

Variables aléatoires - exercices

Exercice 1 — On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r, r+1, \dots\}$. Soit $k \geq r$. Remarquons que si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X = k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{k-r}$. On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Exercice 2 — Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Étudier la convergence et éventuellement calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{P(X \geq an)}{P(X \geq bn)}$.

On commence par remarquer que si $a \leq b$, alors l'événement $(X \geq bn)$ est contenu dans l'événement $(X \geq an)$. Ainsi, $P(X \geq an)/P(X \geq bn) \geq 1$ et la série est grossièrement divergente. Supposons maintenant $a > b$. On commence par calculer, pour $k \geq 1$, $P(X \geq k)$:

$$P(X \geq k) = \sum_{j \geq k} P(X = j) = \sum_{j \geq k} q^{j-1} p = p \frac{q^{k-1}}{1-q} = q^{k-1}$$

où on a noté comme d'habitude $q = 1 - p$. On a donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{P(X \geq an)}{P(X \geq bn)} = q^{(a-b)n}.$$

On a donc affaire à une série géométrique de raison $q^{a-b} \in]0, 1[$. La série est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(X \geq an)}{P(X \geq bn)} = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{(a-b)n} = \frac{q^{a-b}}{1 - q^{a-b}}.$$

Exercice 3 — On dit qu’une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > k + n | X > n) = P(X > k)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
 - (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
 - (b) En déduire que X est sans mémoire. Interpréter ce résultat en termes d’épreuves de Bernoulli.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.
 - (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
 - (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

1.

1.1. Notons $q = 1 - p$. On sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = k) = pq^{k-1}$. On en déduit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^m}{1 - q} = q^m.$$

1.2. On commence par remarquer que $(X > k + n) \cap (X > n) = (X > k + n)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X > k + n | X > n) &= \frac{P((X > k + n) \cap (X > n))}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > k + n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{q^{k+n}}{q^n} = q^k = P(X > k). \end{aligned}$$

La variable aléatoire X est bien sans mémoire. Interprétons ceci en termes d’épreuves de Bernoulli. $P(X > m)$ est la probabilité pour que, dans une suite d’épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi, le premier succès arrive après la m -ième épreuve. $P_{(X > n)}(X > n + m)$ est la probabilité pour que, dans le même cas, le premier succès arrive après la $n + m$ -ième épreuve, sachant que les n premières épreuves ont donné lieu à un échec. Dans ce dernier cas, on peut oublier les n premières épreuves dont on connaît le résultat et calculer la probabilité que le premier résultat arrive après m épreuves.

2.

2.1. Procédons par récurrence. Pour $n \geq 1$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie par

$$\mathcal{P}(n) = “P(X > n) = q^n”.$$

Initialisation : la propriété est vraie au rang 1 par définition de q .

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on a d’une part

$$P(X > n + 1 | X > n) = P(X > 1) = q$$

et d’autre part

$$P(X > n + 1 | X > n) = \frac{P((X > n + 1) \cap (X > n))}{P(X > n)} = \frac{P(X > n + 1)}{q^n}.$$

On déduit que $P(X > n + 1) = q^n \cdot q = q^{n+1}$ et que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

2.2. Pour $n \geq 1$, on a

$$P(X = n) = P(X > n - 1) - P(X > n) = q^{n-1} - q^n = (1 - q)q^{n-1} = pq^{n-1}$$

et donc X suit bien une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 4 — Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale?

Corrigé ▼

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k + 1}.$$

La suite est décroissante si et seulement si ce rapport est toujours inférieur ou égal à 1. Il atteint sa valeur maximale pour $k = 0$, et donc la suite est décroissante si et seulement si $\lambda \leq 1$.

On a

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k + 1}$$

d'où

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} \geq 1 \iff k \leq \lambda - 1.$$

On distingue alors trois cas :

1. Si $\lambda - 1 < 0$, c'est-à-dire $\lambda \in]0, 1[$, la suite $(P(X = k))$ est strictement décroissante, et donc son maximum est atteint en $P(X = 0)$.
2. si λ est un entier, la suite est strictement croissante jusqu'à $\lambda - 1$, strictement décroissante à partir de λ et le maximum est atteint en deux points : $P(X = \lambda - 1)$ et $P(X = \lambda)$.
3. Si λ n'est pas un entier, la suite est strictement croissante jusqu'à $\lfloor \lambda - 1 \rfloor + 1$, puis strictement décroissante ensuite. La valeur maximale est donc $P(X = \lfloor \lambda \rfloor)$.

Exercice 5 — Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 2 boules bleues.

