

Chapitre 9 : Variables aléatoires - exercices

Exercice 1 — On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 2 — Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence et éventuellement calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{P(X \geq an)}{P(X \geq bn)}$.

Exercice 3 — On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > k + n | X > n) = P(X > k)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
 - (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
 - (b) En déduire que X est sans mémoire. Interpréter ce résultat en termes d'épreuves de Bernoulli.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.
 - (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
 - (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 4 — Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(P(X = k))$ soit décroissante.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale?

Exercice 5 — Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 2 boules bleues.

On tire 3 boules simultanément dans l'urne.

On note X le nombre de boules rouges obtenues et Y le nombre de boules vertes.

1. Déterminer la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2)$.

Exercice 6 — On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note U le numéro de la plus petite boule, et V le numéro de la plus grande boule. Déterminer la loi conjointe de (U, V) , puis les lois de U et de V .

Exercice 7 — Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X , la loi de Y et la loi de $X + Y$.
2. X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 8 — Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q . Calculer $P(Y > X)$.

Exercice 9 — Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1]$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 10 — Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq n) > 0$.

On appelle taux de panne associé à X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = P(X = n | X \geq n)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = P(X = n)$. Démontrer que $p_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}(1 - x_n)p_n$.

En déduire une expression de p_n en fonction des x_k , $1 \leq k \leq n$.

2. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi géométrique si et seulement si son taux de panne est constant.

Exercice 11 — Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2 . On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z .

Exercice 12 — Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $q = 1 - p$ et $Z = \max(X, Y)$ et on se propose de déterminer de deux façons différentes la loi de Z .

1. Méthode 1. On pose $T = \inf(X, Y)$.
 - (a) Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$.
 - (b) En déduire la loi de Z .
2. Méthode 2.
 - (a) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(X > m)$.
 - (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z > m)$.
 - (c) En déduire la loi de Z .

Exercice 13 —

1.
 - (a) Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $S = X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
 - (b) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda_i)$. Montrer que $S = X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.
2. Une région comporte 10 hôpitaux. Chaque hôpital peut réaliser 10 interventions chirurgicales d'urgence par jour, et on admet que le nombre de personnes se présentant à un hôpital donné un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre 8, et que ce nombre est indépendant d'un hôpital à l'autre.
 - (a)
 - i. On regarde un hôpital. Quelle est la probabilité qu'un jour donné celui-ci soit saturé?
 - ii. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 10 hôpitaux soit saturé un jour donné?
 - (b) On suppose que quand un hôpital est saturé, il peut opérer un transfert de malades vers un autre hôpital. Quelle est la probabilité que le système hospitalier de la région soit saturé?