabilités composées

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 | A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Propriété : formule des probabilités totales

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'évènements. Pour tout évènement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Propriété : formule de BAYES

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'évènements.

Pour tout évènement B non négligeable, et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B | A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B | A_i)}$$

Remarque : Le cas de deux évènements est à connaître tout particulièrement.

4 Indépendance

Définition

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** — pour la probabilité $\mathbb{P}$ — si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. En particulier, si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Propriété

Soient A, B deux évènements indépendants. Alors :

1. Les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
3. Les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

⚠ Il ne faut pas confondre incompatibles et indépendants.

En particulier, deux évènements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants.

Définition

Soient $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'évènements. On dit que les évènements sont **mutuellement indépendants** si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tous $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$$

⚠ Des évènements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse.

Correction de l'exemple 3 : On a alors : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

donc les événements A, B et C sont bien deux à deux indépendants.

Par ailleurs : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ donc les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants

Correction de l'exemple 4 :

1. Il s'agit d'une probabilité uniforme, en notant Ω l'ensemble des pièces, on a $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{3}$.

2. On applique les formules des probabilités totales et des probabilités composées et on trouve

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \cap B) + \mathbb{P}(P \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(P) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}_{\bar{B}}(P) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 0 = \frac{1}{3}$$

3. — Dans le cas d'une pièce « normale », on est ramené au cas de n lancers indépendants d'une pièce non truquée, d'où, d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}_B(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

— Dans le cas de la pièce truquée, on n'obtient que des faces d'où $\mathbb{P}_{\bar{B}}(F_n) = 1$.

Ce qui permet d'écrire, d'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(F_n) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}_{\bar{B}}(F_n) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

4. On applique la formule de Bayes : $\mathbb{P}_{F_n}(\bar{B}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}_{\bar{B}}(F_n)}{\mathbb{P}(F_n)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{2^{n-1}}{1 + 2^{n-1}}$

5. Si ces événements étaient mutuellement indépendants, ils seraient deux à deux indépendants et en particulier f_1 et f_2 seraient indépendants.

$$\text{Or : } \mathbb{P}(f_1) = \mathbb{P}(f_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}(f_1 \cap f_2) = \mathbb{P}(F_2) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

On a donc : $\mathbb{P}(f_1 \cap f_2) = \mathbb{P}(f_1) \times \mathbb{P}(f_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \neq \frac{2}{3}$. ce qui prouve que f_1 et f_2 ne sont pas indépendants.

Exemple – 4

1. Déterminer la probabilité de l'événement B ?
 2. Quelle est la probabilité de l'événement P ?
 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelle est la probabilité de l'événement F_n ?
 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Sachant que l'on a obtenu « Face » au n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ?
 5. Les événements $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
- Vous justifierez au mieux vos résultats notamment en indiquant les noms des propriétés utilisées.**
- F_n : « on obtient « Face » à chacun des n lancers. »
 P : « On obtient « Pile » au premier lancer » ; pour $1 \leq k \leq n$: f_k : « on obtient « Face » au k -ième lancer. »
 On considère les événements suivants : B : « la pièce prise est normale » ;
 On prend une pièce au hasard dans l'urne et on procède à n lancers indépendants de cette pièce.
 une face « Face », la troisième, truquée, possède deux faces « Face ».
 Soit $n \in \mathbb{N}$, une urne possède trois pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales avec une face « Pile » et

Exemple – 3

- On lance 2 fois une pièce de monnaie. On considère les événements suivants :
 A : « On obtient pile au 1^{er} lancer » ; B : « On obtient face au 2^{ème} lancer »
 et C : « On obtient la même chose aux 2 lancers ».
 Montrer que les événements A, B et C sont donc 2 à 2 indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.