

Chapitre 9 : Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, E désigne un ensemble et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1 Généralités sur les variables aléatoires

a) Variable aléatoire discrète

Définition

Une **variable aléatoire discrète** définie sur Ω à valeurs dans E est une application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que :

- $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable;
 - pour tout $x \in X(\Omega)$, l'image réciproque de $\{x\}$ par X est un événement.
- Autrement dit, $\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Notation : Lorsque X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E et x un élément de $X(\Omega)$, l'événement $X^{-1}(\{x\})$ sera noté $\{X = x\}$ ou $(X = x)$. La probabilité de cet événement sera toujours notée $\mathbb{P}(X = x)$.

Remarque : Si la tribu $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω , alors toute application définie sur Ω (et d'image au plus dénombrable) est une variable aléatoire discrète, car la condition $\{X = x\} \in \mathcal{A}$ est évidemment vérifiée quel que soit x dans l'image de X .

Dans la suite, toute variable aléatoire pour laquelle on ne précise pas l'espace de départ sera supposée définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X désigne une variable aléatoire discrète définie sur Ω et à valeurs dans un ensemble E .

Propriété

Pour toute partie $U \subset E$, $X^{-1}(U)$ est un événement. Autrement dit, $\forall U \in \mathcal{P}(E), X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. Cet événement est noté $\{X \in U\}$ ou $(X \in U)$ et sa probabilité $\mathbb{P}(X \in U)$.

Propriété

Soit $X(\Omega) = \{x_n; n \in K\}$ une description en extension de $X(\Omega)$, avec $K \subset \mathbb{N}$ (fini si $X(\Omega)$ est fini, égal à $\mathbb{N}$ si $X(\Omega)$ est dénombrable).

Alors, la famille d'événements $(\{X = x_k\})_{k \in K}$ forme un système complet d'événements.

Remarque : Cette proposition est importante : on utilisera très souvent la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements de ce type.

Propriété

Pour tout $A \subset E$ et pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles de E , on a :

- $\{X \in \overline{A}\} = \overline{\{X \in A\}}$;
- $\{X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in A_n\}$;
- $\{X \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \in A_n\}$;
- $\{X \in \emptyset\} = \emptyset$;
- $\{X \in E\} = \Omega$.

Propriété

Soit f une fonction de E dans un ensemble F .

Alors, l'application $f \circ X : \Omega \rightarrow F$ est une variable aléatoire discrète, notée $f(X)$.
 $\omega \mapsto f(X(\omega))$

b) Loi d'une variable aléatoire discrète

Propriété

L'ensemble $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X(\Omega))$ est une tribu sur $X(\Omega)$ et l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

$$A \longmapsto \mathbb{P}(X \in A)$$

Démonstration :

Définition

La probabilité $\mathbb{P}_X$ définie dans la proposition précédente est appelée **loi de X** .
Comme $X(\Omega)$ est dénombrable, cette loi est entièrement déterminée par $\{\mathbb{P}(X = x), x \in X(\Omega)\}$.

Remarque : La loi de la variable aléatoire X est une probabilité sur l'ensemble des valeurs prises par X .
L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, bien qu'important en théorie, n'intervient pas directement lorsqu'on s'intéresse uniquement à la loi d'une variable aléatoire. En pratique, on omettra souvent de le préciser.

2 Lois usuelles discrètes

a) Rappels sur les lois usuelles sur un univers fini

Définition

- Une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit une **loi uniforme** sur $\{x_1, \dots, x_N\}$ si :

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}, \text{ et } P(X = x_1) = \dots = P(X = x_N) = \frac{1}{N}.$$

- Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si :

$$X \text{ est à valeurs dans } [0, n] \text{ et } \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Lorsque $n = 1$, on parle de **loi de Bernoulli** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

b) lois usuelles discrètes sur un ensemble dénombrable

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi géométrique de paramètre p** (avec $p \in]0, 1[$) et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

$$\text{si } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Remarque :

- C'est bien une loi de probabilité puisque
- La loi géométrique peut être interprétée comme le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Propriété

$$\forall k \in \mathbb{N}^* P(X > k) = (1 - p)^k$$

Démonstration :

Exemple

On lance un dé équilibré indéfiniment.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le rang du premier 5.

2. Après trois lancers, toujours pas de 5.
Quelle est la loi du nouveau temps d'attente jusqu'à apparition du 5?

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson de paramètre** $\lambda (\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarques :

- C'est bien une loi de probabilité puisque

- La loi de Poisson est la loi des phénomènes rares, de petite probabilité. Par exemple :
 - Soit X la variable aléatoire du nombre de personnes réservant un billet d'avion pour Berlin le 6 février à 9h30. X suit en théorie une loi binomiale dont l'effectif est très grand – tous les clients potentiels, des millions – et le paramètre p est très petit – la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard ait envie de se rendre à Berlin le 6 février par le vol de 9h30.
On approxime en général la loi de X par la loi de Poisson de paramètre np .
 - Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps $[0, T]$: la loi de X est une loi de Poisson.