On tire 3 boules simultanément dans l'urne.

On note X le nombre de boules rouges obtenues et Y le nombre de boules vertes.

1. Déterminer la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2)$.

Correction :

1. L'urne contient un total de $3 + 4 + 2 = 9$ boules.

On tire 3 boules simultanément, donc le nombre total de tirages possibles est $\binom{9}{3} = 84$.

Les valeurs possibles pour (X, Y) sont les couples (x, y) tels que $x + y \leq 3$, avec $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Cependant, comme on tire 3 boules, $x + y \leq 3$.

La loi conjointe est donnée par :

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{3}{x} \binom{4}{y} \binom{2}{3-x-y}}{\binom{9}{3}}$$

où $\binom{2}{3-x-y}$ est le nombre de façons de choisir les boules bleues.

Calcul des probabilités conjointes :

	0	1	2	3	$\mathbb{P}(Y = j)$
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{10}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{12}{84}$	$\frac{12}{84}$	0	$\frac{40}{84}$
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0	$\frac{30}{84}$
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0	$\frac{4}{84}$
$\mathbb{P}(X = i)$	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	

Lois marginales :

Pour X :

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

Pour Y :

$$P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

2. On cherche $P(Y = y | X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = y)}{P(X = 2)}$.

D'après la loi conjointe, on a :

$$P(X = 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{6}{84} + \frac{12}{84} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

Donc :

$$P(Y = 0 | X = 2) = \frac{\frac{6}{84}}{\frac{3}{14}} = \frac{1}{3}, \quad P(Y = 1 | X = 2) = \frac{\frac{12}{84}}{\frac{3}{14}} = \frac{2}{3}$$

La loi conditionnelle de Y sachant $X = 2$ est donc : $\begin{cases} P(Y = 0 | X = 2) = \frac{1}{3} \\ P(Y = 1 | X = 2) = \frac{2}{3} \end{cases}$

Exercice 6 — On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note U le numéro de la plus petite boule, et V le numéro de la plus grande boule. Déterminer la loi conjointe de (U, V) , puis les lois de U et de V .

Correction :

L'ensemble des tirages possibles de deux boules parmi 4 est $\binom{4}{2} = 6$.

Les couples (u, v) possibles sont ceux où $1 \leq u < v \leq 4$. Les valeurs possibles pour (U, V) sont donc :

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$

Chaque tirage est équiprobable, donc :

$$P(U = u, V = v) = \frac{1}{6} \text{ pour chaque couple } (u, v) \text{ ci-dessus.}$$

Tableau de la loi conjointe et des lois marginales :

(u, v)	2	3	4	<i>total</i>
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
<i>total</i>	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Exercice 7 — Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X , la loi de Y et la loi de $X + Y$.
2. X et Y sont-elles indépendantes?

Correction :

1. Le couple (X, Y) suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$, donc pour tout $(k, \ell) \in \{0, \dots, n\}^2$,

$$P(X = k, Y = \ell) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pour déterminer la loi de X , on somme sur tous les ℓ possibles :

$$P(X = k) = \sum_{\ell=0}^n P(X = k, Y = \ell) = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Donc X suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$. Par symétrie, Y suit aussi une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.

Loi de $X + Y$:

On cherche $P(X + Y = m)$ pour $m \in \{0, \dots, 2n\}$. Pour chaque m , on compte le nombre de couples (k, ℓ) tels que $k + \ell = m$:

$$P(X + Y = m) = \frac{\text{Nombre de solutions de } k + \ell = m \text{ dans } \{0, \dots, n\}^2}{(n+1)^2}.$$

Le nombre de solutions est :

$$\begin{cases} m+1 & \text{si } 0 \leq m \leq n, \\ 2n-m+1 & \text{si } n+1 \leq m \leq 2n. \end{cases}$$

Donc :

$$P(X + Y = m) = \begin{cases} \frac{m+1}{(n+1)^2} & \text{si } 0 \leq m \leq n, \\ \frac{2n-m+1}{(n+1)^2} & \text{si } n+1 \leq m \leq 2n. \end{cases}$$

2. Indépendance de X et Y :

Pour montrer l'indépendance, on vérifie que pour tout $(k, \ell) \in \{0, \dots, n\}^2$,

$$P(X = k, Y = \ell) = P(X = k)P(Y = \ell).$$

Or, on a :

$$P(X = k, Y = \ell) = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad P(X = k) = \frac{1}{n+1}, \quad P(Y = \ell) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$P(X = k)P(Y = \ell) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = P(X = k, Y = \ell).$$

Conclusion : X et Y sont indépendantes.

Exercice 8 — Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q . Calculer $P(Y > X)$.

L'événement $Y > X$ est la réunion des événements disjoints $X = k, Y > k$, pour k allant de 1 à $+\infty$. Par indépendance des variables aléatoires X et Y , on a $P(X = k, Y > k) = P(X = k) \times P(Y > k)$. De plus, puisque X et Y suivent des lois géométriques, on sait que

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \text{ et } P(Y > k) = (1 - q)^k.$$

On en déduit que

$$P(Y > X) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - q)((1 - p)(1 - q))^{k-1} = \frac{p(1 - q)}{1 - (1 - p)(1 - q)} = \frac{p - pq}{p + q - pq}.$$

Exercice 9 — Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1]$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $X + Y$ est à valeurs $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a

Par indépendance,

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)P(Y = n - k).$$

Il ne reste plus qu'à dérouler les calculs :

$$P(X + Y = n) = (n - 1)p^2(1 - p)^{n-2}.$$

Exercice 10 — Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) > 0$.

On appelle taux de panne associé à X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = P(X = n | X \geq n)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = P(X = n)$. Démontrer que $p_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}(1 - x_n)p_n$.

En déduire une expression de p_n en fonction des x_k , $1 \leq k \leq n$.

2. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi géométrique si et seulement si son taux de panne est constant.

1. D'après la définition des probabilités conditionnelles, et puisque $(X = n + 1)$ est contenu dans $(X \geq n + 1)$, on a

$$x_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{P(X \geq n + 1)}.$$

Maintenant,

$$P(X \geq n + 1) = P(X \geq n) - P(X = n) = \frac{p_n}{x_n} - p_n.$$

Il vient

$$x_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{\frac{p_n}{x_n} - p_n} = \frac{x_n p_{n+1}}{p_n(1 - x_n)}.$$

On en déduit que

$$p_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}(1 - x_n)p_n.$$

Par une récurrence immédiate, partant de $p_1 = x_1$, on trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k).$$

2. Supposons d'abord que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Elle est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^{n-1}.$$

On a donc

$$x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} = \frac{p(1-p)^{n-1}}{(1-p)^{n-1}} = p$$

et le taux de panne est constant.

Réciproquement, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont le taux de panne est constant, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} = p.$$

D'après la question précédente,

$$P(X = n) = p \prod_{k=0}^{n-1} (1 - p) = p(1 - p)^{n-1}.$$

C'est bien que X suit une loi géométrique de paramètre p . On peut remarquer qu'on doit avoir nécessairement $p \in]0, 1[$ puisque $P(X_n) \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)$ doit être une série convergente de somme 1.

Exercice 11 — Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2 . On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z .

1. Il s'agit simplement de calculer la somme d'une série géométrique : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} \\ &= p_1 \frac{q_1^n}{1 - q_1} \\ &= q_1^n \end{aligned}$$

où on a posé $q_1 = 1 - p_1$.

2. Remarquons que $Z > n$ si et seulement $X > n$ et $Y > n$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P(Z > n) &= P(X > n) \times P(Y > n) \\ &= q_1^n q_2^n \end{aligned}$$

3. La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $Z > n - 1$ est la réunion disjointe de $Z > n$ et $Z = n$. Ainsi,

$$P(Z > n - 1) = P(Z > n) + P(Z = n).$$

Il vient

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= q_1^{n-1} q_2^{n-1} - q_1^n q_2^n \\ &= q_1^{n-1} q_2^{n-1} (1 - q_1 q_2) \end{aligned}$$

Si on pose $q = q_1 q_2$ et $p = 1 - q$, alors

$$p = 1 - q_1 q_2$$

et $P(Z = n) = p q^{n-1}$. La variable aléatoire Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Exercice 12 — Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $q = 1 - p$ et $Z = \max(X, Y)$ et on se propose de déterminer de deux façons différentes la loi de Z .

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.

- (a) Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$.
- (b) En déduire la loi de Z .

2. Méthode 2.

- (a) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
- (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$.
- (c) En déduire la loi de Z .

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.