Définition

Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. On définit l'application $\mathbb{1}_A$ sur Ω par $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

L'application $\mathbb{1}_A$ est appelée **fonction indicatrice de A** . C'est une variable aléatoire réelle discrète.

Exemple

1. Quel est l'ensemble A_1 dont la fonction indicatrice est $\mathbb{1}_{A_1} = 1 - \mathbb{1}_A$?
2. Quel est l'ensemble A_2 dont la fonction indicatrice est $\mathbb{1}_{A_2} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$?
3. Que vaut $\mathbb{1}_A^2$?

3 Couple de variables aléatoires discrètes

a) Lois conjointes et marginales

Propriété

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles discrètes, définies sur Ω .
On considère $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega))$
Alors, X est un vecteur aléatoire discret. On note $X = (X_1, X_2)$.

Définition

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes.
On appelle **loi conjointe** de X_1 et X_2 la loi du couple $X = (X_1, X_2)$. Elle est entièrement déterminée par :

$$X(\Omega) \subset \{(x_1, x_2); x_1 \in X_1(\Omega); x_2 \in X_2(\Omega)\} = X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$$

et $\mathbb{P}(X = (x_1, x_2)) = \mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2))$, pour tous $x_1 \in X_1(\Omega)$ et $x_2 \in X_2(\Omega)$.
Cette probabilité est notée $\mathbb{P}_X(x_1, x_2)$.

Propriété

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple aléatoire discret.
On note $X(\Omega) = \{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$ où I et J sont deux ensembles au plus dénombrables.
La loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X_1 est déterminée à partir de la loi $\mathbb{P}_X$ du couple X par :

$$X_1(\Omega) = \{x_i, i \in I\} \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = (x_i, y_j)) \text{ pour tout } i \in I$$

et la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X_2 est de même déterminée à partir de la loi $\mathbb{P}_X$ du couple X par :

$$X_2(\Omega) = \{y_j, j \in J\} \text{ et } \mathbb{P}(X_2 = y_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = (x_i, y_j)) \text{ pour tout } j \in J$$

Les lois de X_1 et de X_2 sont appelées **lois marginales** du couple X .

Exemple

Dans une succession de pile ou face pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$ et la probabilité d'obtenir face $q = 1 - p$, on note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du second pile. Déterminer les lois conjointes et marginales de X et de Y .

⚠ La connaissance de la loi conjointe $P_{(X,Y)}$ permet de déterminer P_X et P_Y , mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple ci-dessous.

On tire au hasard deux nombres dans $\{1, 2\}$.

On note X la valeur du premier tirage et Y celui du second. On pose $Z = 3 - X$.

X, Y et Z suivent la loi uniforme sur $\{1, 2\}$, mais (X, Y) et (X, Z) n'ont pas la même loi. En effet :

Loi de (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	Total
1			
2			
Total			

Loi de (X, Z)

$X \backslash Z$	1	2	Total
1			
2			
Total			

(X, Y) et (X, Z) ont donc même lois marginales mais pas même loi conjointe.

b) loi conditionnelle

Définition

Soit X (resp. Y) une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E (resp. F) et soit $x \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. On note $\mathcal{T} = \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

Alors, l'application $A \mapsto \mathbb{P}(Y \in A \mid X = x)$ définie sur $\mathcal{T}$ et à valeurs dans $[0, 1]$ est une probabilité sur $(Y(\Omega), \mathcal{T})$, appelée **loi conditionnelle** de Y sachant $(X = x)$.

Exemple

Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ puis celle de X sachant $(Y = k)$ dans le cadre de l'exemple précédent.

c) Variables aléatoires indépendantes

cas de deux variables aléatoires

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

On dit que X et Y sont **indépendantes**, et on note $X \perp Y$, si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Alors, pour tous sous-ensembles $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Remarque :

- Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si toutes les lois conditionnelles de X sachant $(Y = j)$ sont identiques à la loi de X .
- Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Exemples

1. On lance deux dés. On note X la somme des deux dés et Y leur produit.
Les deux variables sont-elles indépendantes?

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, et soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la probabilité de l'événement $\{X \geq kY\}$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel m , la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = m\}$ soit la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ et Y suit la loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la loi de X .

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors, toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Y .

Exemple

Ainsi, si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ X^n et Y^m aussi.

cas de plusieurs variables aléatoires

Définition

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes.
On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** lorsque, pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont (mutuellement) indépendants.

⚠ l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle

Propriété

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, pour tous sous-ensembles $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

On dit que cette suite est une **suite de variables aléatoires indépendantes** lorsque, pour tout sous-ensemble fini non vide I de $\mathbb{N}$, la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n \in I}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

Propriété : lemmes des coalitions

Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes définies sur le même univers Ω , et $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions,

alors les variables $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont également indépendantes.

Exemple

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $S_1 = X_1 + \dots + X_p$ et $S_2 = X_{p+1} + \dots + X_n$ sont indépendantes.