1.1. Remarquons qu'il est d'abord impossible que $T > Z$. Ainsi, si $n > m$, on a $P((Z = m) \cap (T = n)) = 0$. Ensuite, si $n = m$, alors on doit avoir $X = Y = m$, et comme les variables aléatoires sont indépendantes

$$P((Z = m) \cap (T = n)) = P((X = m) \cap (Y = m)) = p^2 q^{2(m-1)}.$$

Enfin, si $n < m$, l'événement $(Z = m) \cap (T = n)$ est égal à la réunion des deux événements disjoints $(X = m) \cap (Y = n)$ et $(X = n) \cap (Y = m)$. La probabilité de chacun de ces événements étant $p^2 q^{m-1} q^{n-1}$, on a dans ce cas

$$P((Z = m) \cap (T = n)) = 2p^2 q^{m-1} q^{n-1}.$$

1.2. On va utiliser la formule des probabilités totales. En effet, les événements $(Y = n)$, pour n parcourant $\mathbb{N}^*$, forment un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} P(Z = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((Z = m) \cap (T = n)) \\ &= \sum_{n=1}^{m-1} 2p^2 q^{m-1} q^{n-1} + p^2 q^{2m-2} \\ &= 2p^2 q^{m-1} \frac{1 - q^{m-1}}{1 - q} + p^2 q^{2m-2} \\ &= 2pq^{m-1} - 2pq^{2m-2} + p^2 q^{2m-2}. \end{aligned}$$

2. Méthode 2 :

2.1. On a

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^m}{1-q} = q^m.$$

< >

2.2. Remarquons que l'on a $Z > m$ si et seulement si $X > m$ ou $Y > m$. Utilisant la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, on trouve

$$P(Z > m) = P(X > m) + P(Y > m) - P((X > m) \cap (Y > m)) = 2q^m - q^{2m}.$$

< >

2.3. Remarquons que l'événement $(Z > m - 1)$ est réunion disjointe des événements $(Z > m)$ et $Z = m$. On en déduit

$$P(Z > m - 1) = P(Z > m) + P(Z = m)$$

< >

soit encore

$$P(Z = m) = P(Z > m - 1) - P(Z > m) = 2q^{m-1} - q^{2m-2} - 2q^m + q^{2m}.$$

< >

Utilisant $p = 1 - q$, on peut vérifier que les résultats des deux méthodes coïncident.

Exercice 13 —

1. (a) Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $S = X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

La variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à valeur dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $(S = n) = \bigcup_{k=0}^n (X_1 = k, X_2 = n - k)$. Par indépendance de X_1 et X_2 , on a

$$\begin{aligned} P((X_1 = k, X_2 = n - k)) &= P(X_1 = k)P(X_2 = n - k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P(S = n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}.$$

- (b) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda_i)$.

Montrer que $S = X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

2. Une région comporte 10 hôpitaux. Chaque hôpital peut réaliser 10 interventions chirurgicales d'urgence par jour, et on admet que le nombre de personnes se présentant à un hôpital donné un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre 8, et que ce nombre est indépendant d'un hôpital à l'autre.

- (a) i. On regarde un hôpital. Quelle est la probabilité qu'un jour donné celui-ci soit saturé?
ii. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 10 hôpitaux soit saturé un jour donné?
(b) On suppose que quand un hôpital est saturé, il peut opérer un transfert de malades vers un autre hôpital. Quelle est la probabilité que le système hospitalier de la région soit saturé?

1.

1.1. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de malades se présentant pour une intervention chirurgicale d'urgence dans cet hôpital. Alors X suit une loi de Poisson de paramètre 8, et on cherche $P(X \geq 11)$, ou encore $1 - P(X \leq 10)$. A l'aide d'un tableur, on trouve grâce à la formule `=1-LOI.POISSON(10,8,1)` une probabilité d'environ 0,184.

1.2. Numérotons les hôpitaux de 1 à 10 et notons A_k l'événement : "le k -ième hôpital est saturé". Alors on sait que $P(A_k) \simeq 0,13$. L'événement B "aucun hôpital n'est saturé" est égal à

$$B = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{10}}.$$

Comme les événements $A_1, \dots, A_{10}$ sont indépendants, on a

$$P(B) = \prod_{i=1}^{10} P(\overline{A_i}) = (1 - P(A_1))^{10}.$$

Finalement, la probabilité recherchée vaut

$$1 - P(B) = 1 - (1 - P(A_1))^{10} \simeq 0,87.$$

2. Notons X_k la variable aléatoire égale au nombre de malades se présentant pour une intervention chirurgicale d'urgence dans l'hôpital k , et $Y = X_1 + \dots + X_{10}$. On cherche $P(Y \geq 101)$. Or, chaque X_k suit une loi de Poisson de paramètre 8, et les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{10}$ sont indépendantes. Donc Y suit une loi de Poisson de paramètre 80. En raisonnant comme à la première question, on trouve $P(Y \geq 101) \simeq 0,013$. C'est beaucoup moins